1. Uvodni primjer

*Algoritmi, kombinatorika, optimizacija, rekurzivne relacije i grafovi će uz još neke teme biti predmet izučavanja ovog kolegija. Kao uvodnu temu odabrat ćemo staru igru **Hanojski tornjevi** u kojoj se svi ti pojmovi isprepliću.*

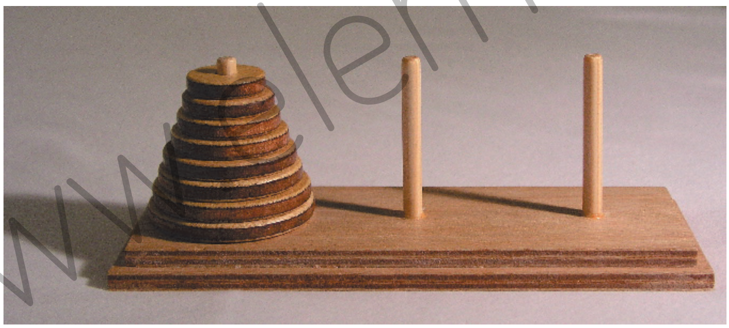
Postavljanje problema

Prema legendi, na početku stvaranja svijeta Bog je postavio 64 zlatna diska različitih veličina na prvi od tri dijamantna klina, tako da je svaki sljedeći disk manji od prethodnog. Zadatak svećenika jest da prebace sve diskove na treći klin, koristeći se i pomoćnim drugim klinom, a poštujuući pravila:

- samo se jedan disk smije pomaknuti u svakom koraku;
- veći disk ne smije se postaviti na manji.

Koliko je poteza potrebno da bi se zadatak izvršio? U trenutku kad premještanje bude završeno, prema legendi, bit će i kraj svijeta.

Sljedeća slika ilustrira ovaj zadatak, diskova je manje od 64, a i izrada je jeftinija (slika je s Wikipedije).



Sl. 1.1. Hanojski tornjevi.

Ovaj je zadatak postavio francuski matematičar Édouard Lucas, godine 1883. U njegovoj formulaciji, radilo se o problemu s 8 diskova, poput ovog na slici, za čije je rješenje bilo potrebno učiniti najmanje 255 premještanja. Postavljanje zadatka začinio je spomenutom legendom koju je smjestio u Brahmin hram u Benaresu[1]. No, danas je zagonetka poznatija pod imenom Hanojski tornjevi.

Označimo klinove s A, B, i C. U početku, diskovi su na klinu A i treba ih prebaciti na klin C.

Izradimo simboličke diskove, svaki od njih zamijenimo jednim brojem: 1, 2, 3, 4,..., n. Disk 1 je najmanji, disk n najveći. Početni položaj određuje raspored

$$\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline n\ldots 321 & & \end{array},$$

a završni

$$\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline & & n\ldots 321 \end{array}.$$

Neka je T_n najmanji potreban broj poteza da se to učini. Ako je $n = 1$, potreban je jedan potez, $T_1 = 1$.

Ako je $n = 2$, u prvom ćemo potezu prebaciti manji disk na pomoćni klin B, zatim veći na klin C i konačno manji na taj klin. Dakle, $T_2 = 3$.

Bilo bi korisno da u ovom trenutku pronađete optimalna rješenja za $n = 3$ i $n = 4$.

[1] Benares je danas poznat kao Varanasi.

Analiza početnih slučajeva

1.1. Rješenje problema s tri diska. Neka je $n = 3$. U prvom potezu moramo premjestiti najmanji disk na jedan od dva slobodna klina. Vjerojatno je samo jedan potez ispravan, ali u ovom trenutku ne znamo koji. U drugom potezu nećemo premještati isti disk, jer ćemo se ili vratiti u početni položaj, ili nepotrebno odigrati dodatni potez. Dakle, u drugom potezu započinjemo s diskom 2 i moramo ga postaviti na jedini slobodni klin.

U trećem potezu nećemo premjestiti disk 2, jer bismo ga mogli samo vratiti nazad odakle je došao. Najveći disk ne možemo pomicati, jer su oba klina zauzeta. Zato možemo premjestiti samo najmanji disk. Nećemo ga vratiti na početni klin, jer bismo time blokirali igru. Dakle, stavit ćemo ga poviše diska 2. Sada u sljedećem potezu možemo premjestiti disk 3.

Kompletno rješenje dano je u sljedećim koracima.

A	B	C	
321			0
32		1	1
3	2	1	2
3	21		3
	21	3	4
1	2	3	5
1		32	6
		321	7

Ukupan broj poteza je $T_3 = 7$. Primijetimo da smo u prvom potezu najmanji disk prebacili na klin C, suprotno nego u slučaju $n = 2$.

1.2. Rješenje problema s četiri diska. Za $n = 4$, postupak rješavanja izgleda ovako:

A	B	C	
4321			0
432	1		1
43	1	2	2
43		21	3
4	3	21	4
41	3	2	5
41	32		6
4	321		7
	321	4	8
	32	41	9
2	3	41	10
21	3	4	11
21		43	12
2	1	43	13
	1	432	14
		4321	15

Ukupan broj poteza je $T_4 = 15$. Sad je najmanji disk u prvom potezu premješten na klin B.

1.3. Strategija igre. Na temelju dosad navedenih primjera, očito je da se najmanji disk mora premještati u svakom drugom potezu. Naime, s većim diskovima ne mogu se povući dva poteza zaredom jer se nijedan od njih ne može staviti na klin s najmanjim diskom.

Nakon što se premjesti najmanji disk, potez treba napraviti s jednim od preostalih diskova. Taj je potez jednoznačno određen: na preostala dva klina nalaze se diskovi različitih veličina i jedini potez koji možemo učiniti jest da manji stavimo na većeg.

Nakon toga, trebamo ponovo premjestiti najmanji disk. On može ići na dvije pozicije. Koja je ispravna? Analiza igre pokazuje da se gibanje najmanjeg diska uvijek obavlja u cikličkim premještanjima. Smjer ovisi o ukupnom broju diskova.

Ako se igra sastoji od parnog broja diskova, tada najmanji disk premještamo u smjeru:

$$A \to B \to C \to A \to B \to C \to A \ \ldots$$

a ako posjedujemo neparan broj diskova, onda je smjer:

$$A \to C \to B \to A \to C \to B \to A \ \ldots$$

U optimalnoj strategiji nijedan disk ne smije se staviti na disk iste parnosti. Dakle, uvijek se parno numerirani disk stavlja na neparni, a neparno numerirani disk stavlja se na parni (ili na prazni klin). S tim uvjetom, u svakom je trenutku potez jednoznačno određen.

Minimalni broj poteza

Postupak rješavanja u jednostavnim situacijama, s tri ili četiri diska, upućuje na rješenje u općem slučaju.

1.4. Izvođenje rekurzivne relacije. Želimo izračunati minimalni potrebni broj poteza T_n za dovršenje zadatka.

Gornju ogradu za T_n dobit ćemo na temelju sljedeće strategije: najprije prebacimo sve diskove, osim najvećeg, na pomoćni klin B, koristeći se pritom i klinom C. Za to nam, uz ispravnu strategiju, treba točno T_{n-1} poteza. Zatim, najveći disk premještamo s klina A u završni položaj, na klinu C. Nakon toga, sve preostale diskove prebacujemo s klina B na klin C, koristeći se pritom i klinom A. Za to je potrebno ponovo učiniti T_{n-1} poteza. Time smo dobili ocjenu:

$$T_n \leqslant 2T_{n-1} + 1.$$

Može li se ova ocjena poboljšati? Može li se broj zdesna smanjiti izborom neke druge strategije premještanja? Odgovor je: ne. Ovaj je broj optimalan. Da se u to uvjerimo, načinimo sljedeću analizu.

Najveći disk jednom mora zauzeti svoj konačni položaj na klinu C. On se tijekom premještanja može micati više puta, ali jednom mora biti pomaknut posljednji put na klin C, u završni položaj. Da bi se on uopće mogao premjestiti, klin na koji ga stavljamo mora biti prazan. To znači da su svi preostali diskovi u tom trenutku posloženi (u prirodnom poretku) na istom klinu. Minimalan broj poteza koji je potreban da bi se to postiglo je T_{n-1}.

Nakon prebacivanja najvećeg diska u konačni položaj na klinu C, sad je potrebno ostale diskove prebaciti na isti klin. Ponovo, to se može učiniti u najmanje T_{n-1} koraka. Zato vrijedi:

$$T_n \geqslant 2T_{n-1} + 1$$

Uočimo u rješenjima slučajeva $n = 3$ i $n = 4$ te tri faze u postupku prebacivanja. Time smo izveli relaciju

$$T_n = 2T_{n-1} + 1$$

koju zadovoljava traženi broj T_n. Ovakva se relacija naziva **rekurzivna relacija**.

1.5. Rješavanje rekurzivne relacije. Budući da je $T_1 = 1$, odavde slijedi

$$T_2 = 2T_1 + 1 = 3$$

i dalje

$$\begin{aligned}
T_3 &= 2T_2 + 1 = 7,\\
T_4 &= 2T_3 + 1 = 15,\\
T_5 &= 2T_4 + 1 = 31,\\
T_6 &= 2T_5 + 1 = 63,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Može li se T_n izraziti eksplicitnom formulom? Prema ovim vrijednostima očekujemo da će biti

$$T_n = 2^n - 1.$$

Tu tvrdnju možemo provjeriti indukcijom. Za $n = 1$, ona je istinita. Iz pretpostavke da ona vrijedi za broj n, za sljedeći broj dobivamo

$$T_{n+1} = 2T_n + 1 = 2 \cdot (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1,$$

što pokazuje da je tvrdnja istinita za svaki prirodni broj n.

Kritični korak u dokazivanju s pomoću matematičke indukcije jest formiranje pretpostavke. U mnogim slučajevima stvaranje opće formule na temelju nekoliko početnih vrijednosti neće biti tako jednostavno. Zato je korisno naučiti i druge, direktne načine za dobivanje zatvorene formule.

Jedan je način iskoristiti rekurzivnu formulu, tako da se ona primijeni na sve uključene indekse:

$$\begin{aligned}
T_n &= 2T_{n-1} + 1\\
&= 2(2T_{n-2} + 1) + 1 = 4T_{n-2} + 2 + 1\\
&= 4(2T_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 8T_{n-3} + 4 + 2 + 1\\
&= 16T_{n-4} + 8 + 4 + 2 + 1\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

Želimo li ovakav postupak dovršiti "do kraja", moramo ipak primijeniti induktivno razmišljanje koje će popuniti prostor označen točkicama. Takav se postupak dopušta jer je očito kako će izgledati svaki daljnji korak. U tu je svrhu korisno brojevima u prethodnoj formi dati oblik koji bolje prati način njihovog nastanka. Posljednji redak možemo tako zapisati:

$$T_n = 2^4 T_{n-4} + 2^3 + 2^2 + 2 + 1.$$

Sad možemo ispisati posljednje retke u ovom postupku:

$$\begin{aligned} &\vdots \\ &= 2^{n-1}T_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1 \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1 \\ &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

U §7 naučit ćemo algoritam s pomoću kojeg možemo "riješiti rekurziju" na još jednostavniji način.

Ponekad, uz malo domišljatosti, možemo bitno pojednostavniti primjenu rekurzivne formule. Ovo je takav slučaj. Napišimo početnu rekurziju u obliku:

$$T_n + 1 = 2(T_{n-1} + 1).$$

Ovaj zapis rekurzivne relacije omogućuje direktno iteriranje, jer se s lijeve i desne strane nalaze istovjetni izrazi:

$$\begin{aligned} T_n + 1 &= 2(T_{n-1} + 1) \\ &= 4(T_{n-2} + 1) \\ &= 8(T_{n-3} + 1) \\ &= 2^{n-1}(T_1 + 1) \\ &= 2^n \end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$T_n = 2^n - 1.$$

Je li svijet u opasnosti da se posao preslagivanja obavi prebrzo? Ako pretpostavimo da se disk može premjestiti s klina na klin u deset sekundi, radeći neprekidno za dovršenje $2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$ poteza, potrebno je oko 5850 milijardi godina.

Grafovi i problem triju tornjeva

Problem triju tornjeva ima jednostavnu interpretaciju primjenom neusmjerenih grafova. Položaj igre u svakom trenutku može se opisati nizom od n slova A, B ili C, ovisno o tome gdje se nalazi pojedini disk. Tako na primjer, poziciju sa šest diskova

A	B	C
63	541	2

možemo zapisati s pomoću niza

$$ABBACB$$

jer je tu zapisano da se diskovi 3 i 6 nalaze na klinu A, diskovi 1, 4 i 5 na klinu B, a disk 2 je na klinu C. Dakle, diskovi su i u ovom zapisu poredani od najvećeg prema najmanjem:

$$\underset{6}{A}\underset{5}{B}\underset{4}{B}\underset{3}{A}\underset{2}{C}\underset{1}{B}.$$

Potezi u igri mogu se opisati promjenom ovakvog niza. Na primjer, u igri s osam diskova, početna pozicija je $AAAAAAAA$, a završna $CCCCCCCC$. Potez u sredini igre u kojem se najveći disk prebacuje s klina A na klin C opisan je s:

$$ABBBBBBB \to CBBBBBBB$$

(svi ostali diskovi u tom se trenutku nalaze na klinu B).

Kompletno rješenje igre s tri klina u ovoj notaciji izgledat će ovako:

A	B	C		
321			0	AAA
32		1	1	AAC
3	2	1	2	ABC
3	21		3	ABB
	21	3	4	CBB
1	2	3	5	CBA
1		32	6	CCA
		321	7	CCC

Skup svih mogućih pozicija je 3^n jer se svaki disk može nalaziti na bilo kojem od triju klinova. Nazovimo te pozicije vrhovima grafa. Transformacija koja prevodi jednu poziciju u drugu bit će na grafu interpretirana s pomoću brida koji povezuje dva susjedna vrha.

Te su veze dvosmjerne, jer se iz svake od njih može prijeći u drugu.

Rješenje zadatka odgovara putu koji povezuje početni i završni vrh. Optimalno rješenje je takav put koji ima najmanju duljinu.

Nisu svi vrhovi povezani. Tako se početna pozicija, npr. AAA može transformirati samo u AAB i AAC, a pozicija AAB može se transformirati u AAA, AAC i ACB. To znači da npr. vrhovi AAA i ABA nisu povezani jer se iz pozicije AAA ne može legalnim potezom dobiti pozicija ABA (trebali bismo odigrati diskom broj 2, iznad kojeg se nalazi disk broj 1). No, $AAC \to ABC$ jest legalni potez.

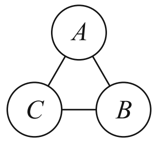
1.6. Primjer. Koji su od sljedećih poteza dopušteni, a koji nisu?

$$ABACACC \to BBACACC$$
$$ABACACC \to ABACACA$$
$$ABACACC \to ABACABC$$
$$ABACACC \to ABACBCC$$
$$ABACACC \to AAACACC$$

Obrazloži svoj odgovor!

Pitanje povezano s ovim problemom postavljeno je u Zadatku 1.4.

Sve pozicije u igri s jednim diskom i svi potezi predočeni su grafom koji ima samo tri vrha. Iz svakog od njih može se prijeći u bilo koji drugi, jer se jedan disk može prebaciti s bilo kojeg klina na bilo koji drugi.



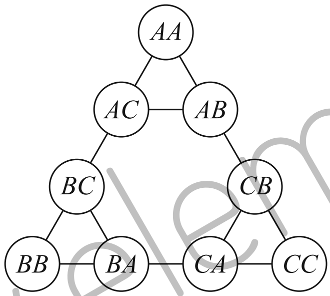
Sl. 1.2. Graf problema tornjeva, jedan disk

Promotrimo sad situaciju s većim brojem diskova.

U početnom trenutku svi se diskovi nalaze na jednom klinu i moguće je odigrati dva poteza (najmanjim diskom na bilo koji drugi klin). Isto vrijedi i za situacije kad se svi diskovi nalaze na nekom drugom klinu. Dakle, postojat će tri istaknuta vrha u ovom grafu koja su povezana s dva susjedna vrha.

U svim ostalim situacijama se u igri mogu odigrati tri poteza, najmanjim diskom na bilo koji od dva preostala klina, te manjim od preostalih diskova na jedan klin. To su rečena tri poteza. Zato iz svakog od ostalih vrhova izlaze točno tri brida.

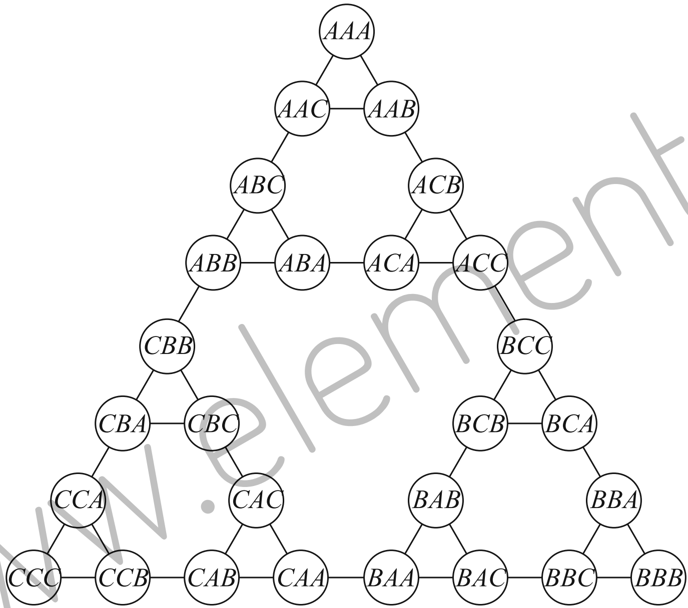
1.7. Graf igre s dva i tri diska. Graf igre sa dva diska ima devet vrhova, a svi dopušteni potezi naznačeni su povučenim bridovima:



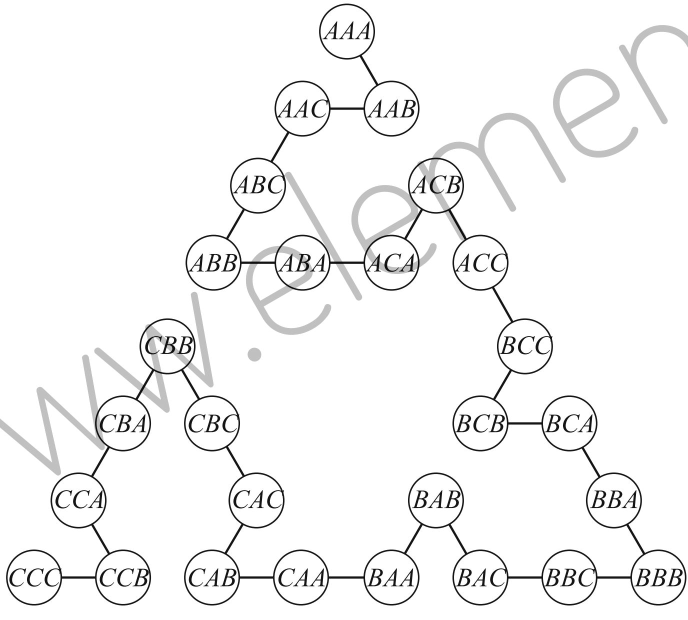
Sl. 1.3. Graf igre, dva diska

Na analogan se način gradi graf igre s tri diska. Graf će se sastojati od 27 vrhova, a svi dozvoljeni potezi naznačeni su ucrtanim bridovima. Na grafu igre se jasno uočavaju podgrafovi koji odgovaraju igri s manjim brojem diskova. Ta će se situacija nastaviti i u igri s većim brojem diskova, čiji će se graf graditi od manjih na identičan način.

Primijetimo da je rješenje igre dano putom koji prolazi vanjskim lijevim bridom ovoga grafa. Desni vanjski brid predstavlja rješenje problema prebacivanja diskova s klina A na klin B.



Reprezentacija igre s pomoću grafa omogućuje lakše odgovore na neka pitanja. Na primjer, sljedeća slika pokazuje da postoji i *najdulji* put u rješavanju ove igre koji prolazi kroz *svako* stanje, a nijedno se od njih ne ponavlja. U tu svrhu treba pronaći povezani put koji prolazi svakim vrhom ovoga grafa:



Primijetimo da postoji točno jedan ovakav put. Dokaz za tu tvrdnju iščitava se iz naravi grafa, posebice spojnica između njegovih odvojenih dijelova.

Problem četiriju klinova

1.8. Poopćeni problem Hanojskih tornjeva. Originalni Lucasov problem uključuje 8 diskova i ima rješenje u 255 koraka. Poopćenje na n diskova omogućuje nam da jasnije promotrimo problem, pronađemo rješenja za malene vrijednosti broja n i izvedemo rješenje u općem slučaju.

Naravno da je prirodno zapitati se kako će glasiti rješenje ako dopustimo više od tri klina, uz ostala nepromijenjena pravila.

Prvo poopćenje Lucasova problema navedeno je u remek-djelu H. Dudeneyja [21], pod imenom *The Reve's puzzle* u kojem autor premješta sireve različitih veličina sa stolca na stolac, rabeći pritom, umjesto klinova, četiri odnosno pet stolaca. Posebno postavlja pitanje s koliko će se poteza moći prebaciti 8, 10 i 21 kolut, upotrebljavajući četiri stolca.

Dudeney je vrlo škrt u rješenju ovog zadatka. Rješenje je iskazano brojevima u jednoj tablici, koji govore koliki je najmanji broj poteza potreban za slučaj triju, četiriju ili pet stolaca, a u ovisnosti o posebno odabranim brojevima sireva. Ta tablica i opis izgledaju ovako:

Stools.	Number of Cheeses.						
3	1	2	3	4	5	6	7
4	1	3	6	10	15	21	28
5	1	4	10	20	35	56	84
	Number of Moves.						
3	1	3	7	15	31	63	127
4	1	5	17	49	129	321	769
5	1	7	31	111	351	1023	2815

The first row contains the natural numbers. The second row is found by adding the natural numbers together from the beginning. The numbers in the third row are obtained by adding together the numbers in the second row from the beginning. The fourth row contains the successive powers of 2, less 1. The next series is found by doubling in turn each number of that series and adding the number that stands above the place where you write the result. The last row is obtained in the same way. This table will at once

Dudeney ne objašnjava zašto je istaknuo samo trokutaste brojeve (one u drugom retku tablice: 1, 3, 6, 10, 15, 21...) kao karakteristične za broj sireva u slučaju četiriju stolaca. (S tim u vezi postavljam pitanje čitatelju: kojom se formulom iskazuju ti brojevi? Koja formula generira brojeve iz trećeg retka, kad raspolažemo s pet stolaca: 1, 4, 10, 20, 35, 56...?)

Dudeney ne objašnjava niti kako je došao do optimalnog rješenja. Naravno, nema ni traga nekom dokazu da je ponuđeno rješenje uistinu optimalno.

To nas ne treba čuditi. Uostalom, za slučaj četiriju klinova i n diskova ni danas ne postoji dokaz za optimalnost nekog postupka. Hipoteza o minimalnom broju potrebnih poteza dokazana je za male početne vrijednosti od n, trenutno za sve $n \leqslant 30$ sveobuhvatnim pretraživanjima po grafu igre koji prikazuje sva moguća rješenja. Taj niz počinje s

$$1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 25,\ 33, 41, 49, 65, 81, 97, 113\ldots$$

Na stranici nizova cijelih brojeva `http://oeis.org/A007664` mogu se vidjeti i ostale poznate vrijednosti ovog niza. On je na toj stranici naveden pod imenom Sloane A007664. Brojevi iz Dudeneyjeve tablice su podniz ovog niza, jer on promatra samo istaknute brojeve sireva.

Problem je u punoj općenitosti, za bilo koji broj diskova i bilo koji broj klinova, postavio B. M. Stewart u časopisu *American Mathemathical Monthly*, 1939. god. [55]. Dvije godine poslije, nepotpuna rješenja dali su J. S. Frame i autor zadatka, [27, 56]. Algoritam koji su oni predložili danas se zove **Frame–Stewartov** algoritam.

Usprkos stotinama objavljenih radova o ovom problemu i bezbrojnim pokušajima, do danas nije dokazano da je taj algoritam optimalan.

Na stranici `http://www.mathapplets.net/` nalazi se vrlo kvalitetna simulacija za rješavanje općenitog problema s r klinova.

1.9. Problem četiriju klinova. Promotrimo sad detaljnije problem četiriju klinova. Neka je R_n najmanji broj potrebnih poteza kad raspolažemo s n diskova. Očito je $R_1 = 1$ i $R_2 = 3$, tu nema razlike prema problemu triju klinova. Međutim, vrijedi $T_3 = 7$, i taj se broj može smanjiti ako raspolažemo s četvrtim klinom.

3 diska. Odredimo optimalno rješenje za problem s tri diska. Uvjerimo se da je $R_3 = 5$.

Evo jednog mogućeg rješenja:

A	B	C	D		
321				0	*AAA*
32	1			1	*AAB*
3	1	2		2	*ACB*
	1	2	3	3	*DCB*
	1		32	4	*DDB*
			321	5	*DDD*

U ovom postupku naziremo tri koraka:

1. Prebacimo najmanji disk na pomoćni klin, svejedno je odaberemo li B ili C (1 potez).
2. Prebacimo preostala dva diska u završni položaj koristeći se preostalim trima klinovima (3 poteza).
3. Prebacimo najmanji disk u završni položaj (1 potez).

4 diska. Jedno od rješenja dano je u tablici.

A	B	C	D		
4321				0	$AAAA$
432		1		1	$AAAC$
43	2	1		2	$AABC$
43	21			3	$AABB$
4	21	3		4	$ACBB$
	21	3	4	5	$DCBB$
	21		43	6	$DDBB$
	2	1	43	7	$DDBC$
		1	432	8	$DDDC$
			4321	9	$DDDD$

Ponovo uočavamo tri faze postupka:

1. Prebacimo dva manja diska na pomoćni klin (3 poteza).
2. Prebacimo dva veća diska u završni položaj koristeći se preostalim trima klinovima (3 poteza).
3. Prebacimo prva dva diska u završni položaj (3 poteza).

5 diskova. U ovoj situaciji ćemo pronaći dva bitno različita rješenja. Prvo je dano u ovoj tablici:

A	B	C	D		
54321				0	$AAAAA$
5432		1		1	$AAAAC$
543	2	1		2	$AAABC$
543	21			3	$AAABB$
54	21		3	4	$AABBD$
5	21	4	3	5	$ACBBD$
5	21	43		6	$ACCBB$
	21	43	5	7	$DCCBB$
3	21	4	5	8	$DCABB$
3	21		54	9	$DDABB$
	21		543	10	$DDDBB$
	2	1	543	11	$DDDBC$
		1	5432	12	$DDDDC$
			54321	13	$DDDDD$

Spomenute tri faze postupka sad glase ovako:

1. Prebaci dva manja diska na pomoćni klin (3 poteza).
2. Prebaci tri veća diska u završni položaj koristeći preostala tri klina (7 poteza).
3. Prebaci prva dva diska u završni položaj (3 poteza).

Primijetite da u koracima 1. i 3. na raspolaganju pri premještanju imamo sva četiri klina, koja nam ipak nisu potrebna, jer prebacujemo samo dva diska. U koraku 2. na raspolaganju imamo samo tri klina. Zato možemo postaviti relaciju:

$$R_5 = 2R_2 + T_3.$$

Budući da je $R_2 = 3$ i $T_3 = 7$, vrijedi $R_5 = 13$.

Međutim, i ovo je rješenje moguće:

A	B	C	D		
54321				0	*AAAAA*
5432		1		1	*AAAAC*
543		1	2	2	*AAABC*
54	3	1	2	3	*AAABB*
54	32	1	3	4	*AABBD*
54	321			5	*ACBBD*
5	321	4		6	*ACCBB*
	321	4	5	7	*DCCBB*
	321		54	8	*DCABB*
1	32		54	9	*DDABB*
1	3	2	54	10	*DDDBB*
1		2	543	11	*DDDBC*
1			5432	12	*DDDDC*
			54321	13	*DDDDD*

Sad također postoje tri faze postupka, ali su drukčije naravi:

1. Prebacimo tri manja diska na pomoćni klin *koristeći se svim četirima klinovima* (5 poteza).
2. Prebacimo dva veća diska u završni položaj *koristeći se preostalim trima klinovima* (3 poteza).
3. Prebacimo prva tri diska u završni položaj *koristeći se svim četirima klinovima* (5 poteza).

Dakle, sada je

$$R_5 = 2R_3 + T_2$$

što vodi na jednaki broj potrebnih poteza.

Frame–Stewartov algoritam

Frame-Stewartov algoritam za općeniti zadatak s n diskova i r klinova problem rješava na sljedeći način. Označimo sa $H_r(n)$ potreban broj poteza. Tako, na primjer, vrijedi $H_3(n) = T_n = 2^n - 1$, $H_4(n) = R_n$, $H_5(10) = 31$.

U prvom koraku, $n - k$ diskova prebacuje se s početnog na jedan od slobodnih klinova, koristeći se pritom svim klinovima — primjenjujući ovaj rekurzivno definiran algoritam. Za to je potrebno $H_r(n-k)$ poteza. U drugom koraku prebacuje se preostalih k diskova iz početnog u završni položaj, koristeći se $r-1$ klinom, za što je potrebno učiniti $H_{r-1}(k)$ poteza. U trećem dijelu se $n - k$ diskova prebacuje na završni klin, koristeći se ponovo svim klinovima i istim rekurzivno definiranim Frame-Stewartovim algoritmom. Za to je potrebno učiniti ponovo $H_r(n-k)$ poteza. Tako dolazimo do rekurzije:

$$H_r(n) = 2H_r(n-k) + H_{r-1}(k).$$

U slučaju četiriju klinova, i uz oznake $R_k = H_4(k)$, $T_k = H_3(k)$, ova rekurzivna formula glasi:

$$R_n = 2R_{n-k} + T_k,$$

odnosno:

$$R_n = 2R_{n-k} + 2^k - 1.$$

U ovim formulama broj k do sada ničim nije određen. Njega biramo tako da dobivena vrijednost za $H_r(n)$, odnosno R_n bude što je moguće manja.

Analizirajmo taj postupak u slučaju $r = 4$. Početna je vrijednost $R_1 = 1$. Za $n = 2$ imamo:

$$R_2 = 2R_{2-k} + 2^k - 1,$$

pri čemu k može uzeti vrijednost 1. (Ako je $k = 0$, to bi značilo da premještanje realiziramo s pomoću samo tri klina, što svakako nije optimalno.) Za $k = 1$ imamo $R_2 = 2R_1 + 1 = 3$.

Ako je $n = 3$, onda formula glasi:

$$R_3 = 2R_{3-k} + 2^k - 1,$$

gdje možemo birati $k = 1$ ili $k = 2$. Za $k = 1$ slijedi $R_3 = 2R_2 + 1 = 7$, a za $k = 2$ dobivamo $R_3 = 2R_1 + 3 = 5$, što je optimalno.

1.10. Broj poteza u Frame-Stewartovu algoritmu.

Analizirat ćemo broj potrebnih poteza R_n u Frame-Stewartovu algoritmu, za slučaj četiriju klinova.

Nekoliko početnih vrijednosti upisano je u ovoj tablici:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R_n	1	3	5	9	13	17	25	33	41	49	65	81
d_n	2	2	4	4	4	8	8	8	8	16	16	16

U posljednjem redu upisana je razlika dviju uzastopnih vrijednosti R_n. Tu vidimo dvije dvojke, tri četvorke, četiri osmice, sljedećih pet vrijednosti je 16 itd. Tu tvrdnju u okviru ovog kolegija ne možemo dokazati. Dokaz se može vidjeti u literaturi, npr. u [49].

Pretpostavit ćemo da je ovo ponašanje istinito, i uz tu pretpostavku odrediti traženu vrijednost R_n.

Za početak, odredit ćemo tu vrijednost u onim indeksima n u kojima pripadne razlike d_n imaju skok. To se događa kad je n jednak 1, $1+2=3$, $1+2+3=6$ i općenito ako je $n = n_k$, gdje smo označili:

$$n_k = 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \tfrac{1}{2}k(k+1).$$

Ovi se brojevi nazivaju *trokutasti brojevi*. Tu istaknutu poziciju ovih brojeva uočio je sastavljač zadatka H. Dudeney i u svom rješenju dao je potreban broj poteza samo za te brojeve. Izvedimo i mi opću formulu.

Stavimo

$$h_k = R_{n_k}$$

i odredimo vrijednosti tog niza. Prema konstrukciji brojeva n_k možemo napisati:

$$h_k - h_{k-1} = k \cdot 2^{k-1}.$$

Zato je

$$\begin{aligned}
h_k &= k \cdot 2^{k-1} + h_{k-1} \\
&= k \cdot 2^{k-1} + (k-1) \cdot 2^{k-2} + h_{k-2} \\
&= \vdots \\
&= k \cdot 2^{k-1} + (k-1) \cdot 2^{k-2} + \ldots + 2 \cdot 2^1 + h_1 \\
&= k \cdot 2^{k-1} + (k-1) \cdot 2^{k-2} + \ldots + 2 \cdot 2^1 + 1
\end{aligned}$$

Vrijednost ove sume je $(k-1) \cdot 2^k + 1$, što se lako može provjeriti indukcijom. (Način računanja takvih suma upoznat ćemo u sljedećem poglavlju.) Dakle, pokazali smo da vrijedi

$$R_{n_k} = (k-1)2^k + 1. \tag{1.1}$$

Odredimo sad vrijednosti R_n za n koji se razlikuje od brojeva oblika n_k. Neka je k najveći prirodni broj za koji vrijedi $n_k := \frac{1}{2}k(k+1) \leqslant n$. Tada u odsječku početne tablice imamo upisane sljedeće vrijednosti:

n_k	$n_k + 1$	$\ldots$	n	$\ldots$	$n_{k+1} - 1$	n_{k+1}
R_{n_k}		$\ldots$	R_n	$\ldots$		$R_{n_{k+1}}$
2^k	2^k	$\ldots$	2^k	$\ldots$	2^k	2^{k+1}
h_k						h_{k+1}

Sada vidimo da vrijedi:

$$\begin{aligned}
R_n &= R_{n_k} + (n - n_k) \cdot 2^k \\
&= (k-1) \cdot 2^k + 1 + (n - \tfrac{1}{2}k(k+1)) \cdot 2^k \\
&= (n - \tfrac{1}{2}k(k-1) - 1)2^k + 1,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

a k je najveći prirodni broj za koji vrijedi

$$k(k+1) \leqslant 2n.$$

Pretpostavlja se da je za problem četiriju klinova ta vrijednost ujedno i rješenje početnog problema, ali za to još nije načinjen strogi dokaz.

Kako broj klinova raste, uvjerljivost Frame-Stewartova algoritma se smanjuje. Ako raspolažemo sa 100 klinova, zar zaista moramo prebaciti 120 diskova na isti klin prije nego počnemo pomicati ostale? (Vidi Zadatak 11.)

Usprkos takvim dilemama, nikakav kontraprimjer nije dosad pronađen, tako da je razumno pretpostaviti optimalnost Frame-Stewartovog algoritma.

1.11. Optimalna strategija.

Možemo li ustanoviti za koji će se k u Frame-Stewartovu algoritmu postizati najmanja vrijednost? Ako je n trokutasti broj, $n = n_k$ za neku vrijednost od k, tada tvrdimo da je upravo taj k tražena vrijednost. Znamo da brojevi R_n u Frame-Stewartovu algoritmu zadovoljavaju relaciju

$$R_n = 2R_{n-k} + T_k,$$

ako je k optimalan izbor. No, ako je $n = n_k$ trokutasti broj, tada je

$$n_k - k = \tfrac{1}{2}k(k+1) - k = \tfrac{1}{2}k(k-1) = n_{k-1},$$

što znači da k mora zadovoljavati relaciju

$$R_{n_k} = 2R_{n_{k-1}} + T_k.$$

Uvrštavajući vrijednosti iz (1.1), lako dobivamo:

$$\begin{aligned} 2R_{n_{k-1}} + T_k &= 2[(k-2)2^{k-1} + 1] + 2^k - 1 \\ &= (k-1)2^k + 1 = R_{n_k}. \end{aligned}$$

Time je tvrdnja dokazana. ●

Razne modifikacije originalnih algoritama

Začuđujuće je velik broj znanstvenih članaka u kojima su analizirane razne modifikacije problema tornjeva. U popisu [59] navedeno je 369 referenci! Izdvojit ćemo neke od interesantnijih modifikacija, prema člancima [58, 60].

1.12. Tri klina u retku.

Tri klina, A, B i C postavljena su u retku. Zadatak je prebaciti n diskova sa klina A na klin C. Pritom su dopušteni samo potezi od A do B i od B do C (i obratno), dakle potez sa A u C (i obratno) nije dopušten. Koliki je minimalni broj poteza potreban?

Neka je S_n traženi broj. Očito, najveći će se disk morati seliti dvaput. Da bi njegov potez iz A u B bio moguć, svi manji diskovi moraju biti složeni na klinu C. Za to je potrebno učiniti S_{n-1} poteza. Da bi se najveći disk prebacio s pozicije B na završnu poziciju C, svi manji moraju se preseliti na klin A. Za to je potrebno ponovo S_{n-1} poteza. I na koncu, ti se diskovi moraju preseliti ponovo na klin C. Zato vrijedi:

$$S_n = 3 \cdot S_{n-1} + 2, \qquad S_1 = 2.$$

Lako se vidi da je rješenje ove rekurzivne relacije

$$S_n = 3^n - 1.$$

1.13. Tri klina u krugu.

Tri klina A, B i C postavljena su na obodu kruga (recimo u vrhovima jednakostraničnog trokuta). Diskove je dopušteno pomicati samo u smjeru kazaljke na satu, dakle, u poretku $A \to B \to C \to A$. Koliko je poteza potrebno učiniti da se n diskova prebaci s klina A na klin C, a koliko ako ih prebacujemo s klina A na klin B?

1.14. Četiri klina u krugu.

Četiri su klina A, B, C i D postavljena u krug i dopušteni su samo potezi kojima se diskovi prebacuju na susjedni klin u istom smjeru, recimo u poretku $A \to B \to C \to D \to A$. Diskovi su postavljeni na klin A i treba ih prebaciti na klin C. Sljedeći algoritam rješava ovaj problem:

Algoritam za četiri klina u krugu

1. Rekurzivnim postupkom prebaci prvih $n-1$ diskova (sve osim najvećeg) s klina A na klin C.
2. Prebaci najveći disk s A na B.
3. Rekurzivnim postupkom prebaci $n-1$ disk s klina C na klin A.
4. Prebaci najveći disk s B na C.
5. Rekurzivnim postupkom prebaci $n-1$ disk s klina A na klin C.

Vidjet ćemo da ovaj algoritam nije optimalan, ali se optimalno rješenje ne može napisati u obliku slično opisanog jednostavnog algoritma!

Ako s P_n označimo potreban broj poteza prema ovom algoritmu, onda opisani postupak vodi na rekurziju

$$P_n = 3 \cdot P_{n-1} + 2, \qquad P_1 = 2,$$

pa je stoga $P_n = 3^n - 1$.

Za dva diska prema ovom treba biti $P_2 = 3^2 - 1 = 8$, a potezi se mogu izvesti na sljedeći način:

A	B	C	D	
21				0
2	1			1
2		1		2
	2	1		3
	2		1	4
		2	1	5
1		2		6
	1	2		7
		21		8

Za tri diska on iziskuje $3^3 - 1 = 26$ poteza, no to nije najmanji mogući broj. Evo algoritma koji posao obavlja u samo 18 poteza:

A	B	C	D	
321				0
32	1			1
32		1		2
3	2	1		3
3	2		1	4
3		2	1	5
	3	2	1	6
1	3	2		7
1	3		2	8
1		3	2	9
	1	3	2	10
2	1	3		11
2		31		12
2		3	1	13
	2	3	1	14
1	2	3		15
1		32		16
	1	32		17
		321		18

Provjerom ovog postupka lako je uočiti koji je uvjet u predloženom algoritmu nepotreban. Također, vidljivo je da ovaj algoritam nije jedini mogući. Na više mjesta, postojao je alternativni potez. Uočite neku od tih situacija! Stoga nije jasno da je ovaj algoritam optimalan, odnosno da je 18 najmanji mogući broj poteza za $n = 3$.

Sveukupnim pretraživanjem po svim mogućim putovima pokazuje se kako je 18 uistinu minimalan broj. Pritom se može naći 48 različitih nizova koji vode do optimalnog rješenja. Za $n = 4$ diska minimalan broj poteza je 36, a postoji 640 različitih putova. Za $n = 5$ minimalan broj poteza je 66, uz 2688 različitih putova, dok se za $n = 6$ broj poteza 120 može ostvariti na 54 839 936 različitih načina. Stoga je praktički nemoguće izabrati neki od njih, ili neku grupu među njima kao bazu algoritma koji bi rješavao problem u općem slučaju.

1.15. Četiri klina u retku.

Dopušteni su samo potezi između klinova A i B (u oba smjera), između B i C te između C i D. Početna pozicija je na klinu A, a završna na klinu D.

Sljedeći algoritam rješava ovaj problem, ali nije optimalan za imalo veći n:

Algoritam za problem četiriju klinova u retku

1. Rekurzivnim postupkom prebacimo $n-1$ manjih diskova s klina A na klin D, upotrebljevajući pritom sva četiri klina.
2. Pomakni najveći disk s klina A na klin C, u dva poteza.
3. Pomakni $n-1$ manjih diskova s klina D na klin B, primjenjujući algoritam za tri klina u retku. Pritom se ne koristi klinom A.
4. Pomakni najveći disk s klina C na klin D.
5. Pomakni $n-1$ manjih diskova s klina B na klin D, primjenjujući ponovo algoritam za tri klina u retku i ne koristeći se klinom A.

Ako Q_n označuje broj poteza potreban da se izvrši ovaj algoritam, onda opisani postupak (i rezultat algoritma za tri klina u retku) vodi na sljedeću rekurziju:

$$\begin{aligned} Q_n &= Q_{n-1} + 2 + (3^{n-1} - 1) + 1 + (3^{n-1} - 1) \\ &= Q_{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1} + 1, \end{aligned}$$

uz $Q_1 = 3$. Indukcijom ili direktnim sumiranjem lako se provjerava da je $Q_n = 3^n + n - 1$.

Ovaj algoritam uvijek funkcionira, ali nije optimalan. Zato je dobivena vrijednost gornja ocjena za potreban broj poteza. Donja ocjena može se napisati na temelju originalnog Reveova algoritma jer za rješenje ovog problema sigurno treba načiniti veći broj poteza.

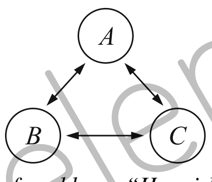
Provjeravanje svih mogućih situacija pokazuje da minimalan broj poteza Q_n^* potreban da se riješi problem iznosi, u ovisnosti o broju diskova n:

n	1	2	3	4	5	6
Q_n^*	3	10	19	34	57	88

Nije poznat algoritam koji bi dao optimalno rješenje, pa čak niti neki koji bi popravio prethodno navedeni postupak. Razlog tomu može biti ponovo kombinatorna eksplozija, za $n = 6$ postoji točno 2 097 152 različitih postupaka koji vode do optimalnog rješenja.

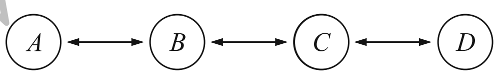
1.16. Četiri klina u zvijezdi.

Ako svaki klin zamislimo kao vrh usmjerenog grafa, onda se pravila pomicanja lako mogu opisati pripadnim grafom. Na primjer, originalni problem triju klinova ima pripadni graf:



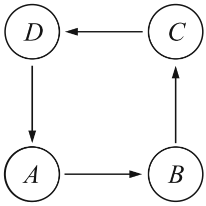
Sl. 1.4. Graf problema "Hanojski tornjevi"

Prethodno promatrani problemi s četirima klinovima imaju odgovarajuće grafove, za četiri klina u retku:



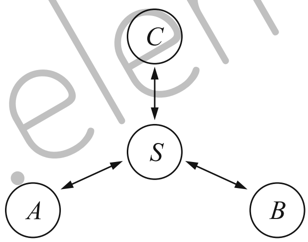
Sl. 1.5. Graf problema "Četiri klina u retku"

I konačno za problem s četirima klinovima u krugu:



Sl. 1.6. Graf problema "Četiri klina u krugu"

Sad ćemo razmotriti problem s četirima klinovima kojemu je odgovarajući graf:



Sl. 1.7. Graf problema Četiri klina, zvjezdasti položaj

Igra se sastoji od triju klinova A, B i C koji se nalaze u vrhovima trokuta i četvrtog klina S, koji je u središtu trokuta. Zabranjeni su potezi između klinova A, B i C, dakle, sav se promet odvija preko središnjeg klina S. Zadatak je prebaciti n diskova s klina A na klin C.

Vrlo je jednostavno pronaći jedno rješenje ove zagonetke ako se ona dovede u vezu s originalnim problemom Hanojskih tornjeva s trima klinovima. Naime, svaki potez u originalnom problemu može se odigrati i sada, tako da se odigra preko središnjeg klina S. Na primjer, potez $A \to C$ zamijenit će se dvama potezima $A \to S \to C$. Na taj način vidljivo je da se rješenje može postići u

$$2 \cdot T_n = 2^{n+1} - 2$$

poteza. No, to rješenje nije optimalno.

Možemo zamisliti bolji algoritam koji kombinira ideju Reveove zagonetke i problema s trima klinovima u retku.

Algoritam za problem zvjezdastog položaja

Neka je k bilo koji broj, $1 \leqslant k \leqslant n$.

1. Rekurzivnim algoritmom prebaci početnih $n-k$ (malih) diskova s klina A na klin B, koristeći se pritom svim klinovima.
2. Prebaci niz od k preostalih (najvećih) diskova s početne pozicije A u završnu poziciju C, koristeći se pritom pomoćnim klinom S, a zanemarujući klin B.
3. Rekurzivnim algoritmom preseli početnih $n-k$ diskova s klina B na klin C, koristeći se pritom svim klinovima.

Drugi korak u ovom algoritmu odgovara problemu s trima klinovima u retku i za njegovo rješavanje treba učiniti $3^k - 1$ poteza. Neka je V_n broj poteza koji treba učiniti primjenom ovog algoritma. Onda, analogno kao kod Reveove zagonetke, vrijedi

$$V_n = \min 1 \leqslant k \leqslant n(2V_{n-k} + 3^k - 1)$$

za $n \geqslant 1$, $V_0 = 0$.

Primijetimo da izbor $k = 1$ zapravo oponaša rješenje kod standardnog problema triju tornjeva, kad se u drugom koraku algoritma prebacuje samo najveći disk. Taj je izbor optimalan samo za $n = 1$ i $n = 2$, dok za $n = 3$, 4, 5 ili 6 treba biti $k = 2$.

Zadatci za vježbu

1.1.[1] U problemu s trima klinovima, pokaži da se pri optimalnom premještanju disk 1 pomiče u svakom drugom potezu, i to uvijek u istom smjeru. Pokaži da se i svi diskovi iste parnosti pomiču ciklički u istom smjeru, a oni suprotne parnosti u suprotnom smjeru.

1.2.[2] U problemu s trima klinovima, pokaži da se pri optimalnom premještanju disk 1 pomiče točno 2^{n-1} puta, disk 2 točno 2^{n-2} puta,…, disk $n-1$ dva puta, a disk n samo jednom.

1.3.[1] Dokaži da se u optimalnoj strategiji igre nijedan disk ne smije staviti na disk iste parnosti.

1.4.[1] Neka je $X_1X_2\cdots X_n$ pozicija u igri s n diskova, gdje je $X_i \in \{A,B,C\}$ te $Y_1Y_2\cdots Y_n$ pozicija u sljedećem trenutku. Opiši točnu vezu između X_i i Y_i, drugim riječima, karakteriziraj legalne poteze u grafu igre s trima klinovima.

1.5.[2] U problemu s trima klinovima, klinovi su postavljeni u krug i dopušteno je diskove pomicati samo u smjeru kazaljke na satu. Koliko je poteza potrebno da se n diskova prebaci s prvog na treći klin?

1.6.[2] U problemu dvostrukih Hanojskih tornjeva, posjedujemo dva identična kompleta diskova. Zadatak je istovjetan početnom, treba ih prebaciti na treći klin. U postupku prebacivanja smijemo staviti disk na onaj jednake veličine. Koliko je poteza potrebno da se dovrši zadatak?

1.7.[4] Posjedujemo dva identična kompleta diskova, ali obojenih različitim bojama. Želimo diskove prebaciti na treći klin tako da se sačuva originalni poredak diskova. Koliko će poteza biti potrebno učiniti?

1.8.[1] U problemu s četirima klinovima potrebno je načiniti 33 poteza da bi se prebacilo 8 diskova. Napiši optimalni algoritam premještanja.

1.9.[2] Nacrtaj graf igre u problemu s četirima klinovima i dvama diskovima.

1.10.[2] U problemu s četirima klinovima i trima diskovima graf igre ima 64 vrha. Koliko bridova postoji? Koliko postoji različitih rješenja ove igre? Ispiši sve putove koji odgovaraju optimalnim rješenjima. (Početni položaj je AAA, a završni DDD).

1.11.[4] U tekstu udžbenika piše: *Kako broj klinova raste, uvjerljivost Frame-Stewartova algoritma se smanjuje. Ako raspolažemo sa 100 klinova, zar zaista moramo prebaciti 120 diskova na isti klin prije nego počnemo pomicati ostale?* Je li ova rečenica istinita? Postoji li broj diskova n toliki da je ispravni prvi korak prebaciti 120 diskova na isti klin? Koliko velik bi taj n mogao biti? Odredi procjenu za broj n.

1.12.[2] Odredi minimalan potreban broj poteza u poopćenom problemu s n diskova i r klinova, primjenjujući Frame–Stewartov algoritam, za $n \leqslant 20$ i $3 \leqslant r \leqslant 10$.

1.13.[3] Dokaži da vrijedi:

$$R_{n(n+1)/2} \leqslant 2R_{n(n-1)/2} + T_n.$$

Na temelju toga nađi ocjenu za broj $R_{n(n+1)/2}$.

1.14.[1] Na stranici `http://mathworld.wolfram.com/TowerofHanoi.html` dana je sljedeća formula za broj R_n. Hipoteza je da on zadovoljava rekurziju

$$R_n = R_{n-1} + 2^x,$$

pri čemu je $R_1 = 1$, a x najveći cijeli dio rješenja jednadžbe

$$n - 1 = \tfrac{1}{2}x(x+1),$$

tj.

$$x = \left\lfloor \frac{\sqrt{8n-7}-1}{2} \right\rfloor,$$

što daje formulu

$$R_n = 1 + [n - \tfrac{1}{2}x(x-1) - 1]2^x.$$

Pokaži da se ova formula podudara sa (1.2).

1.15.[4] Napiši algoritam za rješavanje problema četiriju klinova, primjenjujući Frame–Stewartov algoritam.

1.16.[3] Neka je (a_n) niz cijelih brojeva oblika $2^i \cdot 3^j$, $i \geqslant 0$, $j \geqslant 0$ napisanih u rastućem poretku:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, \ldots$$

Dokaži da je onda

$$k = \lfloor \log_3(a_n) \rfloor + 1$$

optimalan izbor parametra k u algoritmu zvjezdastog položaja. Dokaži da je ukupan broj poteza dan sa

$$S_n = 2\sum_{m=1}^{n} a_m.$$