1.

Fourierov red

Uobičajeni je postupak u matematici da se složenije funkcije prikazuju pomoću jednostavnijih. Tako na primjer, eksponencijalnu funkciju možemo prikazati kao zbroj reda

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

Ta nam formula omogućava da aproksimiramo eksponencijalnu funkciju polinomom, uzimajući konačno mnogo pribrojnika s desne strane.

Poznato nam je da se Taylorovim redom mogu prikazati samo funkcije koje zadovoljavaju stroge uvjete. Tako na primjer, prekinuta se funkcija ne može prikazati Taylorovim redom. Međutim, umjesto potencija 1, x, x^2,..., možemo odabrati i neki drugi pogodni skup funkcija pomoću kojih ćemo prikazivati složenije funkcije.

Godine 1807. francuski fizičar i matematičar Joseph Fourier koristio je u takvom prikazu *harmonike*. On je tvrdio da se svaka funkcija $f(x)$ na ograničenom intervalu može prikazati u obliku sume harmonika

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega x + \varphi_n).$$

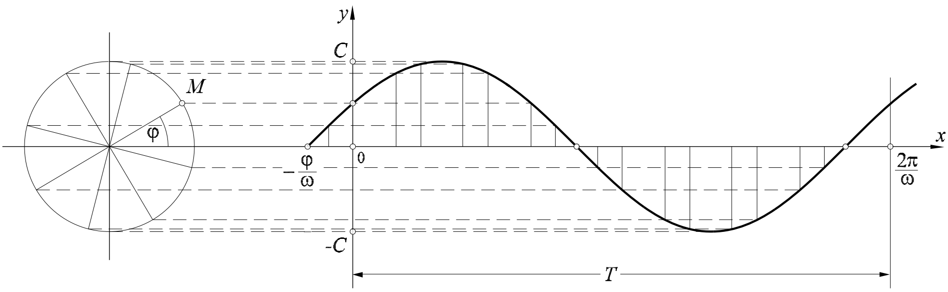
Iako su redove sličnih oblika promatrali i njegovi veliki prethodnici poput Bernoullija, D'Alemberta i Eulera, Fourierova metoda je bila toliko napredna da je trebalo proći još petnaest godina dok ne bude priznata od autoriteta njegovog doba, Laplacea, Poissona i Lagrangea. Oni su (opravdano) zamjerali Fourieru nedostatak matematičke strogosti, jer su neke njegove tvrdnje bile pogrešne. Fourier je konačno 1822. god. objavio svoj rad pod naslovom *Théorie Analytique de la Chaleur* (Analitička teorija topline) u kojem analizira problem širenja topline, opisan parcijalnim diferencijalnim jednadžbama i koristi svoj revolucionarni način prikazivanja funkcija da bi riješio taj problem.

Matematičku strogost Fourierovom radu dali su kasnije Dirichlet i Riemann.

1.1. Periodične funkcije

Sinusoida

Zamislimo da se točka M giba jednolikom brzinom po kružnici. Promotrimo njezinu udaljenost od bilo kojeg pravca koji prolazi središtem kružnice. Najprikladnije je kružnicu postaviti u koordinatni sustav i za pravac odabrati os apscisa. Onda je ta udaljenost ordinata točke M i definira funkciju koju nazivamo **sinusoida**.



Sl. 1.1. Sinusoidu možemo zamisliti kao projekciju kružnog gibanja na os ordinata.

Točka M počinje se gibati po kružnici polumjera C u trenutku $x = 0$. Varijabla x ima fizikalno značenje *vremena* od početka vrtnje. C je pozitivan broj koji nazivamo **amplituda** sinusoide. Neka je φ kut koji radijvektor točke u početnom trenutku zatvara s osi apscisa, φ se naziva **fazni pomak**. Brzina kojom točka M kruži određena je **kružnom frekvencijom** ω. Onda ordinata točke M definira funkciju čija je jednadžba

$$f(x) = C\,\sin(\omega x + \varphi). \tag{1.1}$$

Točka će opisati puni krug kad bude $\omega x = 2\pi$, dakle, u trenutku $x = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Taj se iznos naziva **period** sinusoide i označava s $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

⋆ ⋆ ⋆

Prema adicijskom teoremu vrijedi

$$\begin{aligned} C\,\sin(\omega x + \varphi) &= C\,\sin\varphi\,\cos\omega x + C\,\cos\varphi\,\sin\omega x \\ &= A\,\cos\omega x + B\,\sin\omega x \end{aligned} \tag{1.2}$$

gdje smo označili $A := C\sin\varphi$, $B := C\cos\varphi$. Dakle, svaku sinusoidu možemo prikazati u obliku zbroja sinus i kosinus funkcije, bez faznog pomaka. Ako su A i B poznati, možemo odrediti C i φ, jer vrijedi

$$\begin{aligned} &A^2 + B^2 = C^2\,\sin^2\varphi + C^2\,\cos^2\varphi = C^2 &&\Longrightarrow C = \sqrt{A^2 + B^2} \\ &\frac{A}{B} = \frac{C\,\sin\varphi}{C\,\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi &&\Longrightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{A}{B} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Primjer 1. Nacrtajmo funkciju $f(x) = 2\cos x + \sin x$.

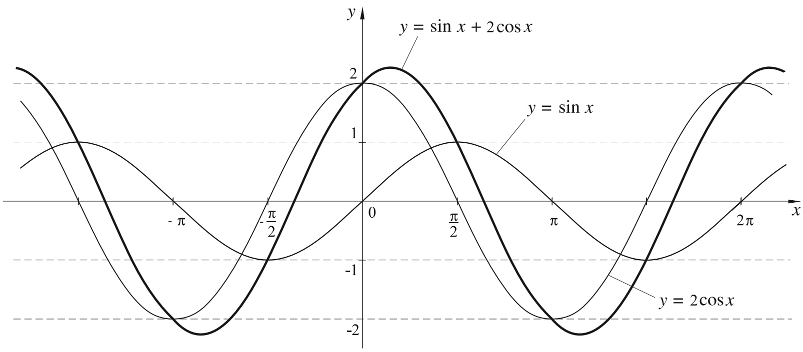
▷ Ovdje je $A = 2$, $B = 1$. Zato,

$$C = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{1} \implies \varphi = \operatorname{arc\,tg} 2 \approx 63^\circ 26'.$$

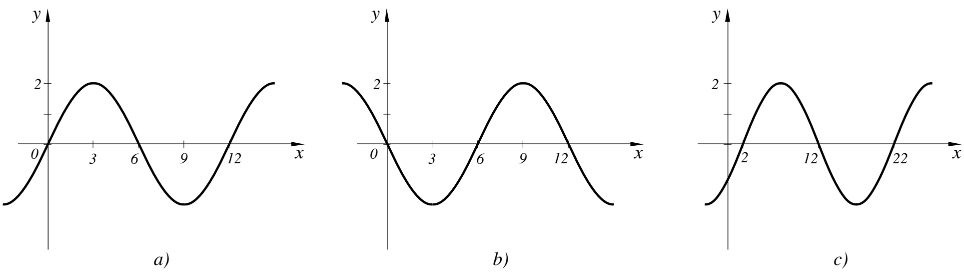
Iz poznatog tangensa, kut nije jednoznačno određen. Moramo još znati u kojem se kvadrantu on nalazi. U ovom su primjeru koeficijenti A i B pozitivni. Zato su pozitivni $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$, pa se kut φ nalazi u prvom kvadrantu.

Graf funkcije skiciran je na slici 1.2.



Sl. 1.2. Nije očigledno, ali formule (1.2) potvrđuju da je zbroj sinus funkcije i kosinus funkcije — s različitim amplitudama ali istom frekvencijom — ponovo sinusoida. Njezina amplituda iznosi $C = \sqrt{A^2 + B^2}$.

Primjer 2. Odredimo jednadžbe sinusoida prema slici 1.3.a) – c).



Sl. 1.3.

▷

A. $f(x) = 2\sin\frac{\pi}{6}x$; **B.** $f(x) = 2\sin\frac{\pi}{6}(x-6) = 2\sin(\frac{\pi}{6}x - \pi)$;

C. $f(x) = 2\sin\frac{\pi}{10}(x-2) = 2\sin(\frac{\pi}{10}x - \frac{\pi}{5})$. ◁

⋆ ⋆ ⋆

Nas će u nastavku najviše interesirati svojstvo **periodičnosti** sinusoide.

Periodične funkcije

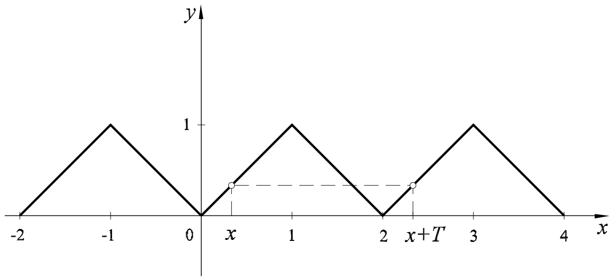
Prisjetimo se definicije periodične funkcije.

Periodične funkcije

Kažemo da je $f : \mathcal{D}_f \to \mathbf{R}$ **periodična funkcija**, ako postoji $T > 0$ takav da za svaki x iz domene funkcije f vrijedi

$$f(x) = f(x+T). \tag{1.4}$$

Broj T se naziva **period** od f. Najmanji period (ako postoji) nazivamo **osnovni** (ili **temeljni**) period.



Sl. 1.4. Periodična funkcija.

Navedimo neka svojstva periodičnih funkcija. Zbog jednostavnosti, pretpostavit ćemo da je područje definicije funkcije f skup $\mathbf{R}$.

Cjelobrojni višekratnik perioda je period. Zaista,

$$f(x+2T) = f(x+T+T) = f(x+T) = f(x), \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

prema tome, i $2T$ je period. Sada indukcijom zaključujemo da je kT period za svaki $k \in \mathbf{N}$.

Ako je f periodična s periodom T, tada je dovoljno poznavati ponašanje funkcije na bilo kojem intervalu duljine T, recimo na $[a, a+T]$. Tako vrijedi npr. za bilo koji $c \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{c+T} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+T}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^{c+T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{a} f(t+T)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^{c+T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^{c+T} f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Obično se f promatra na intervalima oblika $[0, T]$ ili pak $[-T/2,\ T/2]$.

Temeljni period. Periodična funkcija ne mora imati osnovni period. Tako npr. $f(x) \equiv 1$ ima za period svaki pozitivni broj $T > 0$.

Također,

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0\,, & x \notin \mathbf{Q}, \end{cases}$$

ima za period svaki pozitivni racionalni broj $T > 0$: ako je x racionalan, tada je i $x + T$ racionalan te je $f(x) = f(x+T) = 1$. Ako je pak x iracionalan, tada je i $x+T$ iracionalan. Zato je uvijek $f(x) = f(x+T)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Temeljni period ne postoji, jer nema najmanjeg pozitivnog racionalnog broja.

Ova je funkcija vrlo nepravilna, ona je prekinuta u svakoj točki. Može se dokazati (u što se ovdje nećemo upuštati) da svaka periodična funkcija f različita od konstante, a koja je neprekinuta barem u jednoj točki, ima temeljni period.

Operacije s periodičnim funkcijama

Zbroj i umnožak periodičnih funkcija s istim periodom opet je periodična funkcija s tim periodom.

Eventualno se pritom temeljni period može smanjiti, npr. $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ ima period π, dok funkcije sinus i kosinus imaju period 2π.

Zbroj (ili umnožak) funkcija koje su periodične, ali s različitim periodima, ne mora biti periodična funkcija.

Za periode T_1 i T_2 funkcija f, odnosno g, kažemo da su **sumjerljivi** ako je omjer $T_1 : T_2$ racionalan broj. Tada postoje prirodni brojevi p i q takvi da vrijedi $pT_2 = qT_1$. Tada je $T = pT_2 = qT_1$ njihov zajednički period te je $f + g$ periodična s periodom T. Npr.

T_1	T_2	zajednički period	primjer funkcije
π	$\pi/3$	π	$\operatorname{tg} x + \cos 6x$
4π	6π	12π	$\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{3}$
2π	$\sqrt{2}\pi$	ne postoji	$\cos x + \sin \sqrt{2}\,x$

Primjer 3. Kad će funkcija $f(x) = A\cos\alpha x + B\sin\beta x$, $\alpha,\ \beta > 0$, $\alpha \neq \beta$ biti periodična?

▷ $f(x+T) - f(x) = 0$ daje

$$A\cos(\alpha x + \alpha T) - A\cos\alpha x + B\sin(\beta x + \beta T) - B\sin\beta x$$
$$= 2B\cos(\beta x + \frac{\beta T}{2})\sin\frac{\beta T}{2} - 2A\sin(\alpha x + \frac{\alpha T}{2})\sin\frac{\alpha T}{2} = 0$$

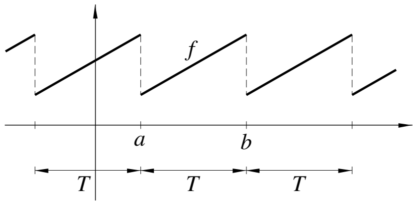
za svaki $x \in \mathbf{R}$, i zato mora biti $\sin\frac{\alpha T}{2} = 0$, $\sin\frac{\beta T}{2} = 0$. Prema tome, $\alpha T = 2k_1\pi$, $\beta T = 2k_2\pi$ za neke prirodne k_1, k_2, tj. $T = \frac{2k_1\pi}{\alpha} = \frac{2k_2\pi}{\beta}$. Odavde slijedi da su α i β sumjerljivi, jer vrijedi $\alpha : \beta = k_1 : k_2$. Dakle, da bi f bila periodična funkcija, broj α/β mora biti racionalan. ◁

Periodična proširenja

Svaka se funkcija $f : \langle a, b] \to \mathbf{R}$ može proširiti do periodične funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s periodom $T = b - a$.

Pritom je dovoljno situaciju s intervala $\langle a, b]$ "preslikati" na svaki susjedni interval iste duljine.

Ako je početna funkcija definirana na zatvorenom intervalu $[a, b]$, onda u rubnim točkama ovako konstruiranih intervala funkcija možda neće biti dobro definirana (kad god je $f(a) \neq f(b)$). Njezinu vrijednost u tim točkama možemo onda uzeti uzeti po volji. U teoriji Fourierovih redova obično se uzima srednja vrijednost $\frac{1}{2}[f(a) + f(b)]$.



Sl. 1.5. Funkcija i njezino periodično proširenje.

Primjer 4. Uvjerimo se da su funkcije $f(x) = \arcsin(\sin x)$ i $g(x) = \arccos(\cos x)$ periodične. Nacrtajmo njihove grafove.

▷ Vrijedi

$$f(x + 2\pi) = \arcsin(\sin(x + 2\pi)) = \arcsin(\sin x) = f(x),$$

te je f periodična s periodom 2π. Nadalje, po definiciji funkcije arkus sinus, vrijedi

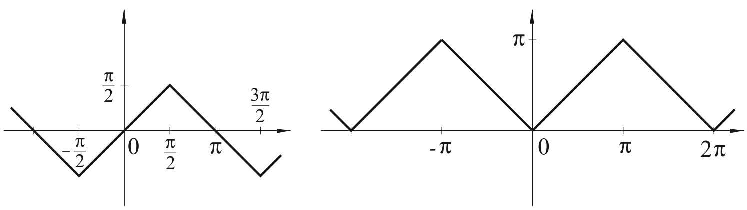
$$\arcsin(\sin x) = x, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Ako je pak $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, tada je $x - \pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ i zato

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin x) &= \arcsin(\sin(x - \pi + \pi)) \\ &= \arcsin(-\sin(x - \pi)) = -\arcsin(\sin(x - \pi)) = -x + \pi. \end{aligned}$$

Time je funkcija f definirana na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ koji ima duljinu njezinog perioda, i dalje se periodički ponavlja (slika 1.6 lijevo).

Slično dobivamo i graf finkcije $\arccos(\cos x)$ (slika 1.6 desno). ◁



Sl. 1.6. Graf funkcije $\arcsin(\sin x)$ *(lijevo), te funkcije* $\arccos(\cos x)$ *(desno).*

⋆ ⋆ ⋆

Neka je f periodična s periodom 2π. Tada je funkcija $x \mapsto f\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$ periodična s periodom T. Tako na primjer, funkcija $x \mapsto \sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$ ima period T.

Neka je sada f periodična s periodom T. Tada je funkcija $x \mapsto f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ periodična s periodom 2π. Zato je u teorijskim razmatranjima dovoljno promatrati periodične funkcije s periodom 2π.

Parna i neparna proširenja funkcije

Funkcija f je **parna**, ako vrijedi

$$f(-x) = f(x)$$

za svaki realni x iz domene funkcije f. (Ta domena stoga mora biti simetrična obzirom na ishodište.) Graf parne funkcije je simetričan s obzirom na os Oy.

Funkcija f je **neparna**, ako vrijedi

$$f(-x) = -f(x).$$

Njezin je graf simetričan s obzirom na ishodište koordinatnog sustava.

Funkcije 3, $2x^2$, $3x^4$, $\cos x$, $\sin(x^2)$ su parne. Funkcije $3x - 2x^3$, $\sin x$, $\operatorname{sh} x$ su neparne. Funkcija e^x niti je parna, niti neparna (i 'većina' funkcija je takva).

Ako je f bilo koja funkcija, tada je funkcija definirana formulom

$$f_p(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

parna, dok je

$$f_n(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

neparna (*provjeri*!). Pritom vrijedi

$$f(x) = f_p(x) + f_n(x).$$

Dakle, svaka se funkcija može rastaviti na zbroj parne i neparne funkcije.

To je upravo situacija koju nalazimo pri definiciji hiperboličkih funkcija; krenuvši od eksponencijalne koja nije niti parna niti neparna, dobivamo

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Dakle, funkcija kosinus hiperbolički je upravo parni dio eksponencijalne funkcije, dok je funkcija sinus hiperbolički njezin neparni dio. Pritom vrijedi $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$.

⋆ ⋆ ⋆

Funkciju $f : [0, L] \to \mathbf{R}$ možemo proširiti do periodične funkcije s periodom $T = 2L$, tako da ova bude bilo parna bilo neparna. U tu je svrhu najprije potrebno definirati to proširenje na intervalu $[-L, 0]$.

Želimo li dobiti parnu funkciju, onda za $x \in [-L, 0]$ stavljamo $f(x) = f(-x)$. (Primijeti da je tad $-x \in [0, L]$.)

Želimo li dobiti neparnu funkciju, onda za $x \in [-L, 0]$ stavljamo $f(x) = -f(-x)$.

Sad je dovoljno ovu funkciju, definiranu na intervalu $[-L, L]$, proširiti do periodične funkcije.

Primjer 5. Odredimo i skicirajmo parno, odnosno neparno, periodično proširenje funkcije $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

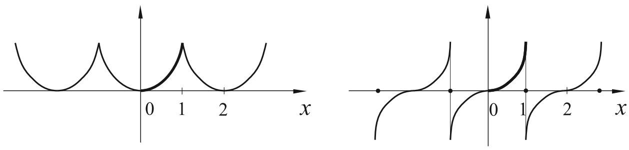
▷ Za parno proširenje će biti

$$f(x) = f(-x) = (-x)^2 = x^2, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 0.$$

Za neparno proširenje će biti

$$f(x) = -f(-x) = -(-x)^2 = -x^2, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 0.$$

Ova funkcija u točkama $\ldots -3$, -1, 1, $3 \ldots$ nije dobro definirana. pa prema dogovoru u tim točkama za njezinu vrijednost uzimamo 0 (sredinu lijevog i desnog limesa). ◁



Sl. 1.7. Parno periodično proširenje (lijevo) i neparno (desno) funkcije $f(x) = x^2$ *definirane na intervalu* $[0, 1]$.

Zadaci za vježbu

1. Nacrtaj periodičnu funkciju $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ako je

A. $f(x) = \sin x$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$; $\quad f$ neparna, $T = 2\pi$;

B. $f(x) = \sin x$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$; $\quad f$ parna, $T = 2\pi$;

C. $f(x) = \sin x$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$; $\quad T = 1$;

D. $f(x) = x$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$; $\quad f$ parna, $T = 2$.

2. Nacrtaj graf funkcije f tako da ona bude periodična s periodom $T = 2\pi$, ako je zadana njezina formula na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Koja je od tih funkcija parna, a koja neparna?

A. $f(x) = x$;

B. $f(x) = x^2$;

C. $f(x) = \sin 2x$;

D. $f(x) = \sin \pi x$;

E. $f(x) = \pi - x$;

F. $f(x) = \pi - |x|$;

G. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi; \end{cases}$

H. $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < 0, \\ 0, & 0 < x < \pi; \end{cases}$

I. $f(x) = \begin{cases} -x^2, & -\pi < x < 0, \\ x^2, & 0 < x < \pi; \end{cases}$

J. $f(x) = \begin{cases} -x^3, & -\pi < x < 0, \\ x^3, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

3. Nacrtaj graf funkcije f tako da ona bude periodična s periodom $T = 2\pi$ i **1.** parna; **2.** neparna, ako je zadana njezina formula na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Napiši njezinu jednadžbu na intervalu $\langle -\pi, 0 \rangle$.

A. $f(x) = x - 1$; **B.** $f(x) = x^2$; **C.** $f(x) = \cos 2x$;

D. $f(x) = \cos \pi x$; **E.** $f(x) = \pi - x$; **F.** $f(x) = e^{-x}$.

4. Koja je od sljedećih funkcija periodična i koliki joj je temeljni period?

A. $f(x) = \sin 3x$; **B.** $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$;

C. $f(x) = \sin^2 x$; **D.** $f(x) = \sin(x^2)$;

E. $f(x) = \sin {}^1\!/_x$; **F.** $f(x) = g(\sin x)$, g bilo kakva.

5. Dokaži da je zbroj, umnožak i količnik dviju periodičnih funkcija s istim periodom, ponovo periodična funkcija. Kako se može promijeniti njezin period?

6. Ako su f i g periodične, je li kompozicija $g \circ f$ periodična? Ako jest, koliki joj je period?

7. Neka je f periodična i g bilo kakva.
A. Dokaži da je $g \circ f$ periodična.
B. Mora li $f \circ g$ biti periodična?

8. Koje su od sljedećih funkcija periodične i koliki im je temeljni period?

A. $f(x) = \sin \sqrt{\pi}\, x + 2$; **B.** $f(x) = \operatorname{tg} 3x + \cos 2x$;

C. $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}$; **D.** $f(x) = \sin x \cdot \sin 3x$;

E. $f(x) = \sin {}^x\!/_2 - 3 \cos {}^x\!/_3$; **F.** $f(x) = \sin \pi x + \cos 2x$;

G. $f(x) = 2 \sin \sqrt{2}\, x + \cos 3\sqrt{2}\, x$; **H.** $f(x) = \sin ax + \sin bx + \sin cx$,

a, b, c prirodni brojevi.

9. Neka je $\lfloor x \rfloor$ najveći cijeli dio broja x. Nacrtaj funkciju $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$. Uvjeri se da je ona periodična i odredi joj period.

10. Ako za funkciju f vrijedi

$$f(x + T) = k \cdot f(x), \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

za neki $k \in \mathbf{N}$ i $T > 0$, dokaži da se f može prikazati u obliku $f(x) = a^x \cdot g(x)$, pri čemu je g periodična funkcija s periodom T. Dokaži da vrijedi i obrat.

11. Dokaži da je rastav funkcije

$$f(x) = f_p(x) + f_n(x)$$

na zbroj parne i neparne funkcije jednoznačan.

12. Neka je P polinom. Dokaži
A. P je parna funkcija ako i samo ako polinom ima samo parne potencije;
B. P je neparna funkcija ako i samo ako su sve potencije neparne.

13. Dokaži da za parnu funkciju vrijedi

$$\int_{-A}^{A} f(x)dx = 2 \int_{0}^{A} f(x)dx,$$

dok je za neparnu

$$\int_{-A}^{A} f(x)dx = 0.$$

Odgovori

4. A. Sinus funkcija je periodična s temeljnim periodom 2π. Iz relacije

$$\sin 3x = \sin 3(x+T) = \sin(3x+3T)\,, \quad \forall\, x$$

slijedi da T mora zadovoljavati $3T = 2\pi$, zato $T = 2\pi/3$.

B. Temeljni period $T = 2\pi/\omega$.

C. $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x+2T)) = f(x+T)$ daje $2T = 2\pi$, $T = \pi$.

D. Moralo bi vrijediti $\sin(x^2) = \sin(x^2+2xT+T^2)$, $\forall\, x$ i odavde $x^2+2xT+T^2 = x^2+2k\pi$ za neki $k \in \mathbf{Z}$ i sa sve $x \in \mathbf{R}$, što je nemoguće. Zato f nije periodična.

E. Nije periodična. Nacrtaj joj graf.

F. Periodična s periodom 2π. Temeljni period ovisi o funkciji g, može biti manji od 2π ili čak ne postojati.

8. A. $T = 2\sqrt{\pi}$.

B. $T = \pi$

C. $T = \pi$. Da se period nije smanjio, lako se možemo uvjeriti promatrajući jednadžbu $f(x) = 0$.

D. $T = \pi$. Transformiraj umnožak sinusa u razliku kosinusa.

E. $T = 12\pi$.

F. Nije periodička.

G. $T = \pi\sqrt{2}$.

H. Periodička je ukoliko su a, b i c sumjerljivi. $T = k_1 a = k_2 b = k_3 c$ za neke prirodne brojeve k_1, k_2, k_3, ako takvi postoje.

10. *Naputak.* Izaberi a tako da bude $a^T = k$ i promotri funkciju $g(x) := a^{T-x} f(x)$.

11. *Naputak.* Izvedi formulu za f_p i f_n.

12. Primijeni prethodni zadatak.

1.2. Trigonometrijski Fourierov red

Promatrat ćemo sinusoide s cjelobrojnim harmonicima (frekvencijama):

$$\frac{1}{2}, \quad \cos x, \quad \sin x, \ldots, \quad \cos nx, \quad \sin nx, \ldots$$

Kako je $2\pi/n$ period od $\cos nx$ i od $\sin nx$, onda je 2π zajednički period svih ovih funkcija. Prema tome je

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

periodična funkcija s periodom 2π. Također, ako red

$$f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.5}$$

konvergira, on definira periodičnu funkciju f perioda 2π. Ovaj red se naziva **(trigonometrijski) Fourierov red** za funkciju f.

Osnovni problemi koje ćemo proučavati su

1. Ako je f periodična s periodom 2π, kada će postojati njezin Fourierov red?
2. Ako postoji Fourierov red od f oblika (1.5), kako se računaju koeficijenti a_n, b_n?
3. U kojem smislu Fourierov red aproksimira funkciju f?

Odgovorit ćemo najprije na pitanje 2.

Računanje koeficijenata a_n i b_n zasniva se na svojstvu ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija.

Ortogonalnost trigonometrijskih funkcija

Za funkcije f, $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ kažemo da su **ortogonalne** na intervalu $[a,b]$ ako vrijedi

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{1.6}$$

Sljedeću lemu provjerite neposrednim integriranjem. Pri računanju integrala koristite se formulama (koje vrijede i u slučaju $m = n$):

$$\sin mx \sin nx = \frac{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x}{2},$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x}{2},$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{2}.$$

Lema 1. *Trigonometrijski sustav:* $\frac{1}{2}$, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x, \ldots$ *ortogonalan je na intervalu* $[-\pi, \pi]$. *Vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi, & n = 0, \\ 0, & n > 0, \end{cases} \\
&\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \mathrm{d}x = 0, \\
&\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, \sin nx \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi\,, & m = n, \end{cases} \\
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, \cos nx \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi\,, & m = n, \end{cases} \\
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, \sin nx \, \mathrm{d}x = 0.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Računanje koeficijenata trigonometrijskog Fourierovog reda. Relacije (1.7) omogućavaju nam odrediti koeficijente Fourierovog reda. Neka je

$$f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \tag{1.8}$$

Tada integriranjem dobivamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = a_0 \pi + \sum_{m=1}^{\infty} \Big[a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, \mathrm{d}x + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, \mathrm{d}x \Big] = a_0 \pi$$

pri čemu smo zamijenili poredak sumiranja i integriranja i iskoristili relacije (1.7). Analogno, množenjem relacije (1.8) s $\cos nx$ i potom integriranjem, uz pomoć relacija (1.7) dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \cos nx \, \mathrm{d}x &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \mathrm{d}x \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \Big[a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, \cos nx \, \mathrm{d}x + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, \cos nx \, \mathrm{d}x \Big] = a_n \pi
\end{aligned}$$

Na sličan način imamo i

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \sin nx \, \mathrm{d}x &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \mathrm{d}x \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \Big[a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, \sin nx \, \mathrm{d}x + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, \sin nx \, \mathrm{d}x \Big] = b_n \pi
\end{aligned}$$

Ovakav izvod formula za koeficijente reda dao je Euler[1] 1777. god. i one se stoga ponekad nazivaju **Eulerove formule**. Zasad nemamo opravdanja za postupak zamjene integriranja i sumiranja u tom izvodu. Više o tome govorit ćemo kasnije.

[1] Leonhard Euler (1707–1783), švicarski matematičar

Nadalje, čak i u slučaju kad postoji Fourierov red i kad je račun s formulom (1.8) korektan, nismo sigurni da će ta suma *predstavljati funkciju* f. Zaista, to općenito i neće biti slučaj. Stoga, dok ne pojasnimo detaljnije vezu između funkcije f i sume reda (1.8), tu ćemo sumu privremeno označavati drugim imenom.

Fourierov red

Fourierov red zadane funkcije f je red

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1.9}$$

kojemu se koeficijenti računaju formulama

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos n\xi\, \mathrm{d}\xi, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin n\xi\, \mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Koeficijenti a_0, a_1, b_1, a_2, $b_2, \ldots$ nazivaju se **Fourierovi koeficijenti** od f, dok se pribrojnici u formuli (1.9) zovu **harmonici**.
Vezu funkcije f i njezinog Fourierovog reda S označavamo ovako:

$$f(x) \sim S(x).$$

Postojanje i konvergencija Fourierovog reda

Kad će trigonometrijski Fourierov red biti jednak funkciji f? Dokazat ćemo da u (1.8) vrijedi jednakost za široku klasu funkcija važnih u primjenama. Opišimo tu klasu.

Kažemo da je funkcija $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ **po dijelovima neprekinuta** na intervalu $[a,b]$ ako je f neprekinuta na $[a,b]$, ili ima na tom intervalu samo konačno mnogo prekida. Tada postoje točke $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ takve da je f neprekinuta na intervalima (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \ldots, n$. Ako u djelišnim točkama postoje i konačni su jednostrani limesi

$$f(a+0), \quad f(x_i \pm 0), \ i = 1, \ldots, n-1, \quad f(b-0)$$

tada prekide nazivanmo **prekidima prve vrste**.

U točkama prekida x_i funkcija može imati bilo koju vrijednost.

Ukoliko su svi prekidi prekidi prve vrste, tada je po dijelovima neprekinuta funkcija $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ograničena na $[a,b]$, jer se na svakom podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ može proširiti do neprekinute funkcije. Zato je f i **apsolutno integrabilna** na $[a,b]$, tj. postoji i konačan je $\int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x$.

Kažemo da je funkcija **po dijelovima glatka** ako postoji rastav intervala $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ takav da je f neprekinuto diferencijabilna na svim intervalima (x_{i-1}, x_i). U ovom slučaju jednostrani limesi $f'(x_i \pm 0)$ ne moraju biti konačni.

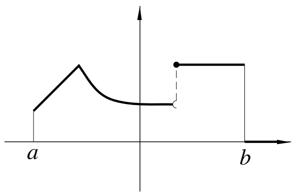
Dirichletovi uvjeti

Kažemo da f zadovoljava **Dirichletove uvjete** na intervalu $[a,b]$, ako vrijedi

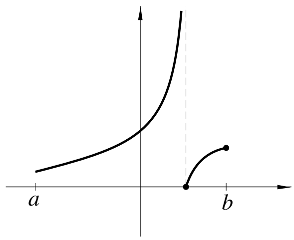
1) f je po dijelovima neprekinuta i njezini su prekidi prve vrste,

2) f je monotona ili ima najviše konačan broj strogih ekstrema.

Ako funkcija f zadovoljava Dirichletove uvjete, tada se interval $[a,b]$ može rastaviti na konačan broj podintervala na kojima je funkcija neprekinuta i monotona, a na rubovima podintervala ima konačne limese.



Sl. 1.8. Primjer funkcije koja zadovoljava Dirichletove uvjete



Sl. 1.9. Primjer funkcije koja ne zadovoljava Dirichletove uvjete

Odgovorimo sada na pitanje: kada postoji i čemu je jednaka suma Fourierovog reda periodične funkcije?

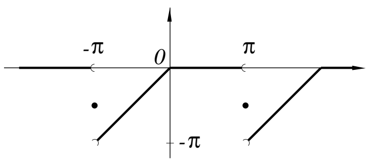
Konvergencija Fourierovog reda

Teorem 2. *Neka je f po dijelovima glatka periodična funkcija s periodom 2π koja zadovoljava Dirichletove uvjete. Tada njezin Fourierov red konvergira u svakoj točki $x \in [-\pi,\pi]$ i za sumu $S(x)$ reda vrijedi:*

(i) $S(x) = f(x)$, *ako je f neprekinuta u točki x*

(ii) $S(x) = \frac{1}{2}\big[f(x-0)+f(x+0)\big]$, *ako je x točka prekida za f.*

Primjer 6. Periodičnu funkciju f s periodom 2π, zadanu slikom 1.10, razvijmo u Fourierov red.



Sl. 1.10.

$\triangleright$ Funkcija f zadovoljava Dirichletove uvjete. Također, vrijedi $f(x) = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ za svaki $x \in \mathbf{R}$. Zato će se ona podudarati sa svojim Fourierovim redom u svakoj točki. Vrijedi

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & -\pi < x < 0, \\ 0, & 0 \leqslant x < \pi, \end{cases}$$

te je njezin period $T = 2\pi$. Zato

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\,,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,\cos nx\,\mathrm{d}x\,.$$

Integral računamo parcijalnom integracijom. Dobivamo

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi}\big(1 - \cos n\pi\big)\,, \qquad n \geqslant 1\,.$$

Iz

$$\cos n\pi = (-1)^n = \begin{cases} 1\,, & \text{za parni } n \\ -1\,, & \text{za neparni } n \end{cases}$$

zaključujemo da su svi koeficijenti a_n s parnim indeksom jednaki nuli:

$$a_{2n} = 0\,, \qquad a_{2n+1} = \frac{2}{(2n+1)^2\pi}\,.$$

Nadalje,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,\sin nx\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,.$$

Prema tome,

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) + \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right). \quad \triangleleft$$

Fourierov red periodične funkcije

Neka je sada funkcija f periodična s periodom $T = 2L$. Onda je funkcija $g(x) = f\,(\frac{T}{2\pi}x)$ periodična s periodom 2π:

$$g(x + 2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}x + T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = g(x)\,.$$

Da bismo odredili Fourierov red za funkciju f, napisat ćemo najprije Fourierov red za funkciju g, i zatim iskoristiti vezu

$$f(x) = g\left(\frac{2\pi x}{T}\right) = g\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

Tako iz (1.10) dobivamo

$$f(x) = g\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\,\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\,\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{1.11}$$

Koeficijente računamo formulama

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L\xi}{\pi}\right)\mathrm{d}\xi = \left[\begin{array}{c} L\xi/\pi = x \\ \mathrm{d}\xi = \pi/L\,\mathrm{d}x \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\,\cos n\xi\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L\xi}{\pi}\right)\cos n\xi\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\,\sin n\xi\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L\xi}{\pi}\right)\sin n\xi\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

Ove formule izvedene su za slučaj kad periodičnu funkciju promatramo na *simetričnom* intervalu $[-L, L]$ duljine perioda. Napišimo sad i formule za najopćenitiji slučaj, kad funkciju promatramo na bilo kojem intervalu $[a, b]$ duljine T.

Trigonometrijski Fourierov red

Trigonometrijski Fourierov red za funkciju f periodičnu s periodom $T = b - a$ glasi:

$$
f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}\right). \tag{1.13}
$$

Koeficijenti se računaju formulama

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\,\cos\frac{2n\pi x}{T}\,\mathrm{d}x\,, \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\,\sin\frac{2n\pi x}{T}\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

Primjer 7. Funkciju $f(x) = x$ razvij u Fourierov red na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

▷ Period iznosi $T = 1$. Koeficijente računamo po formuli (1.14):

$$
a_0 = \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 1\,.
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\,\cos\frac{2n\pi x}{T}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\cos(2n\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} u = x & \mathrm{d}v = \cos(2n\pi x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = \dfrac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi} \end{bmatrix} \\
&= 2\left(x\cdot\frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi}\bigg|_0^1 - \frac{1}{2n\pi}\int_0^1 \sin(2n\pi x)\,\mathrm{d}x \right) = 0\,. \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\,\sin\frac{2n\pi x}{T}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\sin(2n\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} u = x & \mathrm{d}v = \sin(2n\pi x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = -\dfrac{\cos(2n\pi x)}{2n\pi} \end{bmatrix} \\
&= 2\left(-x\cdot\frac{\cos(2n\pi x)}{2n\pi}\bigg|_0^1 + \frac{1}{2n\pi}\int_0^1 \cos(2n\pi x)\,\mathrm{d}x \right) = -\frac{1}{n\pi}
\end{aligned}
$$

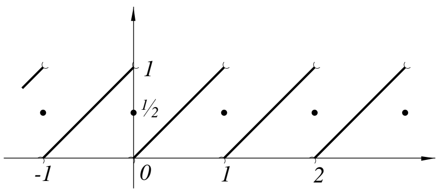
Zato je

$$
S(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}\,\sin(2n\pi x)
$$

i vrijedi

$$
S(x) = \begin{cases} f(x)\,, & \text{za } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2}\left[f(+0) + f(1-0)\right] = \frac{1}{2}\,, & \text{za } x = 0 \text{ i } x = 1. \end{cases}
$$

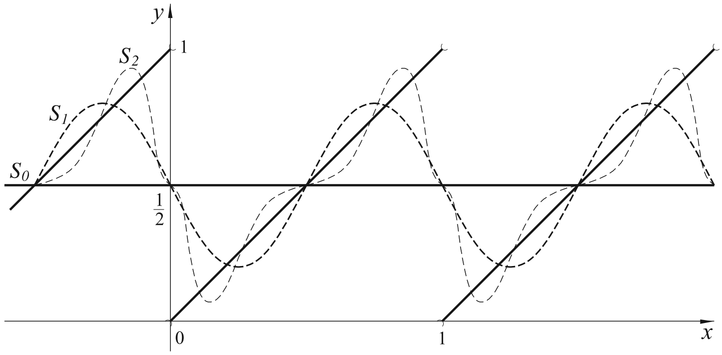
Graf Fourierovog reda S dan je na slici 1.11.



Sl. 1.11. Fourierov red funkcije iz Primjera 7 predstavlja periodično proširenje funkcije f. Obrati pozornost na vrijednost u točkama prekida.

Nekoliko prvih parcijalnih suma tog reda glasi

$$
\begin{aligned}
S_0 &= \frac{1}{2}\,, \\
S_1 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\,\sin(2\pi x)\,, \\
S_2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\,\sin(2\pi x) - \frac{1}{2\pi}\,\sin(4\pi x)\,. \quad \triangleleft
\end{aligned}
$$



Sl. 1.12. Aproksimacija funkcije s prve tri parcijalne sume njezinog Fourierovog reda.

Fourierov red parnih i neparnih funkcija

Ako je funkcija f, definirana na simetričnom intervalu $[-L, L]$, parna, odnosno neparna, tada će njezin Fourierov red sadržavati samo kosinus, odnosno sinus članove:

Fourierov red parnih i neparnih funkcija

1. Ako je $f(-x) = f(x)$ za svaki x, tj. f parna funkcija, tada je $b_n = 0$ za svaki n, jer je odgovarajuća podintegralna funkcija u formuli (1.12) neparna. Njezin Fourierov red glasi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}. \tag{1.15}$$

Koeficijenti uz kosinus funkcije računaju se formulama

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \,\mathrm{d}x, \quad n \geqslant 0. \tag{1.16}$$

2. Ako je $f(-x) = -f(x)$ za svaki x, tj. ako je f neparna funkcija, tada zbog istih razloga vrijedi $a_n = 0$ za svaki n. Fourierov red glasi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \tag{1.17}$$

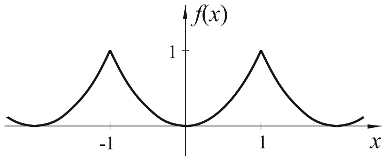
a koeficijenti se računaju formulama

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \,\mathrm{d}x, \quad n \geqslant 1. \tag{1.18}$$

Kažemo da smo funkciju f razvili u Fourierov red po kosinus, odnosno sinus funkcijama.

Primjer 8. Razvij u Fourierov red funkciju definiranu na intervalu $[-1,1]$ formulom $f(x)=x^2$ (slika 1.13).

Sl. 1.13. Fourierov red parne funkcije sadržavat će samo kosinus članove.



▷ Funkcija f je parna. Vrijedi $L=1$. Po formuli (1.16) dobivamo koeficijente

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 x^2\,\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

Nakon uzastopne parcijalne integracije dobivamo

$$a_n=\frac{4}{\pi^2 n^2}(-1)^n.$$

Prema tome, Fourierov red funkcije f glasi

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x\\ &=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\Big(\cos\pi x-\frac{\cos 2\pi x}{2^2}+\frac{\cos 3\pi x}{3^2}-\dots\Big) \end{aligned}$$ ◁

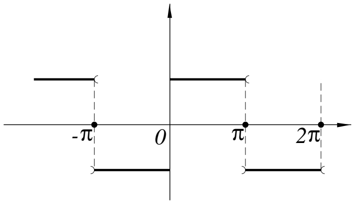
⋆ ⋆ ⋆

Ako je funkcija f u početku definirana na intervalu $[0,L]$, možemo je razviti u red samo po kosinus, odnosno samo po sinus funkcijama tako da je nadopunimo na intervalu $[-L,0]$ do parne, odnosno neparne funkcije. Pritom će njezin period iznositi $T=2L$, i takva dva proširenja će se, jasno, razlikovati na intervalu $[-L,0]$.

Ilustrirajmo to u sljedeća dva primjera.

Primjer 9. Funkciju $f(x)=\dfrac{\pi}{4}$ razvij u Fourierov red na intervalu $\langle 0,\pi\rangle$ po sinus funkcijama. Pomoću dobivenog razvoja sumiraj redove

A. $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dots;$ **B.** $1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}-\dots.$



Sl. 1.14. Fourierov red neparne funkcije sadržavat će samo neparne članove.

▷ Računamo po formuli (1.18):

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi}{4}\,\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n}\left[\,1-(-1)^n\,\right].$$

Dakle, $b_{2n} = 0$, $b_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$. Zato

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n{+}1)x}{2n+1} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots\,, \qquad 0 < x < \pi.$$

Specijalno, za $x = \pi/2$ dobivamo

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$$

Za $x = \pi/3$ dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{5}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) + \frac{1}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{9}\cdot 0 + \dots \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \dots\right), \quad \triangleleft\end{aligned}$$

i suma reda pod **B.** iznosi $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Primjer 10. Funkciju $f(x) = x$ razvij u intervalu $[0, \pi]$

A. po kosinus funkcijama; **B.** po sinus funkcijama.

Koristeći razvoj u **A.** izračunaj sumu reda $1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dots$

▷ **A.** Funkcija se može proširiti na simetričan interval $[-\pi, \pi]$ tako da bude bilo parna, bilo neparna. Proširimo je do parne funkcije. Tada je poluperiod $L = \pi$ i po (1.16) imamo

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,\mathrm{d}x = \pi\,,$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\cos nx\,dx\\
&= \frac{2}{\pi}\left(x\,\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right)\\
&= \frac{2}{n^2\pi}\,\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\,\pi}\,[\cos n\pi - 1].
\end{aligned}$$

Dakle,

$$a_{2n} = 0\,, \qquad a_{2n+1} = -\frac{4}{(2n+1)^2\,\pi}\,.$$

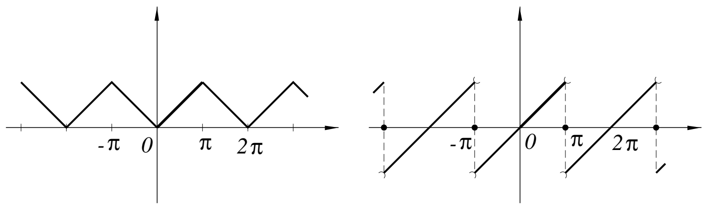
Tako smo dobili:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\,\cos(2n+1)x\,, \qquad 0 \leqslant x < \pi. \tag{1.19}$$

Na intervalu $[-\pi, 0]$ ovaj red predstavlja funkciju $-x$. Na slici 1.15 (lijevo), nacrtan je graf dobivenog Fourierovog reda.

Stavljajući u (1.19) $x = 0$, dobivamo

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}\,.$$



Sl. 1.15. Parno periodično proširenje funkcije $f(x) = x$ (lijevo) i njezino neparno proširenje (desno).

B. Po formuli (1.18),

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\sin nx\,dx\\
&= \frac{2}{\pi}\left(-x\,\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)\\
&= -\frac{2}{n}\cos n\pi = \frac{2}{\pi}\,(-1)^{n+1}\,.
\end{aligned}$$

te je

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\sin nx\,, \qquad 0 < x < \pi\,.$$

Ovaj trigonometrijski red predstavlja funkciju nacrtanu na slici 1.15 (desno). ◁