1.

Vektorske funkcije skalarnog argumenta

Vektorska analiza proučava vektorske funkcije, odnosno funkcije čije su vrijednosti vektori. Definicije neprekinutosti, limesa, derivacije i integrala vektorske funkcije, te njihova svojstva, vrlo su slična odgovarajućim definicijama skalarnih funkcija realnih varijabli. Zbog toga se preporuča čitatelju da se podsjeti tog gradiva iz Matematike 1 i Matematike 2. U prvom poglavlju bavit ćemo se vektorskim funkcijama jedne realne varijable, a u drugom poglavlju bit će više riječi o vektorskim funkcijama dviju ili triju varijabli, takozvanim vektorskim poljima.

1.1. Vektorske funkcije skalarnog argumenta

Sa oznakama $\mathbf{V}^1$, $\mathbf{V}^2$, odnosno $\mathbf{V}^3$, označavamo vektorske prostore svih vektora na pravcu, u ravnini, odnosno u prostoru. *Kanonsku bazu* u prostoru $\mathbf{V}^3$ čine vektori:

$$\mathbf{i} = \overrightarrow{OT}_1, \quad \mathbf{j} = \overrightarrow{OT}_2, \quad \mathbf{k} = \overrightarrow{OT}_3,$$

gdje su:

$$T_1 = (1,0,0), \quad T_2 = (0,1,0), \quad T_3 = (0,0,1), \quad O = (0,0,0).$$

Kao što znamo, svaki vektor $\mathbf{a}$ iz vektorskog prostora $\mathbf{V}^3$ u ovoj bazi ima jednoznačan prikaz

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.$$

Definicija 1. **Vektorske funkcije skalarnog argumenta** su funkcije sa intervala $I = [a,b] \subseteq \mathbf{R}$ u vektorski prostor $\mathbf{V^n}$ ($n = 1,2,3$), odnosno $\mathbf{r} : I \to \mathbf{V^n}$.

Uobičajeno je za vektorske funkcije skalarnog argumenta, u slučaju $n = 3$, koristiti oznaku

$$\mathbf{r}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}, \quad t \in I = [a,b],$$

ili

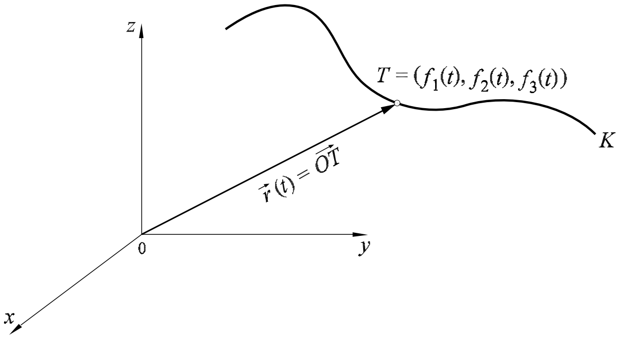
$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in I = [a,b].$$

Dakle, zadavanje vektorske funkcije skalarnog argumenta znači zadavanje triju realnih funkcija $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ (odnosno $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$). Funkcije $f_1(t)$, $f_2(t)$ i $f_3(t)$ zovemo **skalarnim komponentama** vektorske funkcije $\mathbf{r}(t)$.

Skup

$$K = \{(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) : \quad t \in [a,b]\}$$

zovemo **graf** vektorske funkcije $\mathbf{r}(t)$. Graf vektorske funkcije je skup u prostoru koji opisuje vrh radijvektora $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OT} = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}, \quad t \in [a,b]$.



Sl. 1.

Primjer 1. Za zadani vektor $\mathbf{a}$ vektorsku funkciju

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}, \quad t \in [a,b],$$

nazivamo konstantom. Za svako $t \in [a,b]$ vrijednosti te funkcije su uvijek jednake vektoru $\mathbf{a}$.

Primjer 2. Neka su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ linearno nezavisni vektori.

a) Graf vektorske funkcije $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$, $t \in \mathbf{R}$ je pravac.

b) Graf vektorske funkcije $\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $t \in [0,1]$ je segment.

a) Skalarni zapis ove funkcije je

$$\begin{aligned} x &= b_1 t + a_1, \\ y &= b_2 t + a_2, \qquad t \in \mathbf{R}, \\ z &= b_3 t + a_3, \end{aligned}$$

ili u kanonskom obliku

$$\frac{x - a_1}{b_1} = \frac{y - a_2}{b_2} = \frac{z - a_3}{b_3} = t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Ove jednadžbe predstavljaju parametarski, odnosno kanonski oblik jednadžbe pravca koji prolazi točkom $A = (a_1, a_2, a_3)$, a vektor smjera mu je vektor $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$.

b) Neka su A i B točke za koje je $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $O = (0,0,0)$. Ako je točka T na spojnici točaka A i B onda za vektor $\overrightarrow{OT}$ vrijedi

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT}.$$

Vektor $\overrightarrow{AT}$ je kolinearan s vektorom $\overrightarrow{AB}$, te vrijedi

$$\overrightarrow{AT} = t\overrightarrow{AB} = t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad t \in [0,1].$$

Zbog toga je

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OT} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1-t)\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}, \quad t \in [0,1],$$

odnosno

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}, \quad t \in [0,1].$$

Za ovu jednadžbu kažemo da je jednadžba segmenta $\overline{AB}$.

Primjer 3. Vektorska funkcija

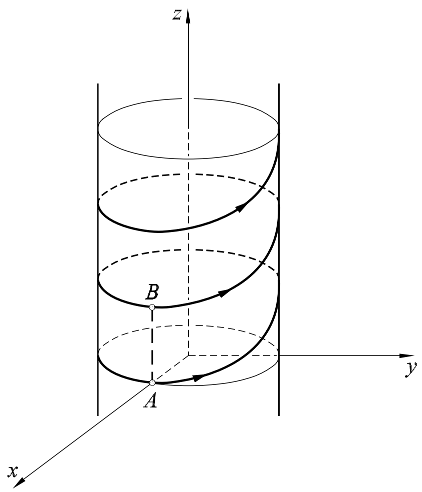
$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j} + (bt)\mathbf{k}, \quad t \in \mathbf{R},$$

gdje su a i b zadani realni brojevi, ima kao vrijednosti radij vektore čiji vrhovi u prostoru opisuju spiralu (helikoida). Spirala leži na valjkastoj plohi sa središtem u ishodištu. Izvodnice te plohe su paralelne sa z-osi.

Skalarni zapis ove funkcije je oblika

$$\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= a\sin t, \quad t \in \mathbf{R}. \\ z &= bt, \end{aligned}$$

Iz prve dvije jednadžbe slijedi da za sve točke na grafu ove funkcije vrijedi $x^2 + y^2 = a^2$. To je upravo jednadžba valjka na kojem leži graf naše vektorske funkcije. Za $t = 0$ dobiva se točka $A = (a,0,0)$, a za $t = 2\pi$ dobivamo točku $B = (a,0,2\pi)$. Luk $\widehat{AB}$ na valjku je prvi zavoj spirale. Za $t < 0$ dobivaju se točke spirale na zavojima koji su u donjem potprostoru $z < 0$.



Sl. 2.

1.2. Limes vektorske funkcije

Definicija 2. Neka je vektorska funkcija $\mathbf{r}(t)$ definirana na intervalu I osim možda u točki $t_0 \in I$. **Limes** vektorske funkcije $\mathbf{r}(t)$ u točki t_0 je vektor $\mathbf{a}$ za koji vrijedi

$$\lim_{t \to t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = 0.$$

U tom slučaju pišemo $\mathbf{a} = \lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t)$.

Oznaka $|\cdot|$ je uobičajena oznaka za *normu (duljinu) vektora*. Primijetimo da se definicija limesa vektorske funkcije može iskazati i ovako: vektorska funkcija $\mathbf{r}(t)$ ima limes $\mathbf{a}$ u točki $t_0 \in I$ ako nenegativna realna funkcija

$$t \to |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = \sqrt{(f_1(t) - a_1)^2 + (f_2(t) - a_2)^2 + (f_3(t) - a_3)^2}$$

ima limes 0 kad $t \to t_0$.

Teorem 1. *Neka je* $\mathbf{r}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$ *i* $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$. *Tada je* $\mathbf{a} = \lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t)$ *onda i samo onda ako je*

$$a_1 = \lim_{t \to t_0} f_1(t), \quad a_2 = \lim_{t \to t_0} f_2(t), \quad a_3 = \lim_{t \to t_0} f_3(t). \tag{1}$$

Dokaz: Vrijedi sljedeći niz ekvivalencija:

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a} \iff$$

$$\iff \lim_{t \to t_0} \sqrt{(f_1(t) - a_1)^2 + (f_2(t) - a_2)^2 + (f_3(t) - a_3)^2} = 0$$

$$\iff \big(a_1 = \lim_{t \to t_0} f_1(t), \quad a_2 = \lim_{t \to t_0} f_2(t), \quad a_3 = \lim_{t \to t_0} f_3(t)\big).$$

Ovaj teorem kaže da se računanje limesa vektorske funkcije svodi na računanje limesa njegovih komponenti, a to su realne funkcije realne varijable. Dakle,

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to t_0}\big(f_1(t)\mathbf{i}+f_2(t)\mathbf{j}+f_3(t)\mathbf{k}\big) \\
=\ &\big(\lim_{t\to t_0} f_1(t)\big)\mathbf{i}+\big(\lim_{t\to t_0} f_2(t)\big)\mathbf{j}+\big(\lim_{t\to t_0} f_3(t)\big)\mathbf{k}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Ova formula omogućava da se za limes vektorskih funkcija dokažu teoremi analogni teoremima za limes skalarnih funkcija.

Primjer 4. Izračunajmo $\lim_{t\to 0}\mathbf{r}(t)$ ako je

$$\mathbf{r}(t)=(\cos(t+\pi))\mathbf{i}+(\sin(t+\pi))\mathbf{j}+e^{-t^2}\mathbf{k}.$$

Prema gornjem teoremu vrijedi

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\mathbf{r}(t) &= \big[\lim_{t\to 0}\cos(t+\pi)\big]\mathbf{i}+\big[\lim_{t\to 0}\sin(t+\pi)\big]\mathbf{j}+\big[\lim_{t\to 0}e^{-t^2}\big]\mathbf{k} \\
&= -\mathbf{i}+\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Dokažimo sljedeću tvrdnju (implikaciju):

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{r}(t)=\mathbf{a}\Longrightarrow \lim_{t\to t_0}|\mathbf{r}(t)|=|\mathbf{a}|. \qquad (3)$$

Dokaz: Za norme vektora vrijedi relacija (nejednakost) trokuta:

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|\le|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|.$$

Primijenjujući tu nejednakost na vektor $\mathbf{x}=(\mathbf{x}-\mathbf{y})+\mathbf{y}$ dobivamo

$$|\mathbf{x}|=|(\mathbf{x}-\mathbf{y})+\mathbf{y}|\le|\mathbf{x}-\mathbf{y}|+|\mathbf{y}|,$$

odnosno

$$|\mathbf{x}|-|\mathbf{y}|\le|\mathbf{x}-\mathbf{y}|.$$

Sličnim postupkom dobivamo

$$|\mathbf{y}|=|(\mathbf{y}-\mathbf{x})+\mathbf{x}|\le|\mathbf{y}-\mathbf{x}|+|\mathbf{x}|=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|+|\mathbf{x}|,$$

odnosno

$$|\mathbf{y}|-|\mathbf{x}|=-\big(|\mathbf{x}|-|\mathbf{y}|\big)\le|\mathbf{x}-\mathbf{y}|,$$

što zajedno daje

$$||\mathbf{x}|-|\mathbf{y}||\le|\mathbf{x}-\mathbf{y}|.$$

Primjenom ove nejednakosti imamo

$$0\le||\mathbf{r}(t)|-|\mathbf{a}||\le|\mathbf{r}(t)-\mathbf{a}|.$$

Kako je po pretpostavci $\lim_{t\to t_0}|\mathbf{r}(t)-\mathbf{a}|=0$, onda slijedi

$$\lim_{t\to t_0}||\mathbf{r}(t)|-|\mathbf{a}||=0.$$

Iz ove jednakosti slijedi naša tvrdnja.

Obrazložite zašto ne vrijedi obrat dokazane tvrdnje!

Vektorske funkcije na prirodan način zbrajamo, množimo skalarom, množimo skalarno ili vektorski, množimo skalarnom funkcijom. Ako su $\mathbf{r}_1(t)$ i $\mathbf{r}_2(t)$ vektorske funkcije, $\lambda \in \mathbf{R}$ i $u(t)$ realna funkcija, onda definiramo:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{r}_1 \pm \mathbf{r}_2)(t) &:= \mathbf{r}_1(t) \pm \mathbf{r}_2(t),\\
(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)(t) &:= \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t),\\
(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)(t) &:= \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t),\\
(\lambda \mathbf{r}_1)(t) &:= \lambda \mathbf{r}_1(t),\\
(u \cdot \mathbf{r}_1)(t) &:= u(t)\mathbf{r}_1(t).
\end{aligned}$$

Teorem 2. *Pretpostavimo da za vektorske funkcije $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$ i skalarnu funkciju $u(t)$ postoje limesi*

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{a}, \quad \lim_{t\to t_0} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{b}, \quad \lim_{t\to t_0} u(t) = A.$$

Tada vrijedi

1. $\lim_{t\to t_0} (\mathbf{r}_1(t) \pm \mathbf{r}_2(t)) = \mathbf{a} \pm \mathbf{b}$,
2. $\lim_{t\to t_0} k\mathbf{r}_1(t) = k\mathbf{a}, \quad k \in \mathbf{R}$,
3. $\lim_{t\to t_0} (u(t)\mathbf{r}_1(t)) = A\,\mathbf{a}$,
4. $\lim_{t\to t_0} (\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$,
5. $\lim_{t\to t_0} (\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Dokaz. Svako od navedenih svojstava limesa lako je dokazati primjenom nejednakosti trokuta, te svojstava skalarnog i vektorskog umnoška. Ilustrirajmo to na prvoj, trećoj i petoj tvrdnji:

1.

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t) - (\mathbf{a} + \mathbf{b})| = |(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{a}) + (\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{b})|\\
\leq\ &|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{a}| + |\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{b}| \to 0 \qquad \text{kad } t \to t_0.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
&|u(t)\mathbf{r}_1(t) - A\mathbf{a}| = |u(t)\mathbf{r}_1(t) + u(t)\mathbf{a} - u(t)\mathbf{a} - A\mathbf{a}|\\
\leq\ &|u(t)||\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{a}| + |u(t) - A||\mathbf{a}| \to 0 \qquad \text{kad } t \to t_0.
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{a} \times \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{a} \times \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{a} \times \mathbf{b}|\\
=\ &|(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{a}) \times \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{a} \times (\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{b})|\\
\leq\ &|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{a}||\mathbf{r}_2(t)| + |\mathbf{a}||\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{b}| \to 0 \qquad \text{kad } t \to t_0
\end{aligned}$$

Neprekinutost vektorske funkcije

Definicija 3. Za vektorsku funkciju $\mathbf{r}(t)$ kažemo da je **neprekinuta** u točki t_0 ako je

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0). \tag{4}$$

Vektorska funkcija $\mathbf{r}(t)$ je neprekinuta na intervalu I ako je neprekinuta u svakoj točki intervala I.

Iz teorema 1 slijedi da je vektorska funkcija neprekinuta onda i samo onda ako su njezine komponente neprekinute. Nadalje, iz svojstava limesa vektorskih funkcija lagano se dokazuje da su zbroj, razlika, skalarni i vektorski umnožak neprekinutih vektorskih funkcija također neprekinute funkcije.

1.3. Derivacija vektorske funkcije

Definicija 4. Za vektorsku funkciju $\mathbf{r}(t)$ kažemo da je **derivabilna** u točki t ako postoji vektor

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}.$$

Taj vektor nazivamo derivacija vektorske funkcije $\mathbf{r}(t)$ u točki t i označavamo s

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}. \tag{5}$$

Kažemo da $\mathbf{r}(t)$ ima derivaciju $\mathbf{r}'(t)$ na intervalu I, ako je ona derivabilna u svakoj točki intervala I.

Ako je $\mathbf{r}'(t)$ derivabilna na intervalu I, onda možemo definirati drugu derivaciju $\mathbf{r}''(t)$ itd.

Dokažimo da se derivacija vektorske funkcije $\mathbf{r}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$ može računati pomoću derivacija njezinih komponenti, tj. da vrijedi:

$$\mathbf{r}'(t) = f_1'(t)\mathbf{i} + f_2'(t)\mathbf{j} + f_3'(t)\mathbf{k}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h} \\
&= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f_1(t+h)-f_1(t)}{h}\right)\mathbf{i} + \left(\lim_{h\to 0} \frac{f_2(t+h)-f_2(t)}{h}\right)\mathbf{j} \\
&\quad + \left(\lim_{h\to 0} \frac{f_3(t+h)-f_3(t)}{h}\right)\mathbf{k} \\
&= f_1'(t)\mathbf{i} + f_2'(t)\mathbf{j} + f_3'(t)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Po analogiji s diferencijalom realne funkcije definiramo prvi diferencijal vektorske funkcije. Diferencijal $d\mathbf{r}(t)$ vektorske funkcije $\mathbf{r}$ je

$$d\mathbf{r}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}dt = \mathbf{r}'(t)dt, \tag{6}$$

odnosno ako je $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, onda je diferencijal

$$d\mathbf{r}(t) = \left[x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}\right] dt = (dx(t))\mathbf{i} + (dy(t))\mathbf{j} + (dz(t))\mathbf{k}. \tag{7}$$

Primjer 5. Za vektorsku funkciju $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{t+1}\mathbf{j} - e^t\mathbf{k}$ izračunajmo
a) domenu, b) $\mathbf{r}(0)$, c) $\mathbf{r}'(t)$, d) $\mathbf{r}'(0)$, e) $|\mathbf{r}(t)|$, f) $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)$, g) $\mathbf{r}''(t)$.

a) Da bi broj t bio u domeni vektorske funkcije $\mathbf{r}(t)$ nužno je da je on u domeni njezinih komponenti. To znači da je domena od $\mathbf{r}$ interval $[-1, +\infty\rangle$,

b) $\mathbf{r}(0) = 0\mathbf{i} + \sqrt{0+1}\mathbf{j} - e^0\mathbf{k} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$,

c) $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{t+1}}\mathbf{j} - e^t\mathbf{k}$,

d) $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{0+1}}\mathbf{j} - e^0\mathbf{k} = \mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} - \mathbf{k}$,

e) $|\mathbf{r}(t)| = \sqrt{t^2 + (\sqrt{t+1})^2 + (e^t)^2} = \sqrt{t^2+t+1+e^{2t}}$,

f) $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t) = \left(t\mathbf{i} + \sqrt{t+1}\mathbf{j} - e^t\mathbf{k}\right)\cdot\left(\mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{t+1}}\mathbf{j} - e^t\mathbf{k}\right) = t + \frac{1}{2} - e^{2t}$,

g) $\mathbf{r}''(t) = -\frac{1}{4}\frac{1}{(\sqrt{t+1})^3}\mathbf{j} - e^t\mathbf{k}$.

Definicija 5. Vektorska funkcija $\mathbf{r} : I \to \mathbf{V}^3$ je klase C^n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) na otvorenom intervalu I ako u svakoj točki intervala I funkcija ima neprekinutu $n-$tu derivaciju.

Za vježbu pokušajte dokazati sljedeći teorem kojim se navode svojstva derivacije vektorske funkcije:

Teorem 3. *Neka su $\mathbf{r}_1(t)$ i $\mathbf{r}_2(t)$ vektorske funkcije klase C^1 i neka je $u(t)$ skalarna funkcija klase C^1. Tada vrijede sljedeća svojstva:*

1. *Ako je $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$, za svako $t \in I$ onda je $\mathbf{r}'(t) = 0$ i obratno, ako za vektorsku funkciju $\mathbf{r}(t)$ vrijedi $\mathbf{r}'(t) = 0$, za svako $t \in I$ onda je $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$ ($\mathbf{a}$ je konstantan vektor).*

2. $(\mathbf{r}_1(t) \pm \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}_1'(t) \pm \mathbf{r}_2'(t)$.

3. $(\lambda\mathbf{r}_1(t))' = \lambda\mathbf{r}_1'(t), \quad \lambda \in \mathbf{R}$.

4. $(\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}_1{}'(t)\cdot\mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2{}'(t)$.

5. $(\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}_1{}'(t)\times\mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2{}'(t)$.

6. $\dfrac{d}{dt}(u\mathbf{r}_1(t)) = u(t)\dfrac{d\mathbf{r}_1(t)}{dt} + \mathbf{r}_1(t)\dfrac{du(t)}{dt}$.

7. *Ako je* $u : J \to \mathbf{R}$ *realna funkcija klase* C^1 *na intervalu* J *i ako njena slika* $u(J)$ *leži u intervalu* I *na kojem je vektorska funkcija* $\mathbf{r}(t)$ *klase* C^1*, onda je definirana kompozicija* $\mathbf{r}\circ u$ *na* J*,* $\mathbf{r}\circ u$ *je klase* C^1 *i vrijedi*
$$(\mathbf{r}\circ u)'(t) = \mathbf{r}'(u(t))u'(t).$$

Primjer 6. Za vektorsku funkciju $\mathbf{r}(t)$ uvodimo sljedeću oznaku:
$$r(t) = |\mathbf{r}(t)| = \sqrt{(f_1(t))^2 + (f_2(t))^2 + (f_3(t))^2}.$$
Ako je $\mathbf{r}(t)$ derivabilna onda vrijede sljedeća svojstva:

a) $\mathbf{r}(t)\dfrac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = r(t)\dfrac{dr(t)}{dt}, \quad \mathbf{r}(t)\neq 0$,

b) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\mathbf{r}(t)}{r(t)}\right) = \dfrac{1}{r^3(t)}\left[\left(\mathbf{r}(t)\times\dfrac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right)\times\mathbf{r}(t)\right]$,

c) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\mathbf{r}(t)}{r(t)}\right)\cdot\dfrac{\mathbf{r}(t)}{r(t)} = 0$.

a) Deriviranjem relacije $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t) = |\mathbf{r}(t)|^2 = r^2(t)$ dobivamo
$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t)\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = 2r(t)\frac{dr(t)}{dt},$$
odakle slijedi tvrdnja.

b) Koristeći pravila deriviranja, jednakost a) i vektorski identitet $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ dobivamo
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}(t)}{r(t)}\right) &= \frac{1}{r(t)}\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} - \frac{1}{r^2(t)}\frac{dr(t)}{dr}\mathbf{r}(t)\\
&= \frac{1}{r^3(t)}\left[r^2(t)\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} - r(t)\frac{dr(t)}{dt}\mathbf{r}(t)\right]\\
&= \frac{1}{r^3(t)}\left[(\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t))\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} - \left(\mathbf{r}(t)\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right)\mathbf{r}(t)\right]\\
&= \frac{1}{r^3(t)}\left[\left(\mathbf{r}(t)\times\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right)\times\mathbf{r}(t)\right].
\end{aligned}$$

c) Ako je duljina vektorske funcije $\mathbf{r}(t)$ konstantna, onda je očito derivacija funkcije $r(t)$ jednaka nuli. Uočimo da za duljinu vektorske funkcije $\mathbf{v}(t) = \frac{\mathbf{r}(t)}{r(t)}$ vrijedi

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \left|\frac{\mathbf{r}(t)}{r(t)}\right| = \frac{1}{r(t)}|\mathbf{r}(t)| = \frac{r(t)}{r(t)} = 1,$$

tj. ona je konstanta. Sada, napišemo li za $\mathbf{v}(t)$ jednakost a), dobivamo

$$\mathbf{v}(t) \cdot \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = 1 \cdot \frac{d1}{dt} = 0,$$

odnosno $\mathbf{v}(t) \perp \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}$.

1.4. Integriranje vektorske funkcije

Definicija 6. Za funkciju

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in [a,b],$$

kažemo da je integrabilna na segmentu $[a,b]$ ako su skalarne komponente $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$ integrabilne na $[a,b]$. Tada definiramo

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \left(\int_a^b x(t)dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b y(t)dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b z(t)dt\right)\mathbf{k}. \tag{8}$$

Svojstva integrala su slična onima kao za realne funkcije. Navedimo ta svojstva.

1. $\displaystyle\int_a^b (\alpha\mathbf{r}_1(t) + \beta\mathbf{r}_2(t))\,dt = \alpha\int_a^b \mathbf{r}_1(t)dt + \beta\int_a^b \mathbf{r}_2(t)dt.$

2. $\displaystyle\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \int_a^c \mathbf{r}(t)dt + \int_c^b \mathbf{r}(t)dt.$

3. Ako je $\mathbf{r}(t)$ neprekinuta vektorska funkcija i $\mathbf{s}(t)$ njena primitivna funkcija tj. ona za koju vrijedi $\mathbf{s}'(t) = \mathbf{r}(t)$, onda je

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \mathbf{s}(b) - \mathbf{s}(a).$$

4. $\displaystyle\int_a^b \mathbf{c}\cdot\mathbf{r}(t)dt = \mathbf{c}\cdot\int_a^b \mathbf{r}(t)dt$, pri čemu je $\mathbf{c}$ konstantni vektor.

5. $\displaystyle\left|\int_a^b \mathbf{r}(t)dt\right| \le \int_a^b |\mathbf{r}(t)|\,dt.$

Prva četiri svojstva slijede neposredno. Dokažimo petu tvrdnju. Označimo vektor $\mathbf{c} = \int_a^b \mathbf{r}(t)dt$. Tada vrijedi

$$|\mathbf{c}|^2 = \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \int_a^b \mathbf{c}\cdot\mathbf{r}(t)dt \le \int_a^b |\mathbf{c}||\mathbf{r}(t)|dt = |\mathbf{c}|\int_a^b |\mathbf{r}(t)|\,dt,$$

pri čemu smo iskoristili poznatu nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakovski, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$. Kako je $|\mathbf{c}| \ne 0$, podijelimo li prethodnu nejednakost sa $|\mathbf{c}| \ne 0$, dobivamo

$$|\mathbf{c}| \le \int_a^b |\mathbf{r}(t)|\,dt,$$

čime je nejednakost dokazana. Ako je $\mathbf{c} = 0$ onda očito vrijedi jednakost.

1.5. Jordanov luk – jednostavna glatka krivulja

Neka je vektorska funkcija $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbf{V}^3$ neprekinuta na $[a,b]$ i neka je

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in [a,b].$$

Graf ove funkcije je krivulja

$$\mathscr{K} = \left\{(x(t),y(t),z(t)) \in \mathbf{R}^3 :\ t \in [a,b]\right\}.$$

Uređeni par $([a,b],\mathbf{r}(t))$ segmenta $[a,b]$ i vektorske funkcije $\mathbf{r}(t)$ zove se *parametrizacija krivulje* $\mathscr{K}$. U daljnjem izlaganju ćemo parametrizaciju krivulje $\mathscr{K}$ zapisivati ovako:

$$\mathscr{K}\ \ldots\ \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in [a,b],$$

ili po komponentama

$$\mathscr{K}\ \ldots\ x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \quad t \in [a,b].$$

Ove jednadžbe zovemo parametarskim jednadžbama krivulje $\mathscr{K}$.

Ako je $\mathscr{K} \subseteq \mathbf{R}^2$ onda govorimo o ravninskoj krivulji. Kratko kažemo da je krivulja neprekinuta slika intervala. Međutim, može se pokazati da na segmentu $I = [0,1]$ postoji neprekinuta vektorska funkcija $\mathbf{r}(t)$ takva da skup $\mathscr{K}$ ispunjava krug, nutrinu kvadrata, odnosno cijelu jediničnu kocku. Zato ćemo morati na funkciju $\mathbf{r}(t)$ staviti još neka ograničenja tako da skup $\mathscr{K}$ ne obuhvaća takve dvodimenzionalne ili trodimenzionalne skupove. Krivulja bi trebala biti ”jednodimenzionalna” jer nastaje iz intervala ”savijanjem bez kidanja”.

Primjer 7. Napisati jednu parametrizaciju krivulje $\mathscr{K}$ određene kao presjek ploha $x = z^2$ i $z = y^2$.

Ove plohe su valjkaste plohe čije su izvodnice paralelne sa $y-$osi, odnosno $x-$osi. Stavimo li $y(t) = t$, onda je $z(t) = t^2$ i $x(t) = t^4$, te je

$$\mathbf{r}(t) = t^4\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad t \in \langle -\infty, \infty\rangle,$$

parametrizacija presječne krivulje. Pokušajte skicirati presječnu krivulju!

Definicija 7. Za krivulju

$$\mathscr{K} \ldots \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in [a,b],$$

kažemo da je jednostavna glatka krivulja ili Jordanov luk ako vrijedi:

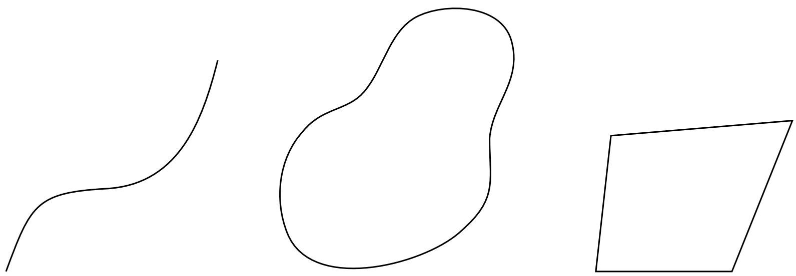
1. $\mathbf{r}(t)$ je bijekcija tj. $t_1 \neq t_2 \Longrightarrow \mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$.
2. Vektorska funkcija $\mathbf{r}(t)$ ima neprekinutu prvu derivaciju $\mathbf{r}'(t)$ za svako $t \in [a,b]$. Kraće kažemo da je krivulja $\mathscr{K}$ klase C^1.
3. $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, za svako $t \in [a,b]$.

Točke $A = (x(a), y(a), z(a))$ i $B = (x(b), y(b), z(b))$ zovu se rubne točke krivulje $\mathscr{K}$. Ako je $A = B$ tj. $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ onda krivulju zovemo zatvorenom krivuljom.

Vrlo je lako dati fizikalnu sliku jednostavne glatke krivulje. Zamislimo da se u prostoru giba neka čestica po krivulji $\mathscr{K}$ za vrijeme $t \in [a,b]$. Prvim uvjetom zahtijevamo da je $\mathbf{r}(t)$ bijekcija sa $[a,b]$ na $\mathscr{K}$, to znači da se točka nikad ne vraća u točku gdje je već bila tj. nema presijecanja. Iz drugog uvjeta vidimo da je gibanje neprekinuto i brzina ne mijenja naglo smjer, dok iz trećeg uvjeta vidimo da se točka stalno giba, ne stoji u istoj točki, tj. brzina je različita od nule.

Na primjer polukružnica $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, $t \in [0,\pi]$ je Jordanov luk. Kružnica $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, $t \in [0,2\pi]$ nastaje spajanjem dviju polukružnica koje čine zatvorenu Jordanovu krivulju.

Krivulja K je po dijelovima Jordanov luk (po dijelovima jednostavna glatka krivulja) ako se ona sastoji od jednostavnih glatkih krivulja koje se nastavljaju jedna na drugu i nema presijecanja. Dakle, postoji skup točaka $A, T_1, T_2, \ldots, T_n, B$ na K takav da su lukovi $\widehat{AT_1}, \widehat{T_1T_2}, \ldots, \widehat{T_nB}$ jednostavne glatke krivulje.



a) Jordanov luk b) zatvoreni Jordanov luk c) po dijelovima zatvoreni Jordanov luk

Sl. 3.

Objasnite zašto sinusoida nije po dijelovima jednostavna glatka krivulja, dok je dio sinusoide koji se nalazi u zatvorenom krugu po dijelovima Jordanov luk.

Primjer 8. Krivulja

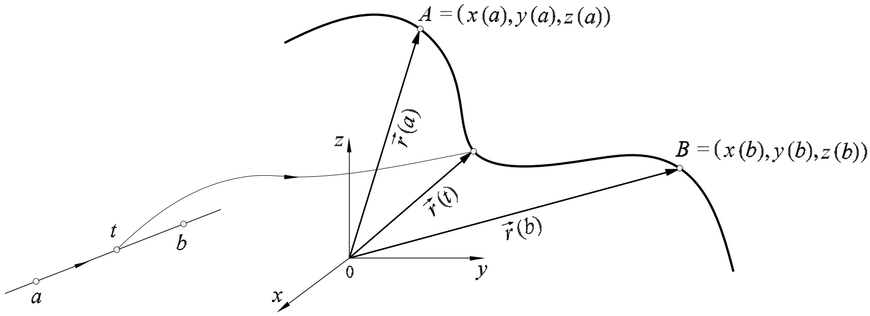
$$\mathscr{K} \ldots \mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} + bt\,\mathbf{k}, \quad t \in [0,2\pi]$$

je Jordanov luk.

Provjerimo tri uvjeta iz definicije Jordanovog luka.

1. $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2) \Longrightarrow bt_1 = bt_2 \Longrightarrow t_1 = t_2$.
2. Skalarne komponente $a\cos t$, $a\sin t$ i bt su klase C^1 na $[0, 2\pi]$, pa je i $\mathbf{r}(t)$ klase C^1.
3. $\mathbf{r}'(t) = (-a\sin t)\mathbf{i} + (a\cos t)\mathbf{j} + b\mathbf{k}$, $t \in [0, 2\pi]$, pa je $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ jer je komponenta uz $\mathbf{k}$ uvijek različita od nule.

Definicija 8. (Orijentacija krivulje). Neka je vektorska funkcija $\mathbf{r}(t)$ definirana na intervalu $I = [a, b] \subseteq \mathbf{R}$. Graf te funkcije je neka krivulja $\mathscr{K}$. Uređaj "$\leq$" sa intervala I prenosi se na krivulju $\mathscr{K}$ i tako dobivamo jednu njezinu orijentaciju. Naime, porastu parametra $t \in I$ odgovara jedan poredak točaka na $\mathscr{K}$ i obično na crtežu taj poredak naznačimo strelicom na grafu. Dualni uređaj "$\geq$" definira drugu orijentaciju na $\mathscr{K}$. Dvije krivulje kao skupovi mogu biti jednaki, ali su one različite ako su im orijentacije različite.



Sl. 4.

Sa $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ dana je orijentacija kružnice koja odgovara orijentaciji suprotno kretanju kazaljke na satu, a sa $\mathbf{r}(t) = -\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, orijentacija prema kretanju kazaljke na satu.

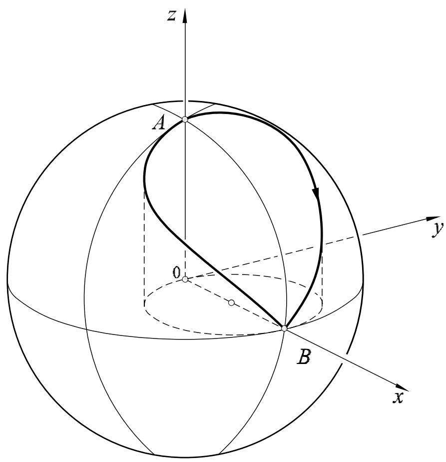
Primjer 9. Parametrizirajmo krivulju (Vivijanijeva krivulja) koja je određena kao presjek valjka $x^2 + y^2 = Rx$ i sfere u prvom oktantu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Kako se presječna krivulja nalazi na sferi, pogodno je prijeći u sferne koordinate

$$\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Jednadžbe ovog valjka i sfere u sfernim koordinatama su redom sljedećeg oblika: $r\sin\vartheta = R\cos\varphi$ i $r = R$. Parametrizacija dijela krivulje u prvom oktantu u skalarnim komponentama izgleda ovako (uz oznaku $t = \vartheta$):

$$\begin{aligned} x(t) &= R\sin^2 t \\ y(t) &= R\sin t\cos t \\ z(t) &= R\cos t, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{aligned}$$



Sl. 5.

Parametru $t = 0$ odgovara točka $A = (0, 0, R)$, a parametru $t = \frac{\pi}{2}$ odgovara točka $B = (R, 0, 0)$. Ako se parametar t mijenja od 0 do $\frac{\pi}{2}$, onda točke na luku krivulje putuju od A do B kao što je na slici označeno strelicom. Time smo dobili jednu moguću orijentaciju luka naše krivulje. Ako se parametar t mijenja od $\frac{\pi}{2}$ do 0, onda točke na luku krivulje putuju od B do A, što daje drugu (suprotnu) orijentaciju krivulje.

1.6. Tangenta na krivulju

Neka je krivulja $\mathscr{K}$ u prostoru zadana jednadžbom

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in I \subseteq \mathbf{R}.$$

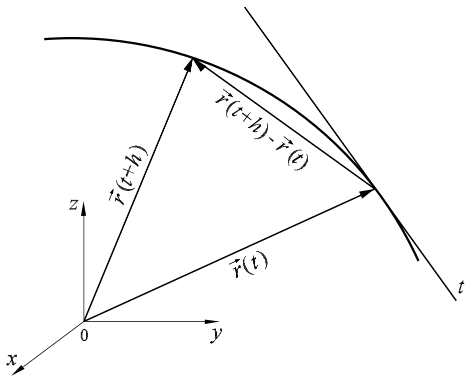
Pokušajmo geometrijski interpretirati derivaciju

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Po definiciji je

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}.$$

Ako je $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, onda za dovoljno malo h je $t+h$ blizu t i vektor $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ neće biti 0.



Sl. 6.

Kad h teži k 0, vektor $\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)$ se "približava" vektoru smjera tangente u točki s radijvektorom $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$, međutim granični vektor je 0, a on nema smjer. To možemo izbjeći tako da umjesto $\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)$ uzmemo vektor $\frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}$, koji za malo h ima veću duljinu nego $\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)$. Za svako $h \neq 0$, taj je vektor paralelan sa vektorom $\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)$, a kako je njegov limes

$$\mathbf{r}'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h},$$

koji po pretpostavci nije 0, taj se vektor može uzeti za vektor smjera tangente.

Definicija 9. Neka je dana krivulja

$$\mathcal{K}\ \ldots\ \mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k},\quad t\in I,$$

i neka je $\mathbf{r}(t)$ derivabilna. Vektor $\mathbf{r}'(t_0)$, ako nije 0, je vektor smjera tangente na krivulju $\mathcal{K}$ u točki $T_0=(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$.

Jednadžba tangente u parametarskom obliku je

$$\begin{aligned} x &= x(t_0)+(t-t_0)x'(t_0), \\ y &= y(t_0)+(t-t_0)y'(t_0), \quad t\in\mathbf{R}. \\ z &= z(t_0)+(t-t_0)z'(t_0), \end{aligned} \tag{9}$$

Kanonski oblik jednadžbe tangente je

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}=u,\quad u\in\mathbf{R}. \tag{10}$$

Ako je $\mathbf{r}'(t_0)\neq 0$, onda jedinični vektor

$$\mathbf{T}=\frac{\mathbf{r}'(t_0)}{|\mathbf{r}'(t_0)|}$$

nazivamo *jedinični vektor tangente* u točki $T_0=(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$.

Primjer 10. Nađimo jednadžbu tangente na krivulju

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \quad t > 0$$

u točki $T = (2, 4, 8)$.

Odredimo parametar t točke T. Kako je

$$\begin{aligned} x(t) &= t = 2 \\ y(t) &= t^2 = 4 \\ z(t) &= t^3 = 8, \end{aligned}$$

slijedi da je $t = 2$. Nadalje, $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$, odnosno $\mathbf{r}'(2) = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$. Taj vektor je vektor smjera tangente na krivulju u točki $T = (2, 4, 8)$. Vektorska funkcija

$$\mathbf{r}(u) = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) + u(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}), \quad u \in \mathbf{R},$$

je parametarski zapis tangente, odnosno u skalarnom obliku

$$\begin{aligned} x &= 2 + u, \\ y &= 4 + 4u, \quad u \in \mathbf{R} \\ z &= 8 + 12u, \end{aligned}$$

ili u kanonskom obliku

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-8}{12} = u.$$

1.7. Zadaci za vježbu

1. Odredite vektorsku funkciju čiji je graf krivulja zadana jednadžbom

   (a) $4x^2 + 9y^2 = 36$,

   (b) $y = x^2$,

   (c) segment od točke $A = (1, 4, -2)$ do točke $B = (3, 9, 6)$.

2. Izračunajte $\lim_{t\to 0} \mathbf{f}(t)$ ako je

   (a) $\mathbf{f}(t) = \frac{\sin t}{2t}\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j} + \frac{t^2}{e^t}\mathbf{k}$,

   (b) $\mathbf{f}(t) = 3(t^2 - 1)\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \frac{t}{|t|}\mathbf{k}$.

3. Izračunajte derivacije vektorskih funkcija

   (a) $\mathbf{f}(t) = (1 + 2t)\mathbf{i} + (3 - t)\mathbf{j} + (2 + 3t)\mathbf{k}$,

   (b) $\mathbf{f}(t) = \sqrt{1 - t}\mathbf{i} + \sqrt{1 + t}\mathbf{j} + (1 + t)^{-1}\mathbf{k}$,

   (c) $\mathbf{f}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathrm{tg}t\mathbf{k}$.

4. Izračunajte

   (a) $\int_1^2 \mathbf{f}(t)dt$, ako je $\mathbf{f}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$,

   (b) $\int_0^1 \mathbf{g}(t)dt$, ako je $\mathbf{g}(t) = e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$.

5. Izračunajte $\mathbf{f}(t)$ ako je

   (a) $\mathbf{f}'(t) = t\mathbf{i} + t(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{j} + te^t\mathbf{k}$, $\mathbf{f}(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$,

   (b) $\mathbf{f}'(t) = \mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $\mathbf{f}(0) = \mathbf{j} - \mathbf{k}$,

   (c) $\mathbf{f}'(t) = \alpha\mathbf{f}(t)$, α je realan broj i $\mathbf{f}(0) = \mathbf{c}$.

6. Dokažite da ako je funkcija $\mathbf{f}$ diferencijabilna u točki t, onda je $\mathbf{f}$ i neprekinuta u točki t.

7. Dokažite da ako je $\mathbf{f}'(t) = 0$ za svako t iz intervala I onda je $\mathbf{f}$ konstantna na I.

8. Odredite vektor smjera tangente i jednadžbu tangente u zadanoj točki ako je

   (a) $\mathbf{r}(t) = \cos \pi t\mathbf{i} + \sin \pi t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, u točki za koju je $t = 2$,

   (b) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} + t^2\mathbf{c}$, u točki za koju je $t = -1$,

   (c) $\mathbf{r}(t) = 2t^2\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} + (3+2t^2)\mathbf{k}$, u točki $T = (2, 0, 5)$.

9. Dokažite da je $\mathbf{r}(t) = at\mathbf{i} + bt^2\mathbf{j}$ parametrizacija parabole u $xy-$ ravnini, te napišite jednadžbu te parabole.

10. Odredite sve točke na krivulji $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1+t^2)\mathbf{j}$ u kojima su vektori $\mathbf{r}(t)$ i $\mathbf{r}'(t)$

    (a) okomiti,

    (b) imaju isti smjer,

    (c) imaju suprotne smjerove.

11. Odredite parametrizacije sljedećih krivulja:

    (a) $y^2 = x - 1$, $y \geq 1$,

    (b) $r = \sin 3\varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$, (polarne koordinate),

    (c) $y^2 = x^3$, $y \leq 0$,

    (d) $y^3 = x^2$.

12. Odredite točku u kojoj se sijeku krivulje $\mathbf{r}_1(t) = e^t\mathbf{i} + 2\sin(t + \frac{\pi}{2})\mathbf{j} + (t^2 - 2)\mathbf{k}$ i $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (t^2 - 3)\mathbf{k}$, te izračunaj kosinus kuta pod kojim se krivulje sijeku.

Rješenja zadataka

1. (a) $\mathbf{f}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j}$, (b) $\mathbf{f}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$,
   (c) $\mathbf{f}(t) = (1+2t)\mathbf{i} + (4+5t)\mathbf{j} + (-2+8t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$.

2. (a) $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}$, (b) $-3\mathbf{i} + \mathbf{j} \pm \mathbf{k}$.

3. (a) $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, (b) $-\frac{1}{2\sqrt{1-t}}\mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{1+t}}\mathbf{j} + \frac{1}{(1-t)^2}\mathbf{k}$, (c) $\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} + \frac{1}{\cos^2 t}\mathbf{k}$

4. (a) $\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, (b) $(e-1)\mathbf{i} + (1-\frac{1}{e})\mathbf{k}$.

5. (a) $\frac{t^2}{2}\mathbf{i} + (1+\sqrt{1+t^2})\mathbf{j} + [(t-1)e^t + 4]\mathbf{k}$, (b) $t\mathbf{i} + (\frac{1}{3}t^2 + 1)\mathbf{j} - \mathbf{k}$, (c) $e^{at}\mathbf{c}$.

8. (a) $\pi\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{R}(u) = (\mathbf{i}+2\mathbf{k})+u(\pi\mathbf{j}+\mathbf{k})$, (b) $\mathbf{b}-2\mathbf{c}$, $\mathbf{R}(u) = (\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c})+u(\mathbf{b}-2\mathbf{c})$,
   (c) $4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{R}(u) = (2\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) + u(4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k})$.

9. $y = \frac{b}{a^2}x^2$.

10. (a) $T = (0,1)$, (b) $T = (1,2)$, (c) $T = (-1,2)$.

11. (a) $\mathbf{r}(t) = (t^2+1)\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, $t \ge 1$, (b) $\mathbf{r}(t) = \cos t \sin 3t\mathbf{i} + \sin t \sin 3t\mathbf{j}$, $t \in [0,\pi]$,
    (c) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - \sqrt{t^3}\mathbf{j}$, $t \ge 0$, (d) $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$.

12. $T = (1,2,-2)$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$.