5.

Neprekinute slučajne varijable

5.1. Slučajne varijable i razdiobe

U ovom ćemo poglavlju proučavati slučajne varijable kojima je skup vrijednosti interval (ograničen ili ne) u skupu realnih brojeva.

Takve slučajne varijable mogu poprimiti *svaku* vrijednost unutar tog intervala. S obzirom da mogućih vrijednosti ima neprebrojivo mnogo, vjerojatnost realizacije svake od njih redovito će biti jednaka nuli. Po tome se ovakve slučajne varijable razlikuju od diskretnih, gdje je takva vjerojatnost bila pozitivan broj.

Pri proučavanju neprekinutih slučajnih varijabli koristimo se aparatom matematičke analize. Nizove brojeva koji zadaju razdiobu zamijenit će realna funkcija, umjesto suma koristit ćemo tehnike integralnog i diferencijalnog računa. Posebice, efikasno sredstvo u teorijskom i praktičnom pogledu činit će *Fourierova* i *Laplaceova* transformacija.

Slučajna varijabla

Započnimo s definicijom, koja se minimalno razlikuje od definicije diskretne slučajne varijable, a u sebi uključuje i tu vrstu slučajnih varijabli.

Slučajne varijable i funkcija razdiobe

Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{P})$ vjerojatnosni prostor. Preslikavanje $X : \Omega \to \mathbf{R}$ nazivamo **slučajna varijabla** ako je za svaki $x \in \mathbf{R}$ skup

$$A_x = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$$

događaj, dakle element algebre $\mathscr{F}$.

Skup $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$ označavat ćemo kraće sa $\{X < x\}$.

Funkcija razdiobe slučajne varijable X je funkcija $F : \mathbf{R} \to [0, 1]$ definirana formulom

$$F(x) := \boldsymbol{P}(\{X < x\}). \tag{5.1}$$

Funkcija razdiobe (i njezina derivacija) bit će najvažniji pojam vezan uz slučajnu varijablu. Poznavanjem funkcije razdiobe, možemo u potpunosti opisati pripadnu slučajnu varijablu.

Upoznajmo se odmah s osnovnim svojstvima funkcije razdiobe.

Funkcija razdiobe

Teorem 5.1. *Neka je F funkcija razdiobe slučajne varijable X. Ona posjeduje svojstva:*

1° $\boldsymbol{P}(\{x_1 \leqslant X < x_2\}) = F(x_2) - F(x_1)$,

2° *F je neopadajuća:* $x_1 < x_2 \implies F(x_1) \leqslant F(x_2)$,

3° $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$,

4° *F je neprekinuta slijeva:*

$$F(x-0) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} F(x-\varepsilon) = F(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Dokaz.

1° Neka je $x_1 < x_2$. Onda vrijedi

$$\begin{aligned} F(x_2) &= \boldsymbol{P}(\{X < x_2\}) = \boldsymbol{P}(\{X < x_1\} \cup \{x_1 \leqslant X < x_2\}) \\ &= \boldsymbol{P}(\{X < x_1\}) + \boldsymbol{P}(\{x_1 \leqslant X < x_2\}) \\ &= F(x_1) + \boldsymbol{P}(\{x_1 \leqslant X < x_2\}). \end{aligned}$$

2° Neka je ponovo $x_1 < x_2$. Kako vrijedi $\{X < x_1\} \subset \{X < x_2\}$, tvrdnja slijedi zbog monotonosti vjerojatnosti.

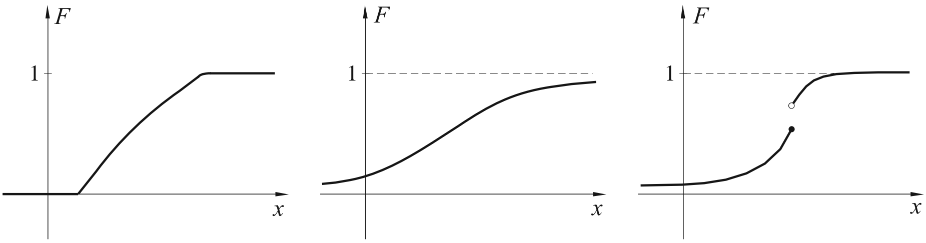
3° Neka je (x_n) po volji odabran padajući niz realnih brojeva, $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Označimo $A_n = \{X < x_n\}$. Onda su A_n padajući skupovi: $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ i vrijedi $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Zato je, zbog svojstva neprekinutosti vjerojatnosti,

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(A_n) = 0.$$

Druga se tvrdnja dokazuje na isti način.

4° Tvrdnja ponovo slijedi iz neprekinutosti vjerojatnosti. Naime, ako je (ε_n) niz pozitivnih brojeva koji opada prema nuli, onda je s $A_n = \{X < x - \varepsilon_n\}$ definiran rastući niz skupova za koji vrijedi $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \{X < x\}$ pa tvrdnja slijedi zbog neprekinutosti vjerojatnosti:

$$\begin{aligned} F(x-0) &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} F(x-\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} F(x-\varepsilon_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(A_n) = \boldsymbol{P}(A) = F(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}. \ \triangleleft \end{aligned}$$



Sl. 5.1. Graf funkcija razdioba nekih slučajnih varijabli. Koja se svojstva tih varijabli mogu očitati iz ovog grafa?

Primjer 5.1. Slučajna varijabla X uzima vrijednosti -1, 0, 1 s vjerojatnostima $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ redom. Odredimo funkciju razdiobe varijable X i nacrtajmo njezin graf.

▷ Ako je $x \leqslant -1$, tada događaj $\{X < x\}$ ima vjerojatnost 0 te je $F(x) = 0$ za takve x. Za $-1 < x \leqslant 0$ vrijedi

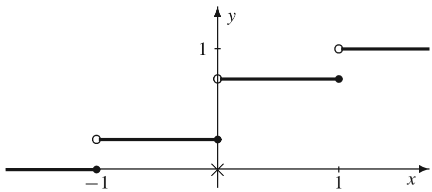
$$\boldsymbol{P}(X < x) = \boldsymbol{P}(X = -1) = \tfrac{1}{4}$$

Za $0 < x \leqslant 1$ vrijedi

$$\boldsymbol{P}(X < x) = \boldsymbol{P}(X = -1) + \boldsymbol{P}(X = 0) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{4}$$

itd. Tako dobivamo

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1, \\ \frac{1}{4}, & -1 < x \leqslant 0, \\ \frac{3}{4}, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$



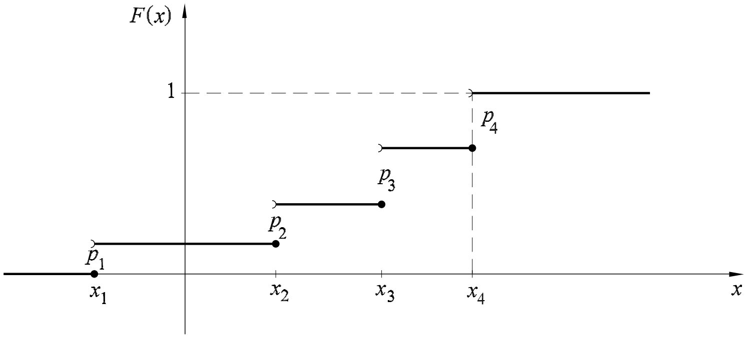
Sl. 5.2.

∗ ∗ ∗

Općenito, funkcija razdiobe diskretne slučajne varijable sa zakonom

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}$$

je stepenasta funkcija sa skokovima u točkama x_1, x_2,... . Iznosi skokova su vjerojatnosti p_1, p_2,... .



Sl. 5.3. Graf funkcije razdiobe diskretne slučajne varijable je stepenasta funkcija. U točkama prekida neprekinuta je slijeva. Iznos skokova jednak je vjerojatnosti s kojom slučajna varijabla poprima vrijednost u toj točki.

* * *

Neprekinute slučajne varijable

Upoznat ćemo sada drugu važnu klasu slučajnih varijabli.

Neprekinute slučajne varijable. Gustoća razdiobe

Za slučajnu varijablu X kažemo da je **neprekinuta** (kontinuirana) ako postoji nenegativna funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takva da vrijedi

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \tag{5.2}$$

Funkcija f naziva se **gustoća razdiobe vjerojatnosti** slučajne varijable X. Ona nije nužno neprekinuta, no u točkama neprekinutosti od f vrijedi

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \tag{5.3}$$

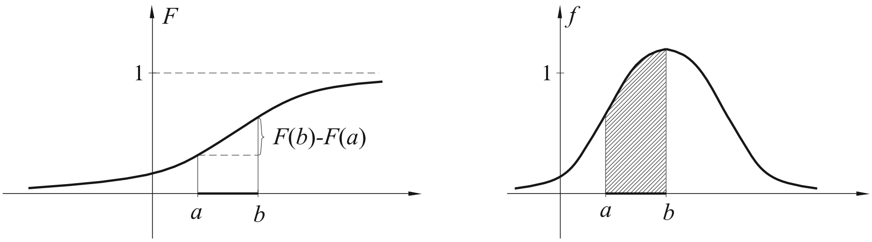
Dakako, funkcija razdiobe neprekinute slučajne varijable je i sama neprekinuta, jer je to funkcija gornje granice integrala. Zato vrijedi $\boldsymbol{P}(X = x) = F(x+0) - F(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbf{R}$. Stoga su i svi događaji $\{x_1 < X < x_2\}$, $\{x_1 \leqslant X < x_2\}$, $\{x_1 < X \leqslant x_2\}$, $\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\}$ jednako vjerojatni. Njihova se vjerojatnost računa na način

$$\boldsymbol{P}(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt. \tag{5.4}$$

Funkcija gustoće pozitivna je funkcija s integralom

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{5.5}$$

Slika prikazuje neku funkciju razdiobe i pripadnu gustoću



Sl. 5.4. Razlika vrijednosti funkcije razdiobe jednaka je vjerojatnosti da slučajna varijabla X poprimi vrijednost u tom intervalu. Kod funkcije gustoće ta je vjerojatnost predočena površinom ispod grafa funkcije.

Znamo da je funkcija razdiobe neopadajuća funkcija s vrijednostima unutar intervala $[0,1]$. Stoga ćemo neke formule zapisivati u skraćenom obliku. Tako npr. umjesto zapisa

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0,\\ x, & 0<x<1,\\ 1, & 1\leqslant x,\end{cases}$$

pisat ćemo kratko

$$F(x)=x,\quad 0<x<1,$$

jer je tada nužno $F(x)=0$ za $x\leqslant 0$ i $F(x)=1$ za $x\geqslant 1$.

Također, ako gustoću razdiobe definiramo nekom formulom za $x\in[a,b]$, tada smatramo da je van tog intervala po definiciji jednaka nuli.

Na koncu, ako je funkcija F ili f definirana nekom formulom bez naznake područja definicije, tada će to redovito biti čitav $\mathbf{R}$.

Jednolika razdioba

Opišimo sad jednostavnu, ali vrlo važnu razdiobu. Prisjetimo se situacije koju smo imali kad je područje vrijednosti slučajne varijable $S=\{x_1,\dots,x_n\}$, bio diskretan skup. Slučajna varijabla, koja je poprimala vrijednosti unutar S *s jednakim vjerojatnostima*, opisivala je pokus *biranja na sreću elementa skupa* S. Tad je vjerojatnost njezine realizacije bila $\boldsymbol{P}(X=x_k)=\dfrac{1}{n}$, za svaki $k=1,\dots,n$.

Jasno je da povećanjem broja elemenata u skupu S ove vjerojatnosti teže k nuli. Ako je na primjer S skup prirodnih brojeva, možemo postaviti pitanje: postoji li algoritam kojim bi, s jednakom vjerojatnošću, birali neki prirodni broj. Odgovor na ovo važno pitanje je negativan, takav algoritam ne postoji. Naime, jasno je da bi vjerojatnost izbora svakog prirodnog broja morala biti jednaka nuli, pa je zbog svojstva σ-aditivnosti vjerojatnosti $\boldsymbol{P}$ i vjerojatnost izbora bilo kojeg podskupa skupa prirodnih brojeva jednaka nuli.

Pretpostavimo sad da je skup S interval $[a,b]$. Točaka unutar tog intervala ima beskonačno (neprebrojivo) mnogo. Zamislimo postupak odabira na sreću nekog broja unutar tog intervala.

Na sreću odabrani broj. Jednolika razdioba

Kažemo da biramo *na sreću* broj unutar intervala $[a,b]$ ako je vjerojatnost da će on biti izabran unutar nekog podintervala proporcionalna duljini tog podintervala.
Za slučajnu varijablu koja uzima vrijednost ovako izabranog broja kažemo da ima **jednoliku** (**uniformnu**) razdiobu na intervalu $[a,b]$.

Neka X označava tu slučajnu varijablu. Odredimo njezinu funkciju razdiobe. Prema definiciji, mora biti

$$F(x) - F(a) = \boldsymbol{P}(a \leqslant X < x) = K(x-a).$$

X uzima vrijednost unutar intervala $[a,b]$. Zato je

$$\begin{gathered}\boldsymbol{P}\{X < a\} = 0 = F(a),\\ 1 = \boldsymbol{P}\{a \leqslant X < b\} = F(b) - F(a) = K(b-a),\end{gathered}$$

i odavde je $K = \dfrac{1}{b-a}$. Tako dobivamo:

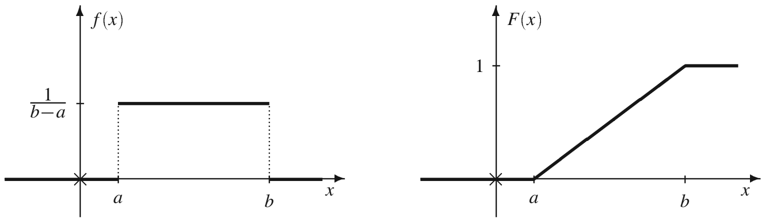
Jednolika razdioba, alternativna definicija, razdioba i gustoća

Za slučajnu varijablu X kažemo da je **jednoliko** (**uniformno**) distribuirana na intervalu $[a,b]$, ako je zadana funkcijom razdiobe odnosno funkcijom gustoće:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x-a}{b-a}, \qquad a \leqslant x \leqslant b,\\ f(x) &= \frac{1}{b-a}, \qquad a \leqslant x \leqslant b. \end{aligned}$$

Pišemo $X \sim \mathscr{U}(a,b)$.

Grafovi funkcije gustoće i pripadne funkcije razdiobe izgledaju ovako:



Sl. 5.5. Funkcija razdiobe jednolike razdiobe je afina na intervalu $[a,b]$. Gustoća jednolike razdiobe konstantna je na tom intervalu. Odatle i ime razdiobi.

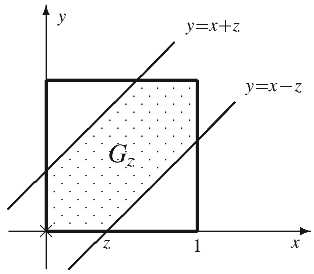
Primjer 5.2. Dvije točke odabrane su na sreću unutar dužine duljine 1. Definirajmo slučajnu varijablu Z kao udaljenost među njima. Odredi funkciju razdiobe varijable Z.

▷ Izbor dviju točaka x i y unutar intervala $[0,1]$ ekvivalentan je izboru jedne točke (x,y) unutar kvadrata $[0,1]\times[0,1]$. Vrijednost koju slučajna varijabla Z poprima, jednaka je $Z = |x-y|$. Varijabla Z uzima vrijednosti iz intervala $[0,1]$. Pritom je

$$|x-z| < z \iff x-z < y < x+z.$$

Zato će nejednakost $|x-y| < z$ biti ispunjena kad se odabere točka (x,y) unutar područja G_z. Zato je

$$F(z) = \boldsymbol{P}\{Z < z\} = m(G_z) = 2z - z^2, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1.$$



Nezavisnost slučajnih varijabli

Pojam nezavisnosti slučajnih varijabli upoznali smo za varijable diskretnog tipa. Tako smo ukazali i na kriterij nezavisnosti koji se provjerava preko marginalnih razdioba slučajnog vektora.

Analogne definicije i tvrdnje vrijedit će i za općenite slučajne varijable. O tome će biti više riječi u nastavku. Za sada, zadovoljit ćemo se definicijom nezavisnosti, a kriterije i dodatna svojstva moramo odložiti do poglavlja o slučajnim vektorima.

Definicija nezavisnosti

Kažemo da su slučajne varijable X i Y **nezavisne**, ukoliko za sve intervale A, B iz skupa $\mathbf{R}$ vrijedi

$$\boldsymbol{P}(X\in A, Y\in B) = \boldsymbol{P}(X\in A)\boldsymbol{P}(Y\in B).$$

Očekivanje i disperzija

Neka je X neprekinuta s gustoćom f. Njezino očekivanje definira se na način

$$\boldsymbol{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \tag{5.6}$$

Ako ovaj nepravi integral ne konvergira, očekivanje ne postoji.

Označimo $\overline{x} = \boldsymbol{E}(X)$. Disperzija $\boldsymbol{D}(X)$ slučajne varijable X računa se uz pomoć formula:

$$\boldsymbol{D}(X) = \boldsymbol{E}[(X-\overline{x})^2] = \boldsymbol{E}(X^2) - \overline{x}^2.$$

Dakle

$$\boldsymbol{D}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{x})^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \overline{x}^2. \tag{5.7}$$

Od svojstava očekivanja i disperzije izdvojit ćemo samo najvažnija:

Svojstva očekivanja i disperzije

Za sve slučajne varijable X, Y i realne brojeve s, t vrijedi

$$\boldsymbol{E}(sX + tY) = s\boldsymbol{E}(X) + t\boldsymbol{E}(Y)$$

(svojstvo **linearnosti** očekivanja). Za disperziju pak vrijedi

$$\boldsymbol{D}(sX) = s^2\boldsymbol{D}(X).$$

Ako su X i Y nezavisne, onda vrijedi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(XY) &= \boldsymbol{E}(X)\boldsymbol{E}(Y), \\ \boldsymbol{D}(X+Y) &= \boldsymbol{D}(X) + \boldsymbol{D}(Y). \end{aligned}$$

Ova ćemo svojstva dokazati naknadno.

* * *

Primjer 5.3. (**Jednolika razdioba**) Izračunajmo očekivanje i disperziju jednolike razdiobe.

▷ Promotrit ćemo najprije, jednostavnosti radi, jednoliku razdiobu na intervalu $[0,1]$. Za nju je gustoća $f(x) = 1$, pa imamo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(X) &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}, \\ \boldsymbol{D}(X) &= \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4} = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Ako Y ima jednoliku razdiobu na intervalu $[a,b]$, tada slučajna varijabla

$$X = \frac{Y-a}{b-a}$$

ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0,1]$. Obratno, ako X ima jednoliku razdiobu na $[0,1]$, onda

$$Y = (b-a)X + a$$

ima jednoliku razdiobu na intervalu $[a,b]$. Očekivanje ove slučajne varijable je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(Y) &= \boldsymbol{E}[(b-a)X + a] = (b-a)\boldsymbol{E}(X) + a \\ &= (b-a)\cdot\frac{1}{2} + a = \frac{a+b}{2}, \end{aligned}$$

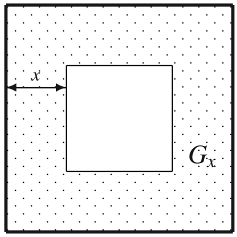
a njezina disperzija

$$\boldsymbol{D}(Y) = \boldsymbol{D}[(b-a)X + a] = (b-a)^2\boldsymbol{D}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad \triangleleft$$

Primjer 5.4. Na sreću odabiremo točku T unutar kvadrata stranice 2. Neka je vrijednost slučajne varijable X najmanja od udaljenosti te točke do stranica kvadrata. Odredimo funkciju razdiobe i očekivanje od X.

▷ Odredimo najprije funkciju razdiobe:

$$\begin{aligned} F(x) &= \boldsymbol{P}\{X < x\} = \boldsymbol{P}\{T \in G_x\} \\ &= \frac{m(G_x)}{m(S)} = \frac{4-(2-2x)^2}{4} \\ &= 2x - x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{aligned}$$



Sl. 5.7.

Gustoća razdiobe je

$$f(x) = 2 - 2x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

te očekivanje iznosi

$$\boldsymbol{E}(X) = \int_0^1 x(2-2x)dx = \frac{1}{3}.$$

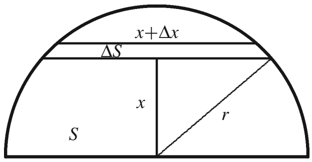
Primjer 5.5. Točka se bira na sreću unutar polukruga polumjera r. Neka je X udaljenost točke do promjera. Odredimo očekivanje varijable X.

▷ U ovom primjeru nećemo računati funkciju razdiobe, već ćemo gustoću odrediti na temelju veze:

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{P}(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Za male Δx vrijedi stoga

$$f(x)\Delta x \doteq \boldsymbol{P}(x < X < x + \Delta x) = \frac{m(\Delta S)}{m(S)} \doteq \frac{2\sqrt{r^2-x^2}\Delta x}{\frac{1}{2}r^2\pi}.$$



Sl. 5.8. Pri računanju površine ΔS, prugu debljine Δx možemo aproksimirati pravokutnikom iste debljine. Pritom je učinjena pogreška veličine $(\Delta x)^2$, koja u limesu ne utječe na funkciju $f(x)$.

Odavde dobivamo funkciju gustoće:

$$f(x) = \frac{4}{r^2\pi}\sqrt{r^2-x^2}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant r.$$

Sad možemo izračunati očekivanje:

$$\boldsymbol{E}(X) = \int_0^r \frac{4x}{r^2\pi}\sqrt{r^2-x^2}dx = -\frac{2}{r^2\pi}\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}d(r^2-x^2) = \frac{4r}{3\pi}.$$

Riemann-Stieltjesov integral

Neka je $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ monotono rastuća funkcija, neprekinuta slijeva. Neka je $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ ograničena.

Izaberimo bilo koju particiju $\mathscr{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervala $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Definirajmo integralnu sumu

$$S(\mathscr{P}, g, F) = \sum_{i=1}^{n} g(\tilde{x}_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Označimo s $\Delta = \max |x_i - x_{i-1}|$,

Riemann-Stieltjesov integral, definicija

Kažemo da je g Riemann-Stieltjes integrabilna u odnosu na F, ako postoji limes integralnih suma, neovisno o izboru particije i točaka $\tilde{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Taj limes nazivamo **Riemann-Stieltjesov integral**, a označavamo na sljedeći način:

$$\int_a^b g(x)dF(x) := \lim_{\Delta \to 0} S(\mathscr{P}, g, F)$$

Primijetimo da za $F(x) = x$ Riemann-Stieltjesov integral postaje Riemannov integral.

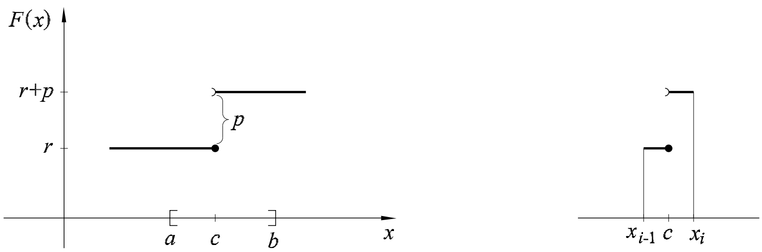
* * *

Sad ćemo dovesti u vezu Riemann-Stieltjesov i klasični Riemannov integral, za široku klasu funkcija F važnih u primjenama.

Neka je F po dijelovima konstantna na intervalu $[a,b]$, sa skokom iznosa p u točki c unutar tog intervala:

$$F(x) = \begin{cases} r, & x \leqslant c \\ r + p, & x > c \end{cases}$$

Izračunajmo $\int_a^b g(x)dF(x)$, za neku funkciju g, neprekinutu na intervalu $[a,b]$.



Sl. 5.9.

Za bilo koju particiju vrijedi $F(x_i) - F(x_{i-1}) = 0$ za svaki indeks i osim za onaj za koji je $x_{i-1} \leqslant c < x_i$, jer je funkcija F konstantna lijevo i desno od točke c. Zato u integralnoj sumi ostaje samo jedan član:

$$S(\mathscr{P}, g, F) = g(\tilde{x}_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})] = g(\tilde{x}_i) \cdot p$$

U limesu, kad $\Delta \to 0$, točka $\tilde{x}_i$ teži ka c. Zato je

$$\int_a^b g(x)dF(x) = g(c) \cdot p.$$

Općenito, ako F ima skokove iznosa p_i u točkama c_i, za njezin Riemann-Stieltjesov integral vrijedi

$$\int_a^b g(x)dF(x) = \sum_{i=1}^n g(c_i) \cdot p_i.$$

* * *

Neka je sad F neprekinuto diferencijabilna funkcija. Tad, po teoremu srednje vrijednosti imamo $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, za neku točku $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Integralna suma glasi

$$\sum_{i=1}^n g(\tilde{x}_i)F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Limes ove integralne sume očito definira Riemannov integral

$$\int_a^b g(x)F'(x)dx.$$

Riemann-Stieltjesov integral, način računanja

Ako F ima skokove iznosa p_i u točkama c_i, za njezin Riemann-Stieltjesov integral vrijedi

$$\int_a^b g(x)dF(x) = \sum_{i=1}^n g(c_i) \cdot p_i.$$

Ako je F neprekinuto diferencijabilna funkcija, onda vrijedi

$$\int_a^b g(x)dF(x) = \int_a^b g(x)F'(x)dx.$$

Prema tome, korištenjem Riemann-Stieltjesovog integrala mi ćemo istovremeno pokrivati obje važne klase slučajnih varijabli, diskretne i neprekinute slučajne varijable.

Tako, na primjer, očekivanje neke slučajne varijable možemo izraziti formulom

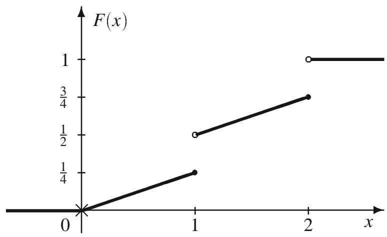
$$\boldsymbol{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x),$$

a disperziju

$$\boldsymbol{D}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, dF(x) - \boldsymbol{E}(X)^2.$$

Integrali su Riemann-Stieltjesovi.

Primjer 5.6. Izračunaj očekivanje slučajne varijable čija je funkcija razdiobe zadana slikom:



Sl. 5.10.

▷ Funkcija razdiobe glasi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \frac{1}{4}x, & 0 < x \leqslant 1, \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}, & 1 < x \leqslant 2, \\ 1, & 2 \leqslant x. \end{cases}$$

F ima skokove iznosa $\frac{1}{4}$ u točkama $x = 1$ i $x = 2$. Zato je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \\ &= \int_0^1 x F'(x) dx + 1 \cdot \frac{1}{4} + \int_1^2 x F'(x) dx + 2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \int_0^1 \frac{x}{4} dx + \frac{1}{4} + \int_1^2 \frac{x}{4} dx + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Karakteristična funkcija

Svakoj slučajnoj varijabli X možemo pridružiti **karakterističnu funkciju**. To je funkcija realnog argumenta s kompleksnim vrijednostima, $\vartheta : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ zadana formulom

$$\vartheta(t) := \boldsymbol{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x). \tag{5.8}$$

Osnovna svojstva karakteristične funkcije su

1° Karakteristična funkcija jednoznačno određuje razdiobu: dvije različite razdiobe ne mogu imati istu karakterističnu funkciju.

2° Ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne, tada je

$$\vartheta_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \vartheta_{X_1}(t) \cdot \ldots \cdot \vartheta_{X_n}(t). \tag{5.9}$$

3° Vrijedi formula

$$\boldsymbol{E}(X^r) = \frac{\vartheta^{(r)}(0)}{i^r}, \qquad r = 1, 2, \ldots \tag{5.10}$$

ukoliko očekivanje postoji. Specijalno,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(X) &= -i\vartheta'(0), \\ \boldsymbol{D}(X) &= -\vartheta''(0) + \vartheta'(0)^2. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Ako je ϑ_X karakteristična funkcija varijable X, tada varijabla $Y = a + bX$ ima karakterističnu funkciju $e^{ita}\vartheta_X(bt)$.

Primjer 5.7. Odredimo karakterističnu funkciju slučajne varijable jednoliko distribuirane na intervalu $[a,b]$.

▷ Gustoća ove razdiobe je $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$, $a \leqslant x \leqslant b$. Stoga

$$\vartheta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx = \int_a^b e^{itx}\frac{1}{b-a}dx = \frac{e^{ibt} - e^{-iat}}{(b-a)it}.$$

U slučaju simetričnog intervala $[-a,a]$, karakteristična funkcija postaje realna:

$$\vartheta(t) = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{(a+a)it} = \frac{\sin at}{at}. \quad \triangleleft$$

* * *

Ako je X neprekinuta slučajna varijabla, s gustoćom f, tada njezina karakteristična funkcija iznosi

$$\vartheta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx. \tag{5.12}$$

To je upravo Fourierova transformacija funkcije f. Stoga će, ukoliko ϑ zadovoljava uvjet $\int_{-\infty}^{\infty} |\vartheta(t)|dt < \infty$, vrijediti formula inverzije

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t)e^{-itx}dt. \tag{5.13}$$

Primjer 5.8. Odredi funkciju gustoće razdiobe određene karakterističnom funkcijom

$$\vartheta(t) = e^{-|t|}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

▷ Ova je funkcija apsolutno integrabilna, stoga će gustoća biti određena formulom inverzije (5.13)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\vartheta(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}e^{-|t|}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-itx}e^{t}dt + \int_0^{\infty} e^{-itx}e^{-t}dt\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{(-ix+1)t}}{-ix+1}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{(-ix-1)t}}{-ix-1}\Big|_{0}^{\infty}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{-ix+1} + \frac{1}{ix+1}\right) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Razdioba s ovom gustoćom naziva se **Cauchyjeva razdioba**. Zbog jedinstvenosti, zaključujemo da je $t \mapsto e^{-|t|}$ karakteristična funkcija te razdiobe.

Laplaceova transformacija

Karakteristična je funkcija Fourierova transformacija gustoće. Pri izboru transformacije gustoća pozitivne slučajne varijable, možemo koristiti i Laplaceovu transformaciju. Ako je F funkcija razdiobe pozitivne slučajne varijable X, onda je njezin Laplace-Stieltjesov transformat

$$f^*(s) = \boldsymbol{E}(e^{-sX}) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x) \tag{5.14}$$

Ako je X neprekinuta s gustoćom f, onda je f^* uobičajeni Laplaceov transformat funkcije f:

$$f^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx. \tag{5.15}$$

Ako je pak X diskretna slučajna varijabla koja uzima vrijednosti u skupu $\{0, 1, 2, \dots\}$, tad Laplace-Stieltjesov transformat glasi

$$f^*(s) = \sum_{k=0}^\infty e^{-sk} p_k = \psi_X(e^{-s}). \tag{5.16}$$

Dakle, u ovom se slučaju Laplaceov transformat podudara s funkcijom izvodnice u kojoj je argument z zamijenjen s e^{-s}.

Derivacijom integrala po parametru dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} f^*(s) &= \int_0^\infty (-x) e^{-sx} dF(x) \\
\frac{d^2}{ds^2} f^*(s) &= \int_0^\infty (-x)^2 e^{-sx} dF(x) \\
&\vdots \\
\frac{d^n}{ds^n} f^*(s) &= \int_0^\infty (-x)^n e^{-sx} dF(x)
\end{aligned}$$

Odavde, stavljajući $s = 0$, slijedi

$$\boldsymbol{E}(X^n) = \int_0^\infty x^n dF(x) = (-1)^n \frac{d^n f^*(s)}{ds^n} \bigg|_{s=0}. \tag{5.17}$$

Singularne slučajne varijable

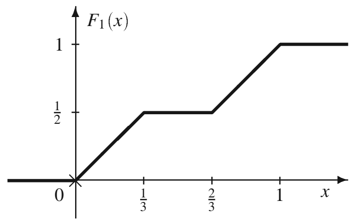
Do sada smo promatrali diskretne i neprekinute slučajne varijable. Spomenimo da uz njih postoji i treća klasa tzv. **singularnih** slučajnih varijabli, čija je funkcija razdiobe neprekinuta, no nemaju gustoće. Takva se funkcija ne može napisati u obliku $\int_{-\infty}^x f(t)dt$. Klasu singularnih slučajnih varijabli ne susrećemo u primjenama, jer se njihova funkcija razdiobe ne može eksplicitno izraziti služeći se samo ograničenim brojem elementarnih funkcija (isključimo li granične procese).

Definirajmo na intervalu $[0, 1]$ funkciju $F_1(x)$

$$F_1(x) = \tfrac{1}{2} \quad \text{za } \tfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant \tfrac{2}{3}. \quad F_1(0) = 0. \quad F_1(1) = 1.$$

F_1 je neprekinuta i afina na intervalima $(0, \frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3}, 1)$.

Graf funkcije F_1 nacrtan je na slici:

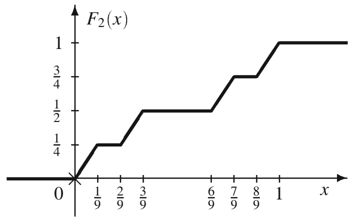


Sl. 5.11.

U drugom koraku svaki od intervala $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$ podijelimo na tri dijela i definiramo neprekinutu funkciju F_2:

$$F_2(0) = 0. \quad F_2(1) = 1. \quad F_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x \in [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}], \\ \frac{1}{2}, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ \frac{3}{4}, & x \in [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]. \end{cases}$$

Na ostalim intervalima definiramo F_2 da bude neprekinuta i afina:



Sl. 5.12.

Nastavimo ovaj postupak. Niz funkcija $\{F_n\}$ težit će ka funkciji F koja je neprekinuta, neopadajuća, s vrijednostima u $[0, 1]$. Pritom je $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ i F predstavlja funkciju razdiobe neke slučajne varijable. Derivacija funkcije F jednaka je nuli svugdje gdje je F konstantna. Duljina takvih intervala se za svaku funkciju F_n povećava i iznosi

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \ldots = \frac{1}{3} . \frac{1}{1 - \dfrac{2}{3}} = 1.$$

tj. $F'(x) = 0$ skoro svuda i F se ne može napisati u obliku $\int_{-\infty}^{x} f(t) dt$. Stoga ne postoji gustoća ove razdiobe.

* * *

Svaka se funkcija razdiobe F može napisati u obliku $F = p_1 F_1 + p_2 F_2 + p_3 F_3$, gdje je $p_k \geqslant 0$, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, a F_1, F_2, F_3 su redom funkcije razdioba diskretne, neprekinute i singularne slučajne varijable.