8.

Integral funkcija kompleksne varijable

Definicija i svojstva integrala

U ovom ćemo poglavlju pretpostavljati da je f funkcija kompleksne varijable definirana na području G, te da je Γ Jordanov luk sadržan unutar G.

Definirat ćemo integral funkcije f po krivulji Γ. Pri tom funkcija f ne mora nužno biti analitička. Ako f jest analitička, dokazat ćemo temeljne teoreme za integral takvih funkcija.

Integral funkcije kompleksne varijable

Neka je Γ orijentirana, po dijelovima glatka krivulja i $z \mapsto f(z)$ funkcija kompleksne varijable definirana i po dijelovima neprekinuta na Γ. Integral funkcije f duž krivulje Γ definira se kao

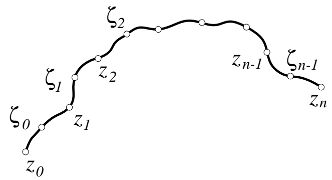
$$\int_\Gamma f(z)dz := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(z_{k+1}-z_k), \tag{1}$$

ukoliko ovaj limes postoji, neovisno o izboru točaka $z_1, z_2, \ldots, z_n$ na krivulji Γ (z_0 je početna, a z_n završna točka krivulje), te izboru točaka ξ_k unutar luka krivulje određenog točkama z_k, z_{k+1} (sl. 8.1.). Limes uzimamo po svim razdiobama za koje vrijedi $\max |z_{k+1}-z_k| \to 0$.

Ova je definicija identična definiciji krivuljnog integrala za realnu funkciju dviju realnih varijabli. Radi jednostavne veze $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ moći ćemo uspostaviti vezu s krivuljnim integralom realnih funkcija. Uvrstimo li tu vezu u (1) te označimo:

$$\Delta z_k = z_{k+1} - z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k, \quad dz = dx + idy,$$

dobit ćemo sljedeću formulu:



Sl. 8.1. Razdioba luka krivulje Γ pri definiciji krivuljnog integrala

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma [u(x,y) + iv(x,y)](dx + idy)$$
$$= \int_\Gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\Gamma u(x,y)dy + v(x,y)dx, \tag{2}$$

pri čemu su integrali s desna krivuljni integrali realnih funkcija, uzeti po krivulji $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$.

* * *

Osnovna svojstva krivuljnih integrala posljedica su identičnih svojstava za realne integrale:

1. $$\int_\Gamma \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(z)dz = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_\Gamma f_k(z)dz,$$

2. $$\int_{\Gamma^-} f(z)dz = -\int_\Gamma f(z)dz,$$

gdje je Γ^- krivulja identična krivulji Γ, ali s protivnim smjerom obilaska.

3. $$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \ldots + \int_{\Gamma_n} f(z)dz$$

ukoliko se krivulja Γ sastoji od lukova $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$.

4. $$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leqslant \int_\Gamma |f(z)|\, ds,$$

gdje je ds diferencijal luka krivulje Γ.

Jedino dokaz svojstva 4. možda nije potpuno očevidan:

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(z_{k+1} - z_k)\right|$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)|\,|z_{k+1} - z_k|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)|\,\Delta s_k$$
$$= \int_\Gamma |f(z)|\, ds$$

Parametrizacija krivulje i računanje integrala

Svojstvo zamjene varijable u krivuljnom integralu u ovoj će situaciji glasiti ovako: ako je φ analitička funkcija koja jednoznačno preslikava krivulju Γ^* na Γ, tada vrijedi

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma^*} f(\varphi(\zeta))\,\varphi'(\zeta)\,d\zeta. \tag{3}$$

Ovu formulu koristimo pri računanju krivuljnih integrala kod kojih krivulja Γ ima parametrizaciju oblika

$$\Gamma \ldots z = \gamma(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Tada (3) glasi

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt. \tag{4}$$

Formula (4) često se uzima kao definicijska formula za krivuljni integral. Npr. za integral po kružnici $\Gamma \ldots z = z_0 + r\,e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ dobivamo:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,ire^{it}\,dt.$$

Računanje integrala

Integral $\int_\Gamma f(z)dz$ računamo na jedan od sljedećih dvaju načina:

1. Ako je $f = u + iv$ prikaz funkcije f, onda se integral svodi na krivuljni integral realnih funkcija:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\Gamma u(x,y)dy + v(x,y)dx. \tag{5}$$

2. Ako je

$$\Gamma \ldots z = \gamma(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

parametrizacija krivulje Γ, onda se integral svodi na Riemannov integral

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt, \tag{6}$$

pri čemu imaginarnu jedinicu i u računu tretiramo kao običan broj.

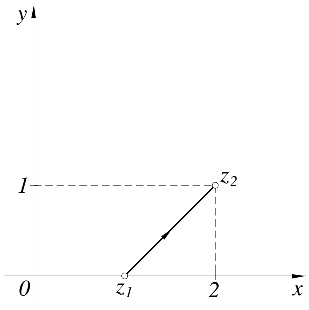
Primjer 1. Izračunaj integral $\displaystyle\int_\Gamma z\,dz$ po dužini koja spaja točke $z_1 = 1$ i $z_2 = 2+i$.

▷ Jednadžba krivulje Γ glasi

$$\Gamma \ldots y = x - 1, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$$

ili pak

$$\Gamma \ldots \gamma(t) = 1 + t(2 + i - 1) = 1 + (1+i)t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$



Sl. 8.2.

Prema (5):

$$\begin{aligned}\int_\Gamma z\,dz &= \int_\Gamma (x+iy)(dx+idy)\\ &= \int_\Gamma x\,dx - y\,dy + i\int_\Gamma y\,dx + x\,dy\\ &= \int_\Gamma x\,dx-(x-1)\,dx + i\int_\Gamma (x-1)\,dx + x\,dx\\ &= \int_1^2 dx + i\int_1^2 (2x-1)dx\\ &= x\Big|_1^2 + i(x^2-x)\Big|_1^2 = 1+2i,\end{aligned}$$

a račun prema (6) izgleda ovako:

$$\begin{aligned}\int_C zdz &= \int_0^1 [1+(1+i)t](1+i)dt\\ &= (1+i)[t+(1+i)\frac{t^2}{2}]\Big|_0^1\\ &= (1+i)(1+\frac{1+i}{2}) = 1+2i \ \triangleleft\end{aligned}$$

Lema 1. *Neka je C kružnica sa središtem u točki a i polumjerom R. Tada je*

$$\int_\Gamma \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n=1,\\ 0, & n\in\mathbf{Z},\ n\neq 1.\end{cases}$$

$\triangleright$ Izaberimo uobičajenu parametrizaciju kružnice Γ.

$$\Gamma\ldots z = a + re^{it}, \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

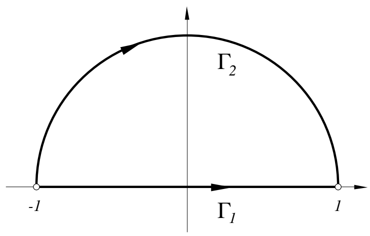
Za $n = 1$ imamo

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{i\,r\,e^{it}}{r\,e^{it}}dt = 2\pi i.$$

Za $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 1$ dobivamo

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{dz}{(z-a)^n} &= \int_0^{2\pi} \frac{i\,r\,e^{it}}{r^n\,e^{int}}\,dt \\ &= \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{(1-n)it}dt = \frac{i\,e^{(1-n)it}}{r^{n-1}(1-n)i}\Bigg|_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Primjer 2. Izračunajmo integral $\displaystyle\int_{\Gamma_i} |z|\,dz$ po krivuljama na slici.



Sl. 8.3. Krivulja Γ_1 je spojnica točaka -1 i 1, dok je Γ_2 polukružnica koja spaja iste točke

▷ Parametrizacija krivulje Γ_1 glasi

$$\Gamma_1 \ldots y = 0, \quad x = t, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1$$

i vrijedi $|z| = |t + i \cdot 0| = |t|$, $dz = dx + i\,dy = dt$. Zato

$$\int_{\Gamma_1} |z|\,dz = \int_{-1}^{1} |t|\,dt = 2\int_0^1 t\,dt = 1.$$

Za parametrizaciju krivulje Γ_2 biramo

$$\Gamma_2 \ldots z = e^{it}, \quad t \in [\pi, 0],$$

te je

$$\int_{\Gamma_2} |z|\,dz = \int_\pi^0 1 \cdot i \cdot e^{it}\,dt = i\frac{e^{it}}{i}\Bigg|_\pi^0 = 2.$$

Primijeti da ovaj integral ovisi o putu integracije. Međutim, on ne ovisi o izboru parametrizacije zadane krivulje. Tako npr. krivulje u ovom zadataku imaju (između ostalih) i sljedeće parametrizacije:

$$\begin{aligned}&\Gamma_1 \ldots z = \cos t, \quad t \in [\pi, 0],\\ &\Gamma_1 \ldots z = \ln t, \quad t \in [{}^1\!/_e, e],\\ &\Gamma_2 \ldots z = e^{-2it}, \quad t \in [{}^\pi\!/_2, 0].\end{aligned}$$

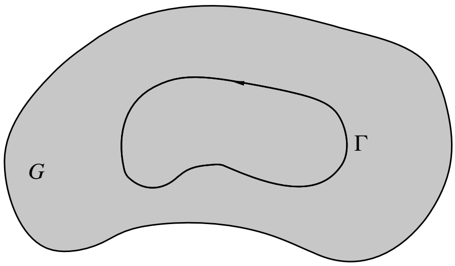
Provjeri da se u svakom od ovih slučajeva dobiva isti rezultat. ◁

Cauchyjeva integralna formula

Cauchyjev teorem

Teorem 2. *Ako je f analitička funkcija na području $D \subset \mathbf{C}$ i $G \subset D$ jednostruko suvislo područje omeđeno zatvorenom krivuljom $\Gamma = \partial G \subset D$, tada je*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0. \tag{7}$$



Sl. 8.4. Integral analitičke funkcije po zatvorenoj krivulji u jednostruko suvislom području jednak je nuli

DOKAZ. Vrijedi

$$I = \int_{\Gamma} f(z)dz = \oint u(x,y)dx - v(x,y)dy + i \oint v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

Funkcija f je analitička na D, pa su na $\overline{G}$ ispunjeni Cauchy-Riemannovi uvjeti:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

i primjenom Green-Gaussovog teorema slijedi

$$I = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dxdy + i \iint_G \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) dxdy = 0. \quad \triangleleft$$

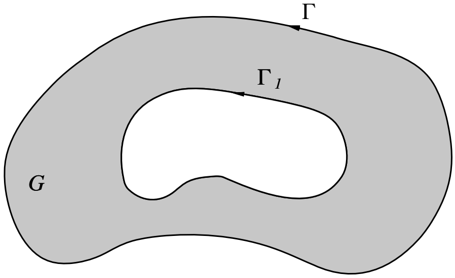
Ovaj se teorem još naziva *osnovni* ili *glavni*.

* * *

Neka je sada G višestruko suvislo područje, npr. kao na slici 8.5. Tada je

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz.$$

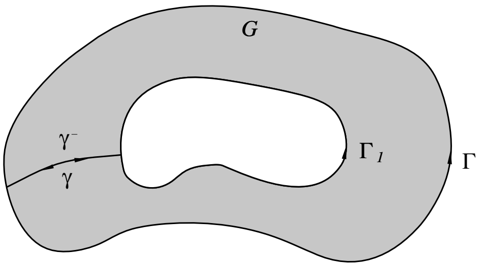
(Ovi integrali ne moraju biti jednaki nuli, budući da na njih nije primjenjiv prethodni teorem).



Sl. 8.5.

Spojimo Γ sa Γ_1 pomoću krivulje γ. Time je određeno jednoliko suvislo područje $\widetilde{G}$ (to je područje G bez γ). Po Cauchyjevom teoremu

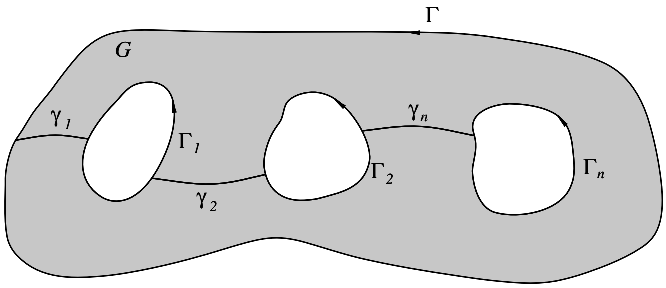
$$\begin{aligned} 0 = \int_{\partial\widetilde{G}} f(z)dz &= \int_{\Gamma} + \int_{\gamma} + \int_{\Gamma_1^-} + \int_{\gamma^-} \\ &= \int_{\Gamma} f(z)dz - \int_{\Gamma_1} f(z)dz \end{aligned}$$



Sl. 8.6.

Općenitije, od višestruko suvislog područja G, kao na slici 8.7, dobit ćemo jednostruko suvislo rezanjem po krivuljama $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Uz potpuno isti dokaz kao u prethodnom slučaju, vrijedit će:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \cdots + \int_{\Gamma_n} f(z)dz.$$



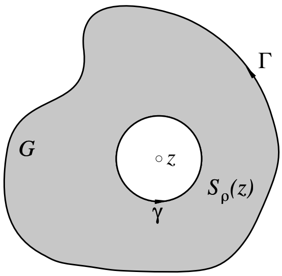
Sl. 8.7.

Cauchyjeva integralna formula

Primijenimo opisanu situaciju na integral specijalnog oblika

$$\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

gdje je $\Gamma = \partial G$, $z \in G$ i f analitička u nekoj okolini skupa $\overline{G}$. Funkcija $\xi \mapsto \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}$ nije analitička na G jer nije definirana u točki $z \in G$. Međutim, ona će biti analitička na dvostruko suvislom području određenom sa Γ i kružnicom $\gamma = \partial S_\rho(z) \subset G$ (ono se dobiva kad se od G oduzme zatvoreni krug sa središtem u z i polumjerom ρ) (slika 8.8).



Sl. 8.8.

Prema prethodnom vrijedi

$$\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

i to za svaku kružnicu γ sa središtem u z. Izračunajmo ovaj integral. Izaberimo po volji $\varepsilon > 0$ i zatim ρ dovoljno malen da bude

$$|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon \qquad \text{za} \qquad |\xi - z| \leqslant \rho.$$

To možemo napraviti jer je F neprekinuta na G. Tada će biti

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi &= \lim_{\rho\to 0}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi \\ &= \int_\gamma \frac{f(z)}{\xi - z}d\xi = f(z)\cdot 2\pi i\end{aligned}$$

po Lemi 1. Naime, vrijedi

$$\left|\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi - \int_\gamma \frac{f(z)}{\xi - z}d\xi\right| \leqslant \int_\gamma \left|\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}\right|ds \leqslant \int_\gamma \frac{\varepsilon}{\rho}ds = \varepsilon\cdot 2\pi,$$

i ovu razliku možemo učiniti po volji malenom.

Na taj smo način pokazali:

Cauchyjeva integralna formula

Teorem 3. *Neka je f analitička na nekoj okolini skupa $\overline{G}$. Tada je*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi, \qquad \forall z \in G. \tag{8}$$

Ovaj teorem vrijedi i za višestruko povezana područja. (Integral će tad biti zbroj integrala po rubnim krivuljama.) U tom slučaju obilazak po rubu ∂G moramo vršiti tako da područje G uvijek bude s lijeve strane.

Derivacije analitičke funkcije

Teorem 4. *Derivacija analitičke funkcije je analitička funkcija. Zato analitička funkcija ima derivaciju svakog reda i vrijedi*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi. \tag{9}$$

DOKAZ. Prema Cauchyjevoj integralnoj formuli (8) imamo

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \frac{1}{2\pi i h}\int_\Gamma\Big[\frac{f(\xi)}{\xi - z - h} - \frac{f(\xi)}{\xi - z}\Big]d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i h}\int_\Gamma \frac{f(\xi)(\xi - z) - f(\xi)(\xi - z - h)}{(\xi - z - h)(\xi - z)}d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)}d\xi.\end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\lim_{h\to 0}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z-h)(\xi-z)}d\xi\\
&\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lim_{h\to 0}\frac{f(\xi)}{(\xi-z-h)(\xi-z)}d\xi\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi.
\end{aligned}$$

Integral i limes možemo zamijeniti jer je konvergencija uniformna na Γ.

Analogno se pokazuje da postoji

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^3}d\xi$$

i općenito

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi. \blacksquare$$

Vidimo da se izrazi za derivaciju dobivaju formalnim deriviranjem po parametru z:

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d}{dz}\left(\frac{f(\xi)}{\xi-z}\right)d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi.
\end{aligned}$$

***

Formula (9) može se koristiti u računanju integrala Cauchyjevog tipa:

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(a), \tag{10}$$

no ove i slične integrale računat ćemo mnogo jednostavnije primjenom računa ostataka. Ilustrirajmo primjenu Teorema 3 na nekoliko primjera.

Primjer 3. Izračunajmo integral po zadanoj krivulji:

A. $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\cos z}{(z-i)^3}\,dz, \quad \Gamma \ldots |z| = 2;$ **B.** $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z\,dz}{z^4-1}, \quad \Gamma \ldots |z-2| = 2;$

C. $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^z}{z^2-1}, \quad \Gamma$ okružuje točke $+1$ i -1.

▷ **A.** Krivulja Γ obuhvaća točku $a = i$, $f(z) = \cos z$ je analitička svuda. Formula (10) daje

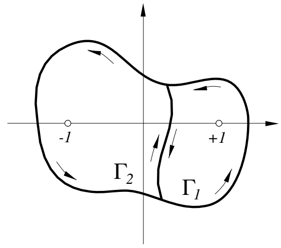
$$\int_\Gamma \frac{\cos z}{(z-i)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}(\cos z)''_{z=i} = \pi i(-\cos i) = -i\pi \operatorname{ch} 1.$$

B. Stavimo $f(z) = \dfrac{z}{z^3 + z^2 + z + 1}$. Γ obuhvaća točku $a = 1$:

$$\int_\Gamma \frac{z\,dz}{z^4 - 1} = \int_\Gamma \frac{f(z)dz}{z - 1} = 2\pi i f(1) = \frac{\pi i}{2}.$$

C. U ovom slučaju moramo rastaviti integral po krivulji Γ na dva integrala po krivuljama Γ_1, Γ_2 (sl. 8.9) i tek potom iskoristiti Cauchyjevu integralnu formulu:

$$\int_\Gamma \frac{e^z\,dz}{z^2 - 1} = \int_{\Gamma_1} \frac{e^z}{z+1} \cdot \frac{dz}{z-1} + \int_{\Gamma_2} \frac{e^z}{z-1} \cdot \frac{dz}{z+1}$$
$$= 2\pi i \left(\frac{e^1}{1+1} + \frac{e^{-1}}{-1-1} \right) = 2\pi i \operatorname{sh} 1.$$



Sl. 8.9.

* * *

Za funkciju $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ kažemo da je **cijela** ako je analitička na čitavom $\mathbf{C}$. Na primjer, sinus, kosinus, eksponencijalna funkcija i polinomi su cijele funkcije. Dokažimo jedan važan teorem za takve funkcije.

Liouvilleov teorem

Teorem 5. *Ako je f cijela funkcija i ako je ograničena na $\mathbf{C}$:*

$$|f(z)| \leqslant M, \quad \forall z \in \mathbf{C},$$

tada je f konstantna.

DOKAZ. Neka je C_R kružnica sa središtem u bilo kojoj točki $z \in \mathbf{C}$, polumjera R. Za svaki $R > 0$ vrijedi, prema (10):

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Zato

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{C_R} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} ds \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{M}{R}.$$

Kako je R po volji velik, onda mora biti $f'(z) = 0$ za svaki z. Odavde slijedi tvrdnja.

Primjer 4. Funkcija $w = \sin z$ je cijela. Zato $|\sin z|$ ne može biti ograničena, tj. za svaki $M > 0$ postoji $z_0 \in \mathbf{C}$ takav da je $|\sin z_0| > M$.

Osnovni stavak algebre

Teorem 6. *Svaki polinom stupnja $n \geqslant 1$ ima barem jednu nul-točku (i stoga točno n nul-točaka, računajući im kratnosti).*

DOKAZ. Kad polinom P_n ne bi imao nul-točaka, tada bi funkcija $z \mapsto \dfrac{1}{P_n(z)}$ bila analitička u čitavoj kompleksnoj ravnini $\mathbf{C}$, dakle, cijela. Međutim, $\dfrac{1}{P_n(z)}$ bila bi i omeđena (dokaži zašto!), i po Liouvilleovom teoremu slijedilo bi $P_n = \text{const}$.

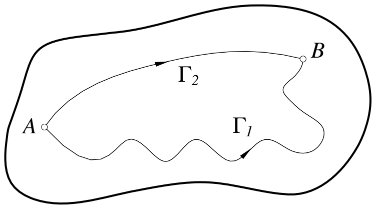
Neodređeni integral

Neka je f analitička funkcija u jednostruko povezanom području G i Γ zatvorena Jordanova krivulja sadržana u G. Tada prema Cauchyjevom teoremu vrijedi

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 0. \tag{11}$$

Kao posljedicu ovog osnovnog rezultata dobivamo činjenicu da integral analitičke funkcije ne ovisi o putu integracije. Neka su A, B zadane točke unutar G i Γ_1, Γ_2 dvije krivulje koje spajaju točke A, B (i leže unutar G). Tada vrijedi

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$



Sl. 8.10. Integral funkcije koja je analitička na području G ne ovisi o putu integracije, već samo o početnoj i završnoj točki. Pritom ne smijemo zaboraviti da put integracije mora ležati unutar G; taj integral dakle ovisi o području G

Neka je f cijela funkcija (analitička u čitavoj kompleksnoj ravnini $\mathbf{C}$). Tada ovaj integral možemo kratko označavati sa $\int_A^B f(z)dz$, jer on ovisi samo o točkama A i B (budući je funkcija analitička na svakom području G u kompleksnoj ravnini).

Neka su z_0, z po volji odabrane točke. Onda je dobro definirana funkcija

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz.$$

Nju nazivamo **neodređeni integral** funkcije f. To je analitička funkcija za koju vrijedi $\Phi'(z) = f(z)$. Najčešće pišemo kratko $\Phi(z) = \int f(z)dz$.

Primjer 5. Izračunaj integral $\displaystyle\int_\Gamma (4z - 3z^2)dz$ po dužini Γ koja spaja točke $z_1 = 1$ i $z_2 = i$.

▷ Podintegralna funkcija $f(z) = 4z - 3z^2$ je analitička u čitavoj kompleksnoj ravnini. Integral zato neće ovisiti o putu integracije i vrijedit će Newton–Leibnitzova formula:

$$\int_1^i (4z - 3z^2)dz = (2z^2 - z^3)\Big|_1^i = -3 + i. \quad \triangleleft$$

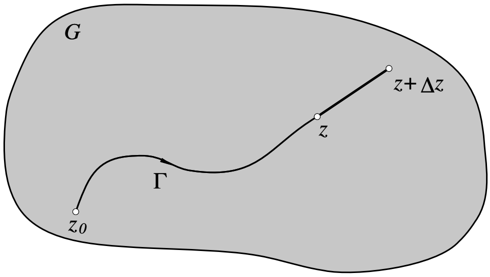
Da bi Φ bila definirana, ne treba zahtijevati analitičnost funkcije f, već je dovoljno da bude ispunjeno $\int_\Gamma f(z)dz = 0$ za svaku zatvorenu krivulju $\Gamma \subset G$. No, tada je f ipak analitička, što pokazuje ovaj teorem, u izvjesnom smislu obrat Cauchyjevog:

Teorem 7. (Morera) *Neka je f neprekinuta funkcija unutar jednostruko suvislog područja G, takva da je integral po bilo kojoj zatvorenoj krivulji $\Gamma \subset G$ jednak nuli. Tada je*

$$\Phi(z) := \int_{z_0}^{z} f(z)dz$$

analitička funkcija i vrijedi $\Phi'(z) = f(z)$. Specijalno, i f je analitička.

DOKAZ. Definicija funkcije Φ je dobra jer integral ne ovisi o putu integracije. Izaberimo sada takav put integracije od z_0 do $z + \Delta z$, takav da je dio između z i $z + \Delta z$ baš spojnica tih dviju točaka (slika 8.11):



Sl. 8.11.

$$\frac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi$$

Zato je

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} - f(z)\right| &= \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z} [f(\xi) - f(z)]d\xi\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|\Delta z|}\max_{\xi \in (z, z+\Delta z)} |f(\xi) - f(z)| \cdot |\Delta z| < \varepsilon\end{aligned}$$

za dovoljno mali Δz, jer je f neprekinuta.

Dakle, $\Phi'(z)$ postoji i vrijedi $\Phi'(z) = f(z)$. Zato je Φ analitička (ima neprekinutu derivaciju na području G). Prema tome je i f, kao derivacija od Φ, analitička funkcija, prema Teoremu 4. ■

Princip maksimuma

Izvedimo sada tzv. teorem srednje vrijednosti. Vrijedi

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}d\xi$$

Parametarska jednadžba kružnice C_R je

$$C_R \qquad \dots \qquad \xi = z_0 + Re^{i\varphi}, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

Zato je

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\varphi}) Rie^{i\varphi}}{z_0 + Re^{i\varphi} - z_0} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi \end{aligned}$$

Teorem 8. (Princip maksimuma) *Neka je f analitička funkcija u području G i neprekinuta na $\overline{G}$. Tada se maksimalna vrijednost od $|f(z)|$ poprima na rubu područja G.*

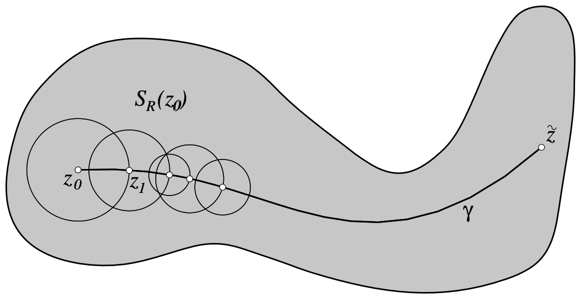
DOKAZ. Vrijedi $|f(z)| = \sqrt{u(x,y)^2 + v(x,y)^2}$ i zato je $|f(z)|$ neprekinuta funkcija pa mora poprimiti svoju maksimalnu vrijednost u nekoj točki $z_0 = x_0 + iy_0 \in \overline{G}$. Ako je z_0 na rubu područja G, nemamo što dokazivati. Pokazat ćemo sljedeće, ako je z_0 nutarnja točka od G, tada je f konstanta (i s tim poprima svoj maksimum i na rubu od G).

Pretpostavimo da je $z_0 \in \operatorname{Int} G$. Tada postoji R-okolina $S_R(z_0) \subset G$. Prema teoremu o srednjoj vrijednosti imamo:

$$\begin{aligned} 2\pi M = 2\pi |f(z_0)| &= \left| \int_0^{2\pi} f(\xi) d\xi \right| \\ &\leqslant \int_0^{2\pi} |f(\xi)| d\xi \leqslant 2\pi M. \end{aligned}$$

Zato svuda mora vrijediti znak jednakosti. Prema tome, vrijedi $|f(\xi)| = M$ za sve $\xi \in S_R(z_0)$ (inače bi vrijednost integrala bila manja od $2\pi M$, zbog neprekinutosti).

Dakle, $|f(z)| = M$ na svakom krugu sa središtem u z_0 koji leži u G. Pokažimo da je $|f(z)| = M, \quad \forall z \in G$. Neka je $\tilde{z} \in G$ bilo koji. Područje G je putovima povezano. Povežimo z_0 sa $\tilde{z}$ pomoću krivulje γ (slika 8.12).



Sl. 8.12.

Vrijedi $|f(z)| = M$ za sve $z \in \overline{S_{R_0}(z_0)}$. Izaberimo $z_1 \in \gamma \cap \partial S_{R_0}(z_0)$. Tada je po gornjem $|f(z_1)| = M$ i stoga $|f(z)| = M, \forall z \in S_{R_1}(z_1)$. Nastavljajući proces, nakon nekoliko koraka doći ćemo do točke $\tilde{z}$. ■

Zadaci za vježbu

8.1. Izračunaj sljedeće krivuljne integrale:

A. $\displaystyle\int_\Gamma e^z dz$, Γ : parabola $y = x^2$ koja spaja točke $z_1 = 0$ i $z_2 = 1 + i$;

B. $\displaystyle\int_\Gamma e^z dz$, Γ : dio pravca od točke $z_1 = 0$ do $z_2 = 1 + i$;

C. $\displaystyle\int_\Gamma (z^2 + z\,\overline{z})dz$, Γ : luk kružnice $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$;

D. $\displaystyle\int_\Gamma z \sin z\, dz$, Γ : dio pravca od točke $z_1 = 0$ do $z_2 = 1 + i$.

8.2. Izračunaj sljedeće integrale integrirajući po zadanim krivuljama u pozitivnom smjeru:

A. $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2 + 16}$;

B. $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z \cos \pi z}{z^2 + 2z}\, dz$;

C. $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z \operatorname{sh} z}{z^3}\, dz$;

D. $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2 + 1}\, dz$.