1.

Znanstvene metode u matematici

Metodika[1] matematike definira se kao predmet koji nas uči kako predavati matematiku da bi zaživjeli zadaci nastave matematike — naobrazbeni, odgojni i praktični.

Međutim, onom tko očekuje niz gotovih pravila kojima će ostvariti zadatke nastave matematike, može se odgovoriti izrekom: "U poučavanju matematike nema kraljevskog puta[2]". Čemu onda trud?

Po trnovitom putu učenja i poučavanja ipak postoje makar i male prečice. To su izvjesna pravila ponašanja i načini poučavanja koji generacijama prikupljani osiguravaju kvalitetnija znanja. Pravilima ponašanja može se:

- prigušiti negativne utjecaje na učenje kojima je učenik izložen (neimaština, rat, bolest, gubitak najdražih, promjena sredine pod prisilom...);
- poticati radoznalost kod učenika vedrim raspoloženjem i zanimljivim zadacima;
- ukazivati na svrhu savladavanja pojma — kad god je to moguće;
- uputiti učenike na aktivno otkrivanje pojmova;
- podizati njihovu izdržljivost na ozbiljnom putu do "otkrića";
- predusresti tipične pogreške;
- ulijevati pohvalom i ocjenom samopouzdanje i samopoštovanje;
- obratiti pozornost na konkretna djela u književnosti, likovnoj umjetnosti i kiparstvu, iz kojih je vidljivo da matematika nije samo znanost nego i umjetnost.

Dakle, možemo organizirati nastavu koja će biti iščekivanje, radost i mogućnost potvrde radom. Važno je da za svakog učenika priredimo uvjete u kojima će moći napredovati do najvišeg stupnja svojih sposobnosti.

Pokazalo se da postoji suodnos između naobrazbenih postignuća u nastavi i matematičke izobrazbe nastavnika, te njegove spremnosti na samoizobrazbu. Stoga ćemo sustavno raditi na matematičkoj naobrazbi.

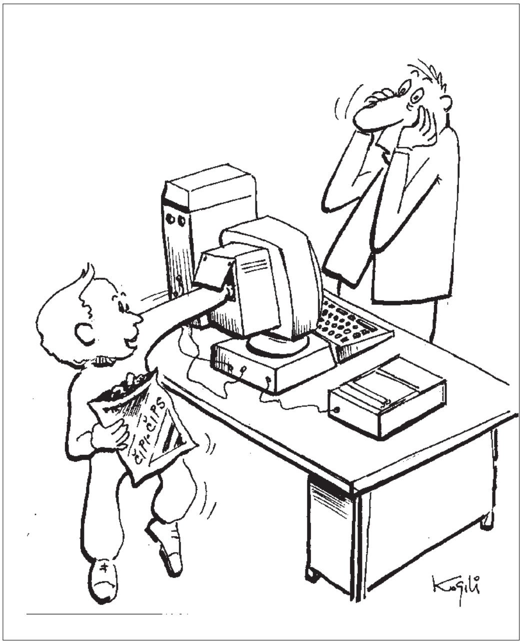
Planiranje, organizacija i provjera postignuća neobično je važan dio nastavnikovih sveukupnih obveza.

---

[1] *Methodos* (grč.) planski postupak

[2] Parafraza Euklidove izreke. Priča se da je na Ptolomejovo pitanje: "Zar nema kraćih i lakših metoda za ovladavanje geometrijom od onih koji su dani u Elementima?", Euklid odgovorio — U geometriji nema kraljevskog puta.

Plan i program nastave matematike propisuje Ministarstvo prosvjete i športa. Odgojna svrha nam je pomoći djetetu da izraste u slobodnu osobu koja će pri rješavanju problema biti spremna ispitati razne mogućnosti i koja će istrajati na započetom. U ostvarivanju odgojne svrhe pomoći će nam spoznaja o izboru znanstveno-istraživačkih metoda uglednih znanstvenika pri značajnim otkrićima u matematici. Implementaciju tih metoda u nastavu provest ćemo pozornim izborom tema i zadataka iz programa matematike. Pri tome ćemo govoriti o različitim matematičkim pojmovima. Da bismo se razumjeli o pojmu trebamo jednako misliti.



-Tata, pa rekao si da ne može proraditi dok mu ne nabaviš još jedan ČIPS!

Preciznije rečeno, važno je znati kako je pojam o kojem govorimo definiran.

Naime, o svakom matematičkom pojmu znamo više no što je dano podataka o tom pojmu u definiciji. Svako svojstvo pojma, izvan definicije, smatra se tvrdnjom koju treba dokazati na osnovi definicije i elementarnijih tvrdnji grane matematike u kojoj se krećemo.

Izbor svojstava kojima će se pojam definirati, ujedno određuje i to da će se sva druga svojstva o tom pojmu dokazivati. Kako taj izbor nije jednoznačan i tu može doći do nesporazuma.

U udžbenicima osnovne škole ne ističemo definicije. Razumijevamo da prvi izričaj o pojmu predstavlja definiciju tog pojma. Svaku daljnju tvrdnju o tom pojmu obrazlažemo pomoću definicije i nekih već prije dokazanih tvrdnji.

Najčešće srećemo dvije vrste definicija.

Veliki dio pojmova genetički je opisan. Genetička definicija govori o načinu nastajanja pojma koji se definira, što se da naslutiti iz naziva genetičke[1] definicije. Primjeri genetičkih definicija su definicije kružnice i dijagonale četverokuta.

Definicija 1. **Kružnica** *je skup svih točaka ravnine jednako udaljenih od jedne čvrste točke te iste ravnine.*

Definicija 2. **Dijagonala četverokuta** *je dužina koja spaja suprotne vrhove četverokuta.*

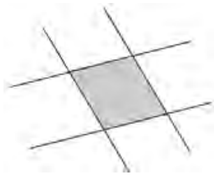
Pojam možemo promatrati kao specifičan slučaj nekog šireg pojma. U takvoj definiciji važno je istaknuti viši, rodni pojam, tzv. *genus proximum* kojemu definirani pojam potpada i specifičnu razliku ili više njih, tzv. *diferentia specifica*, po kojima se definirani pojam bitno razlikuje od svih drugih pojmova koji pripadaju istom višem rodnom pojmu.

Uzet ćemo za primjer definiciju romba.

Definicija 3. **Romb** *je paralelogram kojemu su sve četiri stranice jednake.*

Ovom definicijom prepoznat ćemo romb ako smo usvojili pojam paralelograma. Paralelogram kao "stariji" pojam obuhvaća i romb, koji se — po tome što su mu sve četiri stranice jednake — bitno razlikuje od drugih pojmova koje okuplja pojam paralelograma.

Pojam paralelograma u osnovnoj školi prvi put srećemo u V. razredu kao presjek dviju pruga.



Za definiciju paralelograma uzeli smo izričaj:

Definicija 4. **Paralelogram** *je četverokut kojemu su parovi suprotnih stranica paralelni.*

Proučavajući paralelogram vidjeli smo da je moguće dokazati sljedeća svojstva paralelograma:

Tvrdnja 1. *Paralelogram je četverokut kojemu su dvije i dvije suprotne stranice jednake duljine.*

Tvrdnja 2. *Paralelogram je četverokut kojemu su dvije suprotne stranice paralelne i jednakih duljina.*

Tvrdnja 3. *Paralelogram je četverokut kojemu se dijagonale raspolavljaju.*

Istaknimo da je bilo koja od tvrdnji 1, 2 ili 3 mogla dobro poslužiti kao definicija paralelograma, ali bi se tada preostale tvrdnje i definicija iz ovog primjera morale dokazivati.

Nakon što smo usvojili definiciju romba, možemo dokazati sljedeće svojstvo romba:

[1] *genesis* (grč.) znači nastajanje, podrijetlo

Tvrdnja 4. *Dijagonale romba su okomite.*

Na satovima matematike velik dio vremena provodimo rješavajući zadatke. Naučiti riješiti zadatak znači više od brojčanog rezultata, obavljene konstrukcije, dokazane tvrdnje... To je način reagiranja.

U krajnjem slučaju, nastavnik matematike odgaja učenika kako se postaviti prema najrazličitijim problemima u najširem smislu te riječi. Naučiti rješavati zadatke znači ne samo naobrazbeni nego i odgojni pomak u oblikovanju osobnosti.

Nužni, ali ne i dovoljni uvjeti koje treba ispuniti rješavač ako želi uspješno riješiti neki zadatak, vidljivi su iz sljedećeg:

- razumijevanja svake riječi u zadatku;
- sposobnosti izdvajanja zadanih elemenata, odnosno pretpostavki;
- jasnoga izrijeka onoga što treba naći, konstruirati, dokazati, tj. izrijeka tvrdnje.

Ako je rješavač nastavnik, on mora poznavati predznanje svojih učenika.

Rješenje je ispravno ako su iskorištene sve pretpostavke iz zadatka i korektno dokazan svaki korak na putu do rješenja.

Točna rješenja su dobra, bolja ili najbolja ovisno o originalnosti ideje rješenja, o duljini dokaza, eleganciji dokaza itd.

Ako imamo pred sobom rješenje nekog zadatka u nastavnikovoj pripremi za sutrašnji sat, onda rješenje zadatka mora biti prilagođeno učeničkom predznanju i provedeno metodama koje su učenicima poznate.

Osim naobrazbene i odgojne svrhe, pred nama je i sasvim praktična svrha nastave matematike.

U današnjem svijetu brzih informacija, sredstva javnog priopćavanja često posežu za grafičkim prikazima u ekonomiji, politici, statistici...

U raznim granama znanosti i tehnike ovisnost dvaju ili više parametara predočava se u međusobnoj zavisnosti. Praćenje moderne umjetnosti traži i neka matematička i informatička predznanja.

U ovom poglavlju okupljen je izvjestan broj putova do otkrića vrsnih znanstvenika i predavača matematike iz bliže i dalje povijesti.

Upoznavanje s njihovim iskustvima želi pridonijeti većoj sigurnosti, samopouzdanju i naravno većoj učinkovitosti nastave od od one stečene metodom pokušaja i pogrešaka.

1.1. Metoda matematičke indukcije

Uočavajući ista svojstva koja pokazuju neki elementi promatranog skupa, skloni smo zaključiti da svaki element tog skupa ima to isto svojstvo. Ovakav način zaključivanja u kojem promatranjem pojedinačnih slučajeva donosimo općenite zaključke zovemo indukcijom.

U mnogim znanostima zaključci doneseni na temelju razmatranja konačnog broja pojedinačnih slučajeva prihvaćaju se istinitima i ne podvrgavaju daljnjim dokazivanjima (medicina, društvene znanosti, meteorologija, fizika, biologija, poljoprivreda, ...). Matematičar će opću zakonitost do koje je došao indukcijom zvati hipotezom. Matematičar zna da hipotezu treba dokazati. Naime, mnogi primjeri iz matematike pokazuju da hipoteze do kojih se došlo induktivnim zaključivanjem znaju biti netočne. Stoga način zaključivanja u kojem promatranjem pojedinačnih slučajeva postavljamo opće zakonitosti zovemo nepotpunom indukcijom. Nepotpuna indukcija nema snagu dokaza, ali pomaže da iz posebnih slučajeva dobijemo više ili manje vjerojatne hipoteze, pa ima svoju vrijednost kako u matematičkim istraživanjima tako i u nastavi matematike.

U povijesti matematike poznato je više slučajeva kada su i najveći matematičari objavljivali općenite tvrdnje do kojih su došli nepotpunom indukcijom, a da nisu proveli dokaz. Samo neke od tih tvrdnji preživljavale su strog matematički dokaz i pokazale se istinitima. Za neke tvrdnje do kojih se došlo nepotpunom indukcijom pronađen je kontraprimjer. Kontraprimjerom zovemo onaj primjer koji pokazuje da tvrdnja za koju smo mislili da je opća nije istinita.

Evo crtice iz stvaralačkog života velikog francuskog matematičara P. Fermata (1601.–1665.) iz koje ćemo naučiti dvije stvari:

- hipoteze donesene induktivnim načinom zaključivanja znaju biti netočne;
- što je kontraprimjer.

Primjer 1. *P. Fermat izrekao je hipotezu da su svi brojevi oblika* $2^{2^{n-1}}+1$*, za svaki* $n \in \mathbf{N}$*, prosti brojevi. Kako je to mogao zaključiti?*

Izračunajmo vrijednost izraza $2^{2^{n-1}}+1$ za $n=1$ i $n=2$.

n	1	2
$2^{2^{n-1}}+1$	$2^{2^0}+1=3$	$2^{2^1}+1=5$

Iz ovih rezultata vidimo da su brojevi oblika $2^{2^{n-1}}+1$ za $n=1$ i $n=2$ neparni i prosti.

Nastavi li se računati vrijednost promatranog izraza za $n=3$ i $n=4$, imamo:

n	3	4
$2^{2^{n-1}}+1$	$2^{2^2}+1=17$	$2^{2^3}+1=257$

U slučajevima kad je $n=1,2,3,4$ P. Fermat uočava da je broj $2^{2^{n-1}}+1$ prost broj. Odlučuje svoju slutnju provjeriti još za $n=5$. Računanjem se uvjerio da je za

$n = 5$, broj $2^{2^4} + 1 = 65537$ također prost broj i tada obznanjuje svoju hipotezu da su svi brojevi oblika $2^{2^{n-1}} + 1$, za svaki $n \in \mathbf{N}$, prosti brojevi.

Da je kojim slučajem P. Fermat živio u sadašnjem vremenu sigurno ne bi objavio svoju hipotezu. Jednostavnim programom ispitao bi je li broj $2^{2^{n-1}} + 1$ prost broj kad n prolazi skupom prirodnih brojeva. Računalom bi u trenu provjerio da je već za $n = 6$, broj $2^{2^5} + 1 = 4294967297$ složen broj. Evo kako to postižemo programom *Mathematica*:

```
f[n_]:=(21 21 (n-1))+1
Do[Print[PrimeQ[f[n]],{n,1,10}]]
```

$$f(n) = 2^{2^{(n-1)}} + 1$$

n	f(n)	prost/složen
1	3	PROST
2	5	PROST
3	17	PROST
4	257	PROST
5	65537	PROST
6	4294967297	SLOŽEN
7	1,84467E+19	SLOŽEN
8	3,40282E+38	SLOŽEN
9	1,15792E+77	SLOŽEN
10	1,3408E+154	SLOŽEN

Ovako je prošlo stotinjak godina od Fermatove hipoteze, kad je u XVIII. st. švicarski matematičar L. Euler $(1707. – 1783.)$ pronašao kontraprimjer za Fermatovu hipotezu. Naime, za $n = 6$, broj $2^{2^5} + 1 = 4294967297$ može se napisati u obliku $641 \cdot 6700417$, što znači da je taj broj složen, odnosno da $2^{2^{n-1}} + 1$ nije prost broj za svaki prirodni broj n.

Neiskusan pronalazač ili učenik mogao bi "prigovoriti" Fermatu da je hipotezu donio na osnovi premalog broja slučajeva. No, pitamo se — postoji li uopće, i ako postoji, koji je to optimalan broj pojedinačnih slučajeva nakon kojega možemo sa sigurnošću zaključivati nepotpunom indukcijom?

Proučimo neke vrijednosti jednog polinoma.

Primjer 2. *Zadan je polinom $f(x) = x^2 - x + 41$. Izračunajmo vrijednosti tog polinoma za $x = 1, 2, \ldots, 10$. Što se može reći o vrijednostima tog polinoma kad x prolazi skupom prirodnih brojeva?*

Napravimo tablicu:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	41	43	47	53	61	71	83	97	113	131

U prvom trenutku vidimo da su sve vrijednosti polinoma $f(x)$ za $x = 1, 2, \ldots, 10$ neparni brojevi. Promotrimo li još pažljivije tablicu vidimo da su to prosti brojevi.

Možemo li izreći hipotezu da je vrijednost polinoma $f(x) = x^2 - x + 41$ prost broj za svaki $x \in \mathbf{N}$?

Da ne bismo prebrzo donijeli hipotezu odlučujemo se računati vrijednost polinoma za $x = 11, 12, \ldots, 20$. Popunjavamo tablicu:

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(x)$	151	173	197	223	251	281	313	347	383	421

Ovdje je već potrebno dosta truda kako bi se provjerilo da su navedene vrijednosti polinoma $f(x)$ zaista prosti brojevi. Izlaz je opet u programskom jeziku *Mathematica*. Uvjerimo se da su sve vrijednosti polinoma $f(x) = x^2 - x + 41$ za $x = 1, 2, \ldots, 20$ prosti brojevi.

```
f[n_]:=n1 2-n+41
Do[Print[PrimeQ[f[n]]],{n,1,20}]
```

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(n)	41	43	47	53	61	71	83	97	113	131
prost/složen	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
f(n)	151	173	197	223	251	281	313	347	383	421
prost/složen	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P

Ispitali smo četiri puta više pojedinačnih slučajeva no što je to Fermat učinio u slučaju opisanom u prethodnom primjeru. Možemo li postaviti hipotezu:

Vrijednost polinoma $f(x) = x^2 - x + 41$ je prost broj za svaki prirodni broj?

Programskim jezikom *Mathematica* lako možemo provjeriti vrijednosti polinoma i za veće n od 20.

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
f(n)	461	503	547	593	641	691	743	797	853	911
prost/složen	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
971	1033	1097	1163	1231	1301	1373	1447	1523	1601	1681
P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	S

Hipoteza je točna do $n = 40$. No, za $n = 41$, $f(41)$ nije prost broj. Zaista $f(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$, a to sigurno nije prost broj jer je djeljiv s 41. Hipoteza se ruši kao kula od karata, a marljivo smo proanalizirali čak četrdeset posebnih slučajeva. Slučaj za $n = 41$ predstavlja kontraprimjer hipoteze da je vrijednost polinoma $f(x) = x^2 - x + 41$ prost broj za svaki prirodni broj.

Proučavajući vrijednost spomenutog polinoma kad x prolazi skupom prirodnih brojeva, još smo jednom vidjeli što je kontraprimjer. Sada je jasnije da hipoteze do kojih se došlo induktivno ne možemo smatrati istinitima za sve $n \in \mathbf{N}$, ma kako bio velik broj pojedinačnih slučajeva sa svojstvom iz hipoteze. Matematičar treba dokazati svaku hipotezu, pa i onu do koje je došao nepotpunom indukcijom.

Pri dokazivanju hipoteza ili matematičkih tvrdnji koje ovise o prirodnom broju n prikladno je dokaz provesti metodom matematičke indukcije ili principom potpune indukcije što su dva naziva za istu stvar.

Važno je, dakle, razlikovati način zaključivanja izložen u primjerima 1 i 2, kojeg zovemo indukcijom, od metode dokazivanja na principu matematičke indukcije.

Dokaz metodom matematičke indukcije počinje provjerom vrijedi li tvrdnja za $n = 1$. To je baza indukcije. Nakon toga slijedi važan korak u dokazu. Pretpostavljamo da hipoteza vrijedi za neki $n = k$. Uspijemo li pokazati valjanost tvrdnje pri prijelazu od k na idući $k + 1$ broj tada je tvrdnja valjana ili istinita za svaki prirodni broj. To je korak indukcije.

* * *

Iz iskustva znamo da dokazivanje metodom matematičke indukcije većini srednjoškolaca čini teškoću. Ta teškoća može biti posljedica bar triju problema:

- učenik nije savladao matematičko pismo, pa ne razumije što treba dokazati;
- učenik ne razumije zašto mora dokazivati hipotezu koja se pokazuje točnom za proizvoljno birane prirodne brojeve;
- čak i kad uvjerimo učenika u nužnost dokazivanja hipoteze korak u kojem dokazujemo valjanost hipoteze pri prijelazu od k-tog na $k+1$ broj za većinu je dugo nerazumljiv.

Što je didaktički lijek u ovim slučajevima?

- Učenicima ponuditi više primjera matematičkih zapisa na kojima će oni vježbati čitanje i razumijevanje matematičkih simbola.
- Ukazati mu na primjere koji govore da se hipoteze donesene induktivnim razmišljanjima (a takva su upravo ona u bazi indukcije) mogu pokazati i netočnima.
- Treba otvoreno reći da je većina ljudi u prvom susretu s dokazom metodom matematičke indukcije imala problema baš u tom važnom koraku od k-tog na $k + 1$ broj.

Teškoće se savladavaju stalnim razjašnjavanjem metode na više primjera. Svaki učenik osjetit će čas ugode kad konačno shvati bit te metode. Hoće li se to dogoditi nakon izrade većeg ili manjeg broja primjera, i hoće li se to ikada dogoditi, ovisi o motivaciji učenika, o količini energije i žara koju je spreman uložiti u savladavanje problema.

Zamislimo da srednjoškolac treba riješiti sljedeći zadatak.

Primjer 3. *Dokaži metodom matematičke indukcije da za svaki prirodni broj vrijedi*

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

Ako učenik stoji pred zadatkom i ne zna kako krenuti, zamolimo ga da obrazloži zadatak riječima. Čak i ako uspije izreći da treba naći sumu brojeva oblika $2k - 1$ kad k prolazi skupom prirodnih brojeva od 1 do n i pokazati da je to n^2, moguće je da je upamtio riječi koje učitelj izgovara dok čita ovakvu formulu, ali iza tog formalnog znanja učenika ne stoji stvarno razumijevanje onoga što je formulom zapisano. Kako to provjeriti?

Zamolit ćemo ga da napiše tvrdnju zadatka za slučaj kad je $n = 1$. Vjerojatno će točno zapisati da je

$$2 \cdot 1 - 1 = 1^2.$$

Račun pokazuje da je ta jednakost točna. Sada dolazi kritičan trenutak. Zamolit ćemo ga da ispiše tvrdnju za slučaj $n = 2$. Najvjerojatnije će napisati: $2 \cdot 2 - 1 = 2^2$.

Račun pokazuje da ova jednakost nije točna a učitelju ova jednakost otkriva da učenik ne razumije zapis tvrdnje. Učenika treba podsjetiti da lijeva strana formule govori o zbrajanju više pribrojnika $2k - 1$, a koliko će takvih pribrojnika biti ovisi o izabranom broju n. Ako je npr. $n = 2$, onda je $k = 1$ i $k = 2$, a desna strana jednakosti je broj 2^2. Trebalo bi navesti učenika da za slučaj $n = 2$ zadanu tvrdnju zapiše u obliku

$$(2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) = 2^2.$$

Nakon ovoga će vjerojatno ići zapis tvrdnje za slučaj $n = 3$:

$$(2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) = 3^2.$$

Još uvijek radimo na razumijevanju poruke u zadanoj tvrdnji. Čak ni ne provjeravamo račun. Želimo s učenikom otkriti značenje izraza

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$$

i napisati ga na drugi način. Tek kad zadatak uspijeva zapisati u obliku

$$(2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + \ldots + (2 \cdot n - 1) = n^2$$

razumije zapis zadane tvrdnje

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

S ovim zadatkom učenik se trebao sresti još u početnoj nastavi matematike.

* * *

Kad uvježbavamo zbrajanje u **N**, zadajemo učenicima u početnoj nastavi matematike zadatak

$$\begin{array}{lcr} 1 + 3 & = & 4 \\ 1 + 3 + 5 & = & 9 \\ 1 + 3 + 5 + 7 & = & 16 \end{array}$$

Tražimo da predvide sljedeći red zadatka:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$$

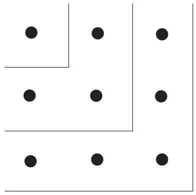
Upućujemo ih da pozorno promotre desnu stranu tih jednakosti.

Što primjećuju?

Desnu stranu možemo zapisati kao umnožak dvaju jednakih faktora.

$$\begin{array}{lcrcl} 1 + 3 & = & 4 & = & 2 \cdot 2 \\ 1 + 3 + 5 & = & 9 & = & 3 \cdot 3 \\ 1 + 3 + 5 + 7 & = & 16 & = & 4 \cdot 4 \\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 & = & 25 & = & 5 \cdot 5 \end{array}$$

Predlažemo im grafičku interpretaciju ovog zadatka



$$\begin{array}{lcl} 1 & = & 1 \\ 1+3 & = & 4 \\ 1+3+5 & = & 9 \end{array}$$

Neka nastave sami računati i crtati.

* * *

U završnim razredima osnovne škole učenici koji su u početnoj nastavi matematike rješavali ovaj i slične zadatke, brže će osvajati iznova svaki redak ovakvog zadatka. Otići će u rješavanju korak dalje i poopćiti zadatak:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Tvrdnja zadatka odnosi se na prirodni broj n, pa je prikladno za dokaz tvrdnje odabrati metodu potpune indukcije. Dokaz provodimo u srednjoj školi. Provjeravamo pojedinačne slučajeve.

Iako je u bazi dovoljno provjeriti slučaj $n = 1$, radi boljeg razumijevanja osjetljivog prijelaza sa k-tog na $k + 1$ broj tražit ćemo da se u bazi provjere još slučajevi za $n = 2$ i $n = 3$.

U bazi indukcije uvjeravamo se:

- Za $n = 1$, jednakost $2 \cdot 1 - 1 = 1^2$ je točna. Kažemo da je tvrdnja zadatka istinita za $n = 1$.
- Za $n = 2$, jednakost $(2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) = 2^2$ je točna. Kažemo da je tvrdnja zadatka istinita za $n = 2$.
- Za $n = 3$, jednakost $(2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) = 3^2$ je točna. Kažemo da je tvrdnja zadatka istinita za $n = 3$.

Kad učenik shvati kako formula funkcionira najčešće ne vidi svrhu dokazivanja. Na neophodnost dokazivanja ukazuje mu se primjerima kad hipoteza odolijeva do nekog n_0, a iza toga pokazuje se netočnom kao što je to slučaj u primjeru 2. Sada dolazi najvažniji trenutak u dokazu koji provodimo matematičkom indukcijom. Treba pokazati kako iz pretpostavke da je tvrdnja ispravna za neki prirodni broj $n = k$ nužno sljedi da je ona ispravna i za sljedeći prirodni broj $n = k + 1$. Uspijemo li to dokazati značit će da je tvrdnja istinita za sve prirodne brojeve. U našem primjeru to možemo učiniti ovako:

Pretpostavka je da za $n = k$,

$$(2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + \ldots + (2 \cdot k - 1) = k^2$$

formula vrijedi.

Još ne znamo ostaje li tvrdnja valjana ako prijeđemo od bilo koje vrijednosti $n = k$ na iduću vrijednost $n = k + 1$. Prema prethodnoj formuli, slučaj kada je $n = k + 1$ mogao bi se ovako zapisati

$$(2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + \ldots + (2 \cdot k - 1) + (2 \cdot (k + 1) - 1) = (k + 1)^2.$$

Ovo ćemo jednostavno provjeriti. Oduzmemo li od ove posljednje formule onu prijašnju dobit ćemo

$$2(k + 1) - 1 = (k + 1)^2 - k^2.$$

Malim računom uvjerimo se da je

$$2k + 1 = 2k + 1.$$

Naša formula izdržala je provjeru. Razjasnimo točno što znači ta provjera. Mi smo nesumnjivo pokazali da je

$$2(k + 1) - 1 = (k + 1)^2 - k^2.$$

Još ne znamo vrijedi li

$$(2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + \ldots + (2 \cdot k - 1) = k^2.$$

No, ako bismo znali da je to ispravno, mogli bismo nakon zbrajanja s jednakošću koju smo nesumnjivo dokazali, zaključiti da je

$$(2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + \ldots + (2 \cdot k - 1) + (2 \cdot (k + 1) - 1) = (k + 1)^2$$

također ispravno, a to je upravo tvrdnja za sljedeći prirodni broj $n = k + 1$. Mi, međutim, znamo da tvrdnja formule vrijedi za $n = 1, 2, 3$. Zbog prethodnog dokaza mora vrijediti i za $n = 4$. Ako vrijedi za $n = 4$, mora vrijediti i za $n = 5$ itd. Ona vrijedi za sve n. Opća valjanost zadane formule je dokazana.

Primjer 4. *Dokaži metodom matematičke indukcije da je za svaki prirodni broj n, broj $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ djeljiv sa 7.*

U bazi indukcije provjeravamo da je tvrdnja istinita za $n = 1$, tj. da je broj $2^{1+2} + 3^{2 \cdot 1+1} = 8 + 27 = 35$ djeljiv sa 7. Dobro je vidjeti da li tvrdnja vrijedi za $n = 2$, tj. da li je broj $2^{2+2} + 3^{2 \cdot 2+1} = 16 + 243 = 259$ djeljiv sa 7. No, $259 : 7 = 37$, pa tvrdnja vrijedi i za $n = 2$.

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita i za $n = k$, tj. da je broj $2^{k+2} + 3^{2k+1}$ djeljiv sa 7.

Tvrdimo da se djeljivost zadanog broja sa 7 čuva pri prijelazu na sljedeći broj $n = k + 1$, tj. da je broj $2^{(k+1)+2} + 3^{2(k+1)+1}$ također djeljiv sa 7. Posljednji izraz možemo ovako zapisati

$$2^{(k+1)+2} + 3^{2(k+1)+1} = 2^{k+3} + 3^{2k+3} \tag{1}$$

Pitamo se kako još možemo preurediti izraz (1) da u njemu prepoznamo pretpostavku?

$$\begin{aligned} 2^{k+3} + 3^{2k+3} &= 2^{(k+2)+1} + 3^{(2k+1)+2} \\ &= 2^{k+2} \cdot 2 + 3^{2k+1} \cdot 3^2 \\ &= 2 \cdot 2^{k+2} + 9 \cdot 3^{2k+1}. \end{aligned}$$

Član $9 \cdot 3^{2k+1}$ možemo predočiti kao sumu dvaju pribrojnika na više načina. Nama je interesantan ovaj:

$$9 \cdot 3^{2k+1} = 2 \cdot 3^{2k+1} + 7 \cdot 3^{2k+1}.$$

Zašto? Zastanimo na trenutak i ponovimo što radimo. Dokazujemo da formula $2^{k+2} + 3^{2k+1}$ prelaskom na sljedeći broj $n = k + 1$ ostaje i dalje djeljiva sa 7. Drugim riječima dokazujemo da je broj $2^{(k+1)+2} + 3^{2(k+1)+1}$ kojega smo upravo uspjeli napisati u obliku

$$2 \cdot 2^{k+2} + 2 \cdot 3^{2k+1} + 7 \cdot 3^{2k+1}$$

djeljiv sa 7. Zaista, broj $2 \cdot (2^{k+2} + 3^{2k+1}) + 7 \cdot 3^{2k+1}$ sastoji se od dva pribrojnika. Da bi se zaključilo da je zbroj djeljiv nekim brojem dovoljno je pokazati da je svaki pribrojnik djeljiv tim brojem. Prvi pribrojnik $2 \cdot (2^{k+2} + 3^{2k+1})$ je produkt od dva faktora. Produkt je djeljiv nekim brojem ako je bar jedan od njegovih faktora djeljiv tim brojem. Izraz $(2^{k+2} + 3^{2k+1})$ je po pretpostavci djeljiv sa 7 pa je onda i produkt $2 \cdot (2^{k+2} + 3^{2k+1})$ djeljiv sa 7.

Drugi pribrojnik izraza $2 \cdot (2^{k+2} + 3^{2k+1}) + 7 \cdot 3^{2k+1}$ produkt je od dva faktora a jedan od njih je 7. Dakle, broj $2 \cdot (2^{k+2} + 3^{2k+1}) + 7 \cdot 3^{2k+1}$ koji je jednak broju $2^{(k+1)+2} + 3^{2(k+1)+1}$ djeljiv je sa 7. Tako smo pokazali da se prelaskom od $n = k$ na $n = k + 1$ čuva svojstvo djeljivosti sa 7, pa je polazna tvrdnja zadatka dokazana.

U osnovnoj školi razvijamo induktivno zaključivanje kod učenika. Ono je neophodno pri donošenju hipoteze kod dokazivanja principom matematičke indukcije. Najvažnije je stalno isticati neophodnost dokazivanja hipoteze.

Primjer 5. *Dokaži metodom matematičke indukcije da je suma prvih n prirodnih brojeva jednaka* $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Priča se da je K. F. Gauss[1] riješio ovaj zadatak kao prvoškolac. Njegov je učitelj dao učenicima zadatak da nađu zbroj prvih stotinu prirodnih brojeva, nadajući se da ih je dobro zaposlio. No, Gauss je već za nekoliko trenutaka zadatak riješio združivanjem prvog s posljednjim brojem, drugog s pretposljednjim, itd. U svakom tako dobivenom paru zbroj je 101. Od 100 brojeva načinio je 50 parova, pa je konačan rezultat $50 \cdot 101 = 5050$.

Oponašajući ovakvo razmišljanje

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\
100 & + & 99 & + & 98 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
101 & + & 101 & + & 101 & + & \dots & + & 101 & + & 101 & + & 101
\end{array}$$

možemo već u završnim razredima osnovne škole naslutiti formulu za sumu prvih n prirodnih brojeva.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n-2 & + & n-1 & + & n \\
n & + & n-1 & + & n-2 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & \dots & + & n+1 & + & n+1 & + & n+1
\end{array}$$

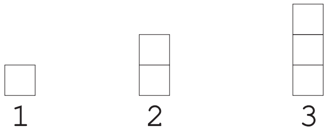
Ovdje imamo n pribrojnika $n+1$, pa je rezultat $n \cdot (n+1)$ dvostruko veći od traženog zbroja.

[1] Karl Fridrich Gauss(1777.–1855.) njemački matematičar i astronom

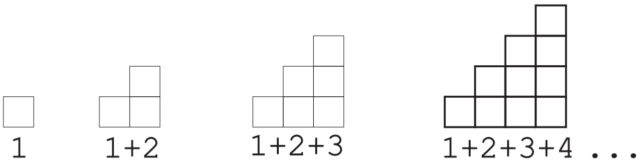
Dakle, vjerojatno vrijedi

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

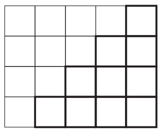
Ovom zadatku možemo dati i geometrijsku interpretaciju. Dogovorimo se da svaki prirodni broj predstavlja stupić od onoliko kvadratića koliki je promatrani broj.



Što znači $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$?



Što bismo dobili sastavljanjem posljednjih dvaju "nazubljenih trokuta"?



Imamo pravokutnik načinjen od dva sukladna nazubljena trokuta u kojemu ima $5 \cdot 4$ kvadratića. Broj kvadratića u jednom nazubljenom trokutu je $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4$. Dakle, $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4$.

Općenito, donosimo hipotezu

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Ovu formulu dokazujemo metodom matematičke indukcije u srednjoj školi. Ne znamo kako bismo dokazali ovu hipotezu, ali je možemo provjeriti za $n = 5$. Zaista, jednakost

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (5+1)$$

je ispravna, jer i lijeva i desna strana daju rezultat 15. No, ostaje li na snazi ako od broja n, prijeđemo na $n+1$? Drugim riječima, vrijedi li

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)((n+1)+1)?$$

Ovo možemo lako provjeriti! Oduzmemo li od posljednje formule hipotezu, imamo:

$$n + 1 = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1).$$

Sređivanjem desne strane dobivamo

$$n+1=n+1.$$

Time smo pokazali da nesumnjivo vrijedi

$$n+1=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1).$$

Još ne znamo vrijedi li

$$1+2+3+\ldots+(n-1)+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

No, ako bismo znali da je to točno, mogli bismo nakon zbrajanja s jednakošću koju smo nesumnjivo dokazali, zaključiti da je

$$1+2+3+\ldots+(n-1)+n+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)((n+1)+1)$$

također ispravno, a to je upravo tvrdnja za idući prirodni broj. Mi znamo, međutim da naša slutnja zaista vrijedi za $n=1,2,3,4,5$. Zbog upravo pokazanog mora slutnja koja vrijedi za $n=5$ vrijediti i za $n=6$; ako vrijedi za $n=6$, mora vrijediti i za $n=7$ itd. Ona vrijedi za sve n. Opća valjanost je dokazana.

Primjer 6. *Dokaži metodom matematičke indukcije da se zbroj prvih 2n parnih prirodnih brojeva može zapisati formulom*

$$\sum_{k=1}^{n}2k=n(n+1).$$

I za ovaj zadatak pripremamo se još u početnoj nastavi matematike.

Na satovima vježbanja zbrajanja i množenja u $\mathbf{N}$ zadajemo zadatak:

$$\begin{array}{lcr} 2+4 & = & 6 \\ 2+4+6 & = & 12 \\ 2+4+6+8 & = & 20 \end{array}$$

Za početak tražimo da učenici predvide zadatak u sljedećem redu:

$$2+4+6+8+10=30.$$

Upućujemo ih da pozorno promotre desnu stranu.

Što primjećuju?

Ako "ne vide" zakonitost, otkrijmo im da se svaki rezultat može prikazati kao umnožak dvaju uzastopnih prirodnih brojeva. Sigurno će se bar neki učenici dosjetiti

$$\begin{array}{lcrcl} 2+4 & = & 6 & = & 2\cdot 3 \\ 2+4+6 & = & 12 & = & 3\cdot 4 \\ 2+4+6+8 & = & 20 & = & 4\cdot 5 \end{array}$$

Kako provjeriti jesu li učenici "ulovili" vezu između lijeve i desne strane jednakosti?

Možda odmah neće biti vješti izreći da prvi faktor govori o broju pribrojnika lijeve strane, a da je drugi faktor sljedbenik prvog.

Ipak, ako su ušli u bit stvari, znat će bez računanja (prebrojivši pribrojnike) odmah ispisati rezultat:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 7 \cdot 8.$$

U završnim razredima osnovne škole učenici će lako uočiti opću zakonitost.

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n \cdot (n + 1).$$

Dobro je najaviti im da će u srednjoj školi ovu formulu, za koju pretpostavljaju da uvijek vrijedi, znati dokazati.

U srednjoj školi ih se upućuje da ispišu tvrdnju, tj. "popnu se na iduću prečku ljestava":

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n + 2(n + 1) = (n + 1)((n + 1) + 1).$$

Dokaz će provesti polazeći od lijeve strane, uzimajući u obzir pretpostavku:

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n + 2(n + 1) = n(n + 1) + 2(n + 1)$$

zbog desne distributivnosti množenja prema zbrajanju

$$= (n + 2) \cdot (n + 1)$$

primjenom komutativnosti za množenje

$$= (n + 1) \cdot (n + 2).$$

Time je dokazano da vrijedi formula

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n + 1).$$

Zadatak 1. *Ispiši program za sumu prvih 2n parnih prirodnih brojeva.*

Primjer 7. *Kakvu zanimljivost primjećuješ u jednakosti*

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100?$$

Evo još jedne mogućnosti za malo istraživanje učenicima osmog razreda osnovne škole. Neki od njih sigurno će uočiti da su na lijevoj strani kubovi uzastopnih prirodnih brojeva, a na desnoj strani je kvadrat broja 10. Možemo pisati

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2.$$

Što bi se moglo istraživati? Prirodno je pitati se je li uvijek suma kubova uzastopnih prirodnih brojeva jednaka kvadratu nekog broja. Provjerit ćemo za tri pribrojnika

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 6^2.$$

Navikavajmo učenike da sustavno zapisuju rezultate slučajeva za jedan, dva, tri itd. pribrojnika:

$$\begin{array}{lcrcr}
1^3 & = & 1 & = & 1^2 \\
1^3 + 2^3 & = & 9 & = & 3^2 \\
1^3 + 2^3 + 3^3 & = & 36 & = & 6^2 \\
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 & = & 100 & = & 10^2 \\
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 & = & 225 & = & 15^2 .
\end{array}$$

Učenici će biti ushićeni pravilnošću koju su otkrili. Dobro je ukazivati učenicima na to da ta pravilnost još nije dokazana. Da bi se dokazalo da je suma prvih n kubova kvadrat nekoga broja treba zapisati općenito pretpostavku a to nije uvijek lako. Što nam govore slučajevi $n = 1, 2, 3, 4, 5$? Zašto su sve te sume kvadrati? Zamislimo da brojevi na desnoj strani predstavljaju površine kvadrata. Što možemo reći o tim kvadratima? Duljine stranica tih kvadrata su brojevi 1, 3, 6, 10, 15. Što možemo reći o duljinama stranica? Da li postoji neka pravilnost koja govori o rastu duljina stranica kvadrata? Što je s razlikom duljina stranica uzastopnih kvadrata?

$$\begin{aligned} 3 - 1 &= 2 \\ 6 - 3 &= 3 \\ 10 - 6 &= 4 \\ 15 - 10 &= 5. \end{aligned}$$

Pravilnost razlike duljina stranica uzastopnih kvadrata je vrlo očita. Zaista,

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3 &= 1 + 2 \\ 6 &= 1 + 2 + 3 \\ 10 &= 1 + 2 + 3 + 4 \\ 15 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5. \end{aligned}$$

Gaussova dosjetka navela nas je na dokaz formule

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Taj rezultat i zaključivanje indukcijom ima za posljedicu donošenje hipoteze o općenitom zaključku u svezi primjera 7.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Jako je važno učenicima istaknuti da je ovo hipoteza koju treba dokazati. U srednjoj školi dokazat ćemo ovu hipotezu. Kako? Nemamo li nikakvih ideja o tome kako dokazati rezultat, možemo ga bar provjeriti. Uzet ćemo bilo koji prirodni broj, npr. $n = 6$. Za tu vrijednost formula prelazi u

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = \left[\frac{6(6+1)}{2}\right]^2.$$

Mali račun pokazuje da obje strane jednakosti iznose 441, što znači da je formula valjana za $n = 6$. Formula je najvjerojatnije valjana za sve vrijednosti od n. Ostaje li valjana ako prijeđemo od neke, bilo koje vrijednosti n na iduću vrijednost $n + 1$? Prema formuli moralo bi vrijediti

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right]^2.$$

To možemo lako provjeriti. Oduzmemo li od ove posljednje formule pretpostavku za n slučajeva imamo

$$(n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Računamo

$$(n+1)^3 = \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4} - \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}.$$

Na desnoj strani izlučimo zajednički faktor

$$(n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4} \cdot ((n+2)^2 - n^2).$$

Uz malo računanja uvjerit ćemo se da je

$$(n+1)^3 = (n+1)^3.$$

Što znači ovaj rezultat? Mi smo nesumnjivo dokazali da je

$$(n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Još ne znamo vrijedi li

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

No, ako bismo znali da je to točno, mogli bismo nakon zbrajanja s jednakošću koju smo nesumnjivo dokazali, zaključiti da je

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right]^2$$

također ispravno, a to je upravo tvrdnja za idući prirodni broj $n+1$. Mi znamo, međutim, da naša slutnja zaista vrijedi za $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Zbog upravo izloženog slutnja koja vrijedi za $n = 6$ vrijedit će i za $n = 7$; ako vrijedi za $n = 7$ mora vrijediti i za $n = 8$ itd. Ona vrijedi za sve n. Opća valjanost je dokazana.

Primjer 8. *Metodom matematičke indukcije dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi*

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Na satu uvježbavanja računskih operacija s razlomcima još u VI. razredu osnovne škole zgodno je “otkriti” s učenicima da je $\frac{1}{2\cdot 3}$ isto što i $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3\cdot 4}$ isto što i $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, itd. Ako to znaju, lako je izračunati koliko je

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}.$$

Zaista,

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Pitamo se kako bi izgledao sličan zadatak za tri pribrojnika?

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Ovdje već raste ushićenje učenika. U stanju su izračunati zadatak sa koliko god ovakvih pribrojnika. Sada ih upućujemo da uoče vezu između lijeve i desne strane jednakosti. Sigurno će bar neki od učenika uočiti da brojnik desne strane jednakosti govori o broju pribrojnika lijeve strane, a da je nazivnik za jedan veći od brojnika. Sada je mali korak do zapisa pretpostavke da za $n = k$ vrijedi

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{k}{k+1}.$$

Još ne znamo ostaje li tvrdnja valjana ako prijeđemo od neke, bilo koje vrijednosti $n = k$, na iduću vrijednost $n = k + 1$.

Prema prethodnoj formuli slučaj kada je $n = k + 1$ mogao bi se ovako zapisati

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}++\frac{1}{(k+1)\cdot((k+1)+1)}=\frac{k+1}{(k+1)+1}.$$

Ovo ćemo jednostavno provjeriti. Oduzmemo li od ove posljednje formule pretpostavku, dobit ćemo

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}-\frac{k}{k+1}.$$

Malim računom uvjeravamo se da je lijeva strana jednaka desnoj. Još ne znamo vrijedi li

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{k}{k+1}.$$

No, ako bismo znali da je to točno, mogli bismo nakon zbrajanja s jednakošću koju smo nesumnjivo dokazali, zaključiti da je

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}++\frac{1}{(k+1)\cdot((k+1)+1)}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$$

također ispravno, a to je upravo tvrdnja za sljedeći prirodni broj $n = k+1$. Mi znamo, međutim, da tvrdnja formule vrijedi za $n = 1, 2, 3$. Zbog prethodnog dokaza mora vrijediti i za $n = 4$. Ako vrijedi za $n = 4$, mora vrijediti i za $n = 5$ itd. Ona vrijedi za sve n. Opća valjanost zadane formule je dokazana.

Zadaci za vježbu

1. U knjizi B. Pavković, B. Dakić, Ž. Hanjš i P. Mladinić, *Male teme iz matematike*, HMD – Element, Zagreb, 1994. pronađite primjere koji pokazuju da se nepotpunom indukcijom može doći do krivih hipoteza.

2. U zbirci zadataka M. Cvitković, *Kombinatorika*, Element, Zagreb, 1994. proučite poglavlje “Matematička indukcija”.

3. Kako biste u osnovnoj školi pripremali učenike za dokazivanje metodom matematičke indukcije na sljedećim zadacima koji se odnose na prirodne brojeve

a) $1+4+7+\ldots+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$

b) $1+5+9+\ldots+(4n-3)=n(2n-1)$

c) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)=\dfrac{n}{3}(n+1)(n+2)$

d) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$.

4. U knjizi B. Dakić, *Matematički panoptikum*, Školska knjiga, Zagreb, 1995. proučite priču "O sumi niza", strana 37.

5. Dokažite matematičkom indukcijom da za sve prirodne brojeve vrijedi:

a) 6 dijeli n^3+11n

b) 6 dijeli $2n^3+3n^2+7n$

c) 9 dijeli 7^n+3n-1

d) 9 dijeli $4^n+15n-1$

e) 11 dijeli $6^{2n}+3^{n+2}+3^n$

6. Provjerite matematičkom indukcijom da za zbroj potencija

$$s_k=1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k,\quad k\in\mathbf{N}$$

vrijede sljedeće formule:

a) $s_1=\dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $s_2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $s_3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

d) $s_4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

7. Dokažite da sljedeće formule vrijede za sve prirodne brojeve n:

a) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\dfrac{\sin\dfrac{(n+1)\alpha}{2}\sin\dfrac{n\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$

a) $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\dfrac{\cos\dfrac{(n+1)\alpha}{2}\sin\dfrac{n\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$

8. Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi:

a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$

b) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$