10. Diferencijalne jednadžbe prvog reda

10.1. Pojam diferencijalne jednadžbe

Jedan je od ciljeva matematike razvijati modele za razumijevanje fizikalnih fenomena. Mnogi se fizikalni zakoni mogu opisati jednadžbama u kojima se uz nepoznate veličine javljaju i njihove derivacije. Takve jednadžbe nazivamo **diferencijalnim jednadžbama**. Tako na primjer, II. Newtonov zakon koji opisuje položaj x čestice mase m u vremenu t, na koju djeluje sila F, koja pak može biti funkcija vremena t, položaja x i brzine $v = dx/dt$, možemo opisati jednadžbom

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = F\left(t, x(t), \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right).$$

Da bismo odredili položaj čestice, moramo naći rješenje ove diferencijalne jednadžbe. To će rješenje biti jednoznačno određeno (uz vrlo općenite uvjete na F) tek ako su nam poznati **početni uvjeti**, položaj i brzina čestice u nekom početnom trenutku.

Primjeri diferencijalnih jednadžbi

Primjer 1. (**Gibanje tijela u polju sile teže**) Tijelo mase m bačeno je uvis u trenutku $t = 0$ početnom brzinom v_0. Kako glasi diferencijalna jednadžba za najjednostavniji model u kojem zanemarujemo otpor zraka i promjenu gravitacijskog polja visinom? Odredi položaj tijela u vremenu t, te najvišu visinu do koje će se ono popeti.

▶ Označimo s x položaj tijela. Ono će se gibati radi toga što je bačeno početnom brzinom v_0, a jedina sila koja će djelovati na njega je gravitacijska sila

$$F = -mg.$$

Negativan predznak dolazi stoga što je smjer sile orijentiran suprotno od porasta varijable x. II. Newtonov zakon daje nam jednadžbu

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -mg.$$

Za ovu jednadžbu kažemo da je diferencijalna jednadžba **drugog reda**. Ta je jednadžba vrlo jednostavna i lako se rješava neposrednim integriranjem:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \int -g\,\mathrm{d}t = -gt + C_1$$

Konstantu integracije C_1 možemo odrediti iz početnih uvjeta. U trenutku $t = 0$ brzina tijela je v_0:

$$v_0 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} = -g \cdot 0 + C_1 = C_1$$

Tako dobivamo $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -gt + v_0$ pa nakon još jednog integriranja slijedi

$$x(t) = \int (-gt + v_0)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C_2.$$

U trenutku $t = 0$ položaj tijela je $x(0) = x_0$. Stavljajući $t = 0$ u ovu jednakost, dobit ćemo:

$$x_0 = x(0) = C_2.$$

Time smo riješili diferencijalnu jednadžbu. Rješenja nam opisuje položaj tijela u ovisnosti o vremenu:

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0.$$

Najvišu visinu sad možemo odrediti prema uvjetu za ekstrem funkcije:

$$x'(t) = 0 \implies -gt + v_0 = 0 \implies t = \frac{v_0}{g}$$

odakle slijedi

$$x_{\max} = x_0 + \frac{v_0^2}{2g}.$$

— ◆ —

Promotrimo sad složeniji model. Ukoliko je brzina tijela v_0 velika, tad promjena položaja x neće biti zanemariva u odnosu na polumjer Zemlje R pa će se mijenjati gravitacijska sila koja djeluje na tijelo. Na visini x, iznad površine Zemlje, ona iznosi

$$g \cdot \frac{R^2}{(R+x)^2}.$$

Dakako, za velike brzine v nije zanemariva niti sila otpora zraka. Njezinu ovisnost o brzini nije uvijek moguće odrediti, jer ovisi bitno o obliku tijela. Kao najjednostavniji model, pretpostavit ćemo linearnu ovisnost o brzini:

$$F_{\text{tr}} = k \cdot v$$

gdje je k neka konstanta proporcionalnosti. Tako dobivamo složeniji model:

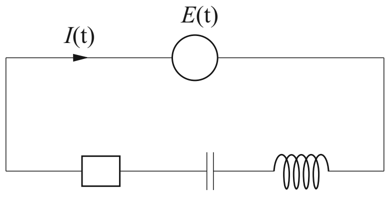
$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg \cdot \frac{R^2}{(R+x)^2} - k \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Ako promatramo gibanje rakete u Zemljinom polju sile teže, trebamo uzeti u obzir i dodatnu silu koju stvara pogonsko gorivo, kao i promjenu mase, nastalu zbog potrošnje pogonskog goriva rakete. Na primjer, ako se gorivo ravnomjerno troši, onda vrijedi: $m(t) = m_0(1 - \alpha t)$ za neki koeficijent potrošnje α. Jednadžba gibanja bit će još složenija:

$$m(t) \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = m'(t)c(t) - m(t)g \cdot \frac{R^2}{(R+x)^2} - k \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Ovdje je $c(t)$ brzina strujanja čestica pogonskog goriva na izlazu iz raketnog sustava, a $m'(t)c(t)$ dodatna potisna sila na raketu koju stvara gorivo.

Primjer 2. (**Strujni krug**) Odredimo diferencijalnu jednadžbu koju zadovoljava struja $I(t)$ u krugu u kojem su otpornik, kondenzator i zavojnica spojeni u seriju s izvorom napona.



Sl. 10.1.

▶ Pad napona na otporu je $RI(t)$, na zavojnici $LI'(t)$, na kondenzatoru $\frac{1}{C}\int_0^t I(s)\,ds$.
Prema Kirchhoffovom zakonu je

$$LI'(t) + RI(t) + \frac{1}{C}\int_0^t I(s)\,\mathrm{d}s = E(t)\ .$$

Diferenciranjem dobivamo diferencijalnu jednadžbu drugog reda:

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = E'(t)\ .$$

Diferencijalna jednadžba n-tog reda

Diferencijalna jednadžba jest jednadžba oblika

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{10.1}$$

koja povezuje nepoznanicu x, funkciju $y(x)$ i njezine derivacije $y'(x), \dots, y^{(n)}(x)$. Red diferencijalne jednadžbe je stupanj najviše derivacije koja ulazi u zadanu jednadžbu. Tako je jednadžba (10.1) n-tog reda.

Preciznu definiciju rješenja diferencijalne jednadžbe upoznat ćemo kasnije. Za sada ćemo ju prihvatiti na intuitivnom nivou. Rješenje je svaka funkcija $y = \varphi(x)$ definirana na nekom intervalu, koja ima sve potrebne derivacije na tom intervalu i koja uvrštena u jednadžbu (10.1) nju identički zadovoljava.

Primjer 3.

1) Najjednostavnija diferencijalna jednadžba ima oblik $y' = f(x)$, gdje je f zadana funkcija, definirana na intervalu (a, b), a y je nepoznata funkcija. Njezino je rješenje $y = \int f(x)\,dx + C$. Tu je C po volji odabrana konstanta. Npr.

$$y' = 6x^2 + 2x \implies y = 2x^3 + x^2 + C\,.$$

2) Jednadžbu $y'' + y = 0$ zadovoljavaju funkcije $y = \cos x$, $y = \sin x$, ali i svaka funkcija oblika $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

3) Jednadžba $y^{(n)} = 1$ ima rješenje $y = \dfrac{x^n}{n!} + C_1 x^{n-1} + \ldots + C_{n-1} x + C_n$.

— ◆ —

Rješenje svake diferencijalne jednadžbe n–tog reda može se napisati u obliku $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$. Takvo rješenje nazivamo **općim rješenjem** diferencijalne jednadžbe. Ponekad y neće biti moguće izraziti u eksplicitnom obliku (pomoću elementarnih funkcija). Zato diferencijalnu jednadžbu smatramo riješenom ako nam je poznata jednadžba oblika $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$ koja je ekvivalentna početnoj diferencijalnoj jednadžbi. Nju nazivamo **integral** diferencijalne jednadžbe.

Diferencijalna jednadžba familije krivulja

Možemo uspostaviti i obratnu vezu: svakoj familiji krivulja s jednadžbom $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$ ili $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$ možemo odrediti pripadnu diferencijalnu jednadžbu koju sve te krivulje zadovoljavaju. U tu svrhu moramo gornje jednadžbe derivirati n puta po varoijabli x i zatim eliminirati konstante $C_1, \dots, C_n$.

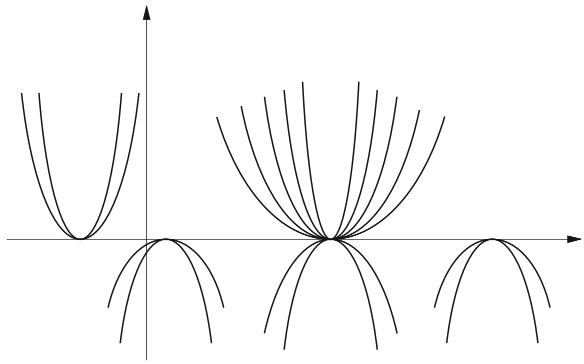
Primjer 4.

1) Familija kružnica $x^2 + y^2 = C$ opisana je diferencijalnom jednadžbom $2x + 2y\,y' = 0$ tj. $y' = -{}^{x}\!/_{y}$.

2) Familija kružnica $(x - C)^2 + y^2 = C^2$ ima pripadnu diferencijalnu jednadžbu $y' = \dfrac{-x^2 + y^2}{2xy}$ koju dobivamo eliminacijom parametra C iz sustava

$$2(x - C) + 2y\,y' = 0\,, \qquad x^2 - 2C\,x + y^2 = 0\,.$$

Primjer 5. Odredi diferencijalnu jednadžbu familije parabola $y = C_1(x - C_2)^2$.



Sl. 10.2. Dvoparametarska familija parabola

▶ Konstante C_1 i C_2 možemo eliminirati iz sustava:

$$\begin{aligned} y &= C_1(x - C_2)^2, \\ y' &= 2C_1(x - C_2), \\ y'' &= 2C_1. \end{aligned}$$

Iz treće jednadžbe slijedi $C_1 = y''/2$, a zatim iz druge $x - C_2 = y'/y''$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo

$$y = \frac{y''}{2}\left(\frac{y'}{y''}\right)^2 \implies y = \frac{(y')^2}{2y''}.$$

Nakon sređivanja dobivamo $2yy'' - y'^2 = 0$.

Cauchyjeva zadaća

Cauchyjeva zadaća

Određivanje funkcije y koja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu n–tog reda i n početnih uvjeta:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= f\,(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1} \end{aligned}$$

naziva se **Cauchyjeva zadaća**. Tu su y_0 , y_1 ,... y_{n-1} zadani realni brojevi.

Primjer 6. Funkcija $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$ rješenje je diferencijalne jednadžbe $y'' + 4y = 0$, za bilo koje realne vrijednosti konstanta C_1 i C_2. Odredimo te konstante ako su zadani početni uvjeti $y'(0) = 4$, $y(0) = 1$.

▶ Da je funkcija rješenje diferencijalne jednadžbe, uvjeravamo se neposrednim deriviranjem:

$$\begin{aligned} y &= C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x \\ y' &= 2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x \\ y'' &= -4C_1 \sin 2x - 4C_2 \cos 2x = -4y. \end{aligned}$$

Konstante se iz početnih uvjeta određuju ovako:

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = C_2, \\ 4 &= y'(0) = 2C_1 \cos 0 - 2C_2 \sin 0 = 2C_1. \end{aligned}$$

Dobivamo, $C_1 = 2$, $C_2 = 1$. Funkcija $y = 2\sin 2x + \cos x$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu i početne uvjete.

— ◆ —

Zadržimo se sada na diferencijalnim jednažbama prvog reda. Opća jednadžba prvog reda ima oblik $F(x, y, y') = 0$. Ako je možemo razriješiti po y', dobit ćemo jednadžbu $y' = f(x, y)$. Rješenje ove jednadžbe jest neka funkcija oblika $y = \varphi(x, C)$, ili pak $\Phi(x, y, C) = 0$. Da bismo to rješenje odredili, moramo zadati još i početni uvjet: $y(x_0) = y_0$. Konstantu C određujemo tako da taj uvjet bude zadovoljen (ako je to moguće učiniti). Geometrijski, to znači da će **integralna krivulja** (graf rješenja, odnosno integrala diferencijalne jednadžbe) prolaziti točkom $M(x_0, y_0)$.

Primjer 7. Cauchyjeva zadaća $y' = 2x$, $y(1) = 2$ ima rješenje $y = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$. Iz $y(1) = 1 + C = 2$ slijedi $C = 1$. Dakle, $y = x^2 + 1$.

Primjer 8. Riješi Cauchyjeva zadaća:

$$\begin{aligned} y' - y &= 0, \\ y(1) &= 2. \end{aligned}$$

▶ Za eksponencijalnu funkciju $y = e^x$ vrijedi: $y' = y$, pa je ona rješenje ove jednadžbe. Sad se lako vidi da t jdnadžbu zadovoljava bilo koja funkcija iz familije $y = Ce^x$. Odabrat ćemo onu koja zadovoljava početni uvjet:

$$2 = y(1) = C\,e^1 \implies C = \frac{2}{e}.$$

Rješenje Cauchyjeve zadaće je funkcija $y = \dfrac{2}{e} \cdot e^x = 2e^{x-1}$.

Zadatak 1. Uvjeri se da su zadane funkcije rješenja odgovarajućih diferencijalnih jednadžbi:

1. $y = x + 3e^{-x}$, $\quad \dfrac{dy}{dx} + y = x + 1$;

2. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$, $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} - 7\dfrac{dy}{dx} + 12y = 0$;

3. $y = e^x + 2x^2 + 6x + 7$, $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$;

4. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\quad (1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$.

Zadatak 2. Odredi diferencijalnu jednadžbu koju zadovoljavaju krivulje iz zadane familije:

1. $y = e^{Cx}$;

2. $y = C(x-C)^2$;

3. $y^2 + Cx = x^2$;

4. $C_1 y = (x + C_2)^2$;

5. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$;

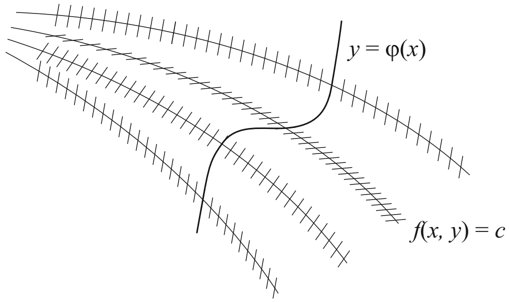
6. $y = e^{2x}(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$.

Zadatak 3. Za koje će vrijednosti realnog broja r funkcija $y = e^{rx}$ biti rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' - 5y' + 6y = 0$?

10.2. Polje smjerova

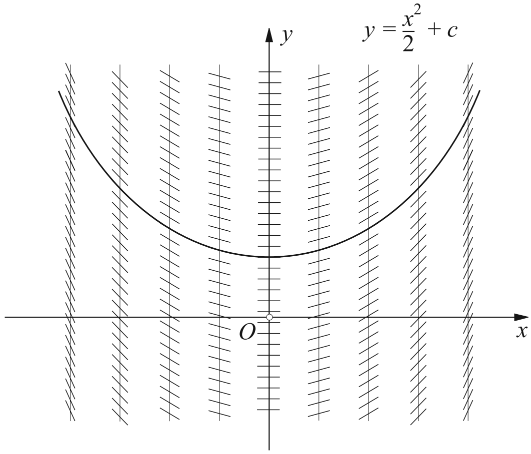
Izokline

Jednadžba $y' = f(x, y)$ ima slijedeću grafičku interpretaciju: u svakoj točki (x, y) područja definicije funkcije f određen je smjer tangente na krivulju y u toj točki (tangens kuta tangente iznosi upravo $f(x, y)$). Ako iscrtamo "sve smjerove" u svim točkama područja definicije, oni će nam dati **polje smjerova** iz kojeg možemo uočiti grafove integralnih krivulja. Zbog lakšeg crtanja, određujemo **izokline**: krivulje koje spajaju točke s jednakim smjerom tangente. To su krivulje s jednadžbom $f(x, y) = C$, jer je u njima $y' = C$. Crtamo ih za neke istaknute vrijednosti konstante C.



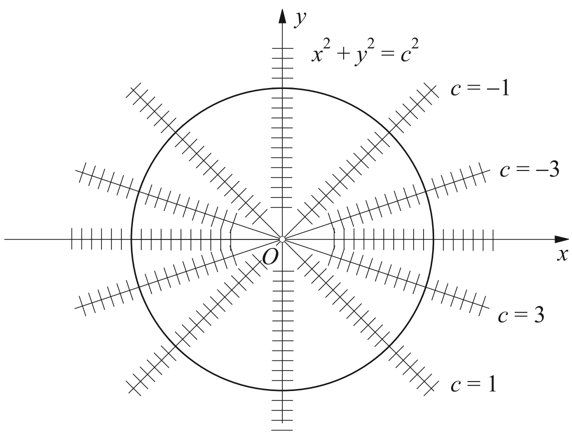
Sl. 10.3.

Primjer 9. Nacrtajmo polje smjerova za jednadžbu $y' = x$. Tu je $f(x,y) = x$ i jednadžbe izoklina glase $x = C$. Na svakoj izoklini koeficijent smjera iznosi upravo C. Na slici 10.4 su nacrtane izokline za cjelobrojne vrijednosti od C.



Sl. 10.4. Polje smjerova za jednadžbu $y' = x$

Primjer 10. Izokline jednadžbe $y' = -{}^{x}/_{y}$ glase $-{}^{x}/_{y} = C$. Na slici 10.5 nacrtane su te izokline i pomoću njih su skicirane integralne krivulje; to su kružnice $x^2 + y^2 = C^2$.



Sl. 10.5. Polje smjerova za jednadžbu $y' = -{}^{x}/_{y}$.

Zadatak 4. Metodom izoklina nacrtaj integralne krivulje sljedećih diferencijalnih jednadžbi:

1. $y' = x + y$; **2.** $y' = y - x$;
3. $y' = \frac{1}{2}(x - 2y + 3)$; **4.** $y' = (y - 1)^2$;
5. $y' = (y - 1)x$; **6.** $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$.

10.3. Jednadžbe sa separiranim varijablama

Za diferencijalnu jednadžbu oblika

$$f(y)\,dy = g(x)\,dx \tag{10.2}$$

kažemo da je jednadžba sa separiranim varijablama. Nju možemo integrirati neposredno:

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx + C. \tag{10.3}$$

Da pronađemo rješenje koje zadovoljava početni uvjet $y(x_0) = y_0$, napišimo (10.3) u ekvivalentnom obliku

$$\int_{y_0}^{y} f(y)\,dy = \int_{x_0}^{x} g(x)\,dx + C_1 .$$

Uvrštavajući $y = y_0$ za $x = x_0$, dobivamo $C_1 = 0$. Zato rješenje Cauchyjeve zadaće

$$y' = \frac{g(x)}{f(y)}, \qquad y(x_0) = y_0$$

glasi

$$\int_{y_0}^{y} f(y)\,dy = \int_{x_0}^{x} g(x)\,dx .$$

Primjer 11. Jednadžbu $y' = -\dfrac{x}{y}$ svodimo na ekvivalentan oblik $y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x$ i odavde

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int x\,\mathrm{d}x + C \iff \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \iff x^2 + y^2 = C .$$

(ne moramo previše paziti na oblik konstante).

Primjer 12. Jednadžba oblika $y' = f(ax + by + c)$ može se supstitucijom $z = ax + by + c$ svesti na jednadžbu sa separiranim varijablama:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a + bf(z) \implies \frac{\mathrm{d}z}{a + bf(z)} = \mathrm{d}x$$

Npr., u jednadžbi $y' = (x+y)^2$ stavljamo $z = x+y$. Deriviranjem po varijabli x slijedi $z' = 1 + y' = 1 + (x+y)^2 = 1 + z^2$. Odavde

$$\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \mathrm{d}x \iff \operatorname{arc\,tg} z = x + C$$
$$\iff z = \operatorname{tg}(x+C) \iff y = \operatorname{tg}(x+C) - x\,.$$

Primjer 13. Jednadžba sa separiranim varijablama $e^{x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}y}{\ln y}$ ima rješenje

$$\int e^{x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{\ln y} + C\,.$$

Ove integrale ne možemo izračunati (iskazati pomoću elementarnih funkcija), jer nisu elementarni, no diferencijalnu jednadžbu smatramo riješenom.

Primjer 14. Rješenje Cauchyjeve zadaće $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4t\sqrt{x}$, $x(1) = 1$ je

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} = \int_1^t 2t\,\mathrm{d}t \implies \sqrt{x}\,\Big|_1^x = t^2\,\Big|_1^t$$
$$\sqrt{x} = t^2 \implies x = t^4$$

Primjer 15. Riješimo jednadžbu

$$\operatorname{tg} x \sin^2 y\,\mathrm{d}x + \cos^2 x \operatorname{ctg} y\,\mathrm{d}y = 0.$$

▶ Jednadžbu svodimo na jednadžbu sa separiranim varijablama, dijeljenjem sa $\sin^2 y \cos^2 x$. Dobivamo

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + \frac{\operatorname{ctg} y}{\sin^2 y}\,\mathrm{d}y = 0$$

i odavde integriranjem

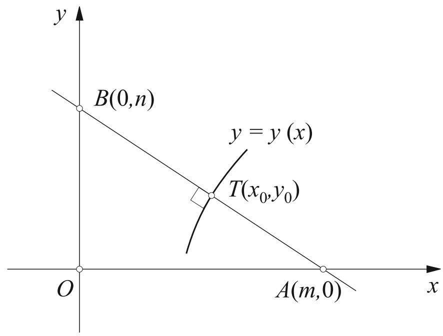
$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{ctg} y\,\mathrm{d}(\operatorname{ctg} y) = C_1,$$
$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 y = C.$$

Primjer 16. Riješimo jednadžbu $x\,y\,y' = 1 - x^2$.

▶ Separiramo varijable i zatim integriramo:

$$x\,y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - x^2 \implies y\,\mathrm{d}y = \frac{1-x^2}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\int y\,\mathrm{d}y = \int \left(\frac{1}{x} - x\right)\mathrm{d}x + C_1 \implies x^2 + y^2 - 2\ln|x| = C\,.$$

Primjer 17. Odredimo krivulje za koje se u svakoj točki odrezak normale među koordinatnim osima raspolavlja tom točkom.



Sl. 10.6. Odsječak normale se raspolavlja u točki na krivulji.

▶ Označimo s $T(x_0, y_0)$ koordinate po volji odabrane točke na krivulji. Neka su $A(m, 0)$ i $B(0, n)$ točke u kojima normala siječe koordinatne osi. Jednadžba normale na krivulju u točki T glasi

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$$

Njezini odresci na koordinatnim osima su

$$m = x_0 + y_0\, y'(x_0)\ , \qquad n = \frac{x_0 + y_0\, y'(x_0)}{y'(x_0)}$$

Prema uvjetu zadatka, T je polovište dužine AB i stoga za njegove koordinate vrijedi $x_0 = m/2$, $y_0 = n/2$. Tako dobivamo jednadžbu $x_0 + y_0\, y'(x_0) = 2x_0$, koja mora vrijediti u bilo kojoj točki $T(x_0, y_0)$ krivulje. Zato ćemo sad pisati x umjesto x_0 i y umjesto y_0. Dobivamo jednadžbu

$$x + y\,y' = 2x$$

tj. $y\,y' = x$; jednadžbu sa separiranim varijablama. Integriranjem dobivamo jednadžbu tražene krivulje: $y^2 - x^2 = C$. Riječ je dakle o hiperboli, točnije, o familiji hiperbola.

Primjer 18. Brzina radioaktivnog raspada proporcionalna je količini materijala koji se nije raspao. Vrijeme poluraspada τ je vrijeme (nakon početnog trenutka) koje je potrebno da se količina radioaktivnog materijala smanji na polovicu prvobitnog iznosa. To je vrijeme poznato za svaki radioaktivni materijal. Odredimo količinu preostalog radioaktivnog materijala u bilo kojem trenutku t.

▶ Neka je $x(t)$ količina materijala koji se nije raspao do trenutka t, a $x(t_0) = x_0$ početna količina. Da odredimo $x(t)$ moramo riješiti Cauchyjevu zadaću

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -k\,x\ , \qquad x(t_0) = x_0.$$

Tu je k konstanta koja ovisi o vrsti radioaktivnog materijala. Odavde slijedi

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = -k\,\mathrm{d}t \implies \ln|x| = -k\,t + \ln C \quad (C > 0)$$
$$\implies |x| = C\,e^{-kt} \quad \text{tj.} \quad x = C\,e^{-kt}$$

Početni uvjet daje $x_0 = C\,e^{-kt_0}$ te je $C = x_0 e^{kt_0}$. Dakle, rješenje glasi

$$x(t) = x_0\,e^{-k(t-t_0)}\ .$$

Vrijeme poluraspada τ računamo iz uvjeta $x(\tau + t_0) = \frac{1}{2}\,x_0$, :

$$\tfrac{1}{2}\,x_0 = x_0\,e^{-k\tau}$$

i odavde $\tau = (\ln 2)/k$ pa dobivamo $k = (\ln 2)/\tau$. Konačno je

$$x(t) = x_0\,e^{-(\ln 2/\tau)(t-t_0)}.$$

Zadatak 5. Riješi sljedeće diferencijalne jednadžbe

1. $(1+y^2)\mathrm{d}x + (1+x^2)\mathrm{d}y = 0$;

2. $(1+y^2)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y = 0$;

3. $(1+y^2)\mathrm{d}x = x\mathrm{d}y$;

4. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$;

5. $e^{-y}(1+y') = 1$;

6. $y\ln y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0,\ y(1) = 1$;

7. $e^y(1+x^2)\mathrm{d}y - 2x(1+e^y)\mathrm{d}x = 0$;

8. $2x\sqrt{1-y^2} = y'(1+x^2)$;

Zadatak 6. Između sljedećih jednadžbi pronađi one koje se mogu svesti na jednadžbu sa separiranim varijablama i riješi ih. Ostale jednadžbe riješi na kraju tjedna.

1. $e^{x+y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$;

2. $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{e^y}{xy}$;

3. $(x+y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x$;

4. $(x+y)^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy$;

5. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x^3 + 3y$;

6. $\dfrac{x}{z}\cdot\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2z^2+1}{x+1}$;

7. $(x+y)^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2$;

8. $(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - 1$;

10.4. Homogene jednadžbe

Za funkciju $M(x,y)$ kažemo da je **homogena**, ako za svaki $t>0$ vrijedi

$$M(tx,ty)=t^{\alpha}M(x,y)\,.$$

Broj α naziva se stupanj homogenosti. Tako npr. imamo

$$\begin{aligned} M(x,y)&=\sqrt{x^2+y^2}-2x && \text{homogena, stupnja 1}\\ M(x,y)&=x^3\,\ln\frac{x}{y}+xy^2 && \text{homogena, stupnja 3}\\ M(x,y)&=x^2y+xy^2+3 && \text{nije homogena}\end{aligned}$$

Za diferencijalnu jednadžbu kažemo da je **homogena**, ako se može dovesti na oblik

$$y'(x)=f\left(\frac{y}{x}\right)\,.$$

Ime 'homogena' potječe od toga što je $f\left(\frac{y}{x}\right)$ homogena funkcija stupnja 0.

Homogena jednadžba može se svesti na jednadžbu sa separiranim varijablama, supstitucijom

$$z=\frac{y}{x}\,.$$

Tu je z funkcija varijable x, $z=z(x)$. Sada imamo

$$y=x\,z\implies y'=z+x\,z'$$

i jednadžba prelazi u

$$z+xz'=f(z)\implies x\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f(z)-z\implies \int\frac{\mathrm{d}z}{f(z)-z}=\ln C|x|\,.$$

Primjer 19. Riješimo jednadžbu $y'=\frac{y}{x}+\operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

▶ Imamo

$$\begin{aligned} z&=\frac{y}{x}\,, && y'=z+xz'=z+\operatorname{tg}z\\ \frac{\mathrm{d}z}{\operatorname{tg}z}&=\frac{\mathrm{d}x}{x}\,, && \ln|\sin z|=\ln|x|+\ln C\\ |\sin z|&=C|x|\,, && y=x\arcsin Kx\end{aligned}$$

— ◆ —

Jednadžba

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

bit će homogena ako su M i N homogene funkcije istog stupnja:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = -\frac{M(x, \frac{y}{x}\cdot x)}{N(x, \frac{y}{x}\cdot x)} = -\frac{x^\alpha M(1, \frac{y}{x})}{x^\alpha N(1, \frac{y}{x})} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Primjer 20. Riješimo jednadžbu $(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x - xy\,\mathrm{d}y = 0$.

▶ Jednadžba se svodi na

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}.$$

Supstitucija $y = xz$ i gore opisani postupak daju rješenje $y^2 = x^2 \ln Cx^2$.

Primjer 21. Riješi jednadžbu $(x-y)y\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y = 0$.

▶ Ovu homogenu jednadžbu dovodimo na oblik

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(x-y)y}{x^2} \implies y' = \left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x}.$$

Supstitucija $y = zx$, $y' = z + xz'$ daje $z'x + z = (1-z)z$ tj. $z'x = -z^2$. Sada možemo separirati varijable i integrirati:

$$-\frac{\mathrm{d}z}{z^2} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \implies -\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2} = \int\frac{\mathrm{d}x}{x} + \ln C,$$

i odavde $\frac{1}{z} = \ln C|x|$ pa je $y = zx = \dfrac{x}{\ln(C|x|)}$.

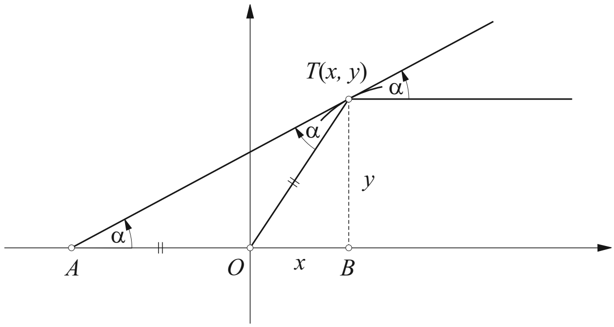
Primjer 22. Riješi jednadžbu $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$.

▶ Stavimo opet $y = zx$. Nakon sređivanja dobivamo

$$\frac{\mathrm{d}z}{e^z} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \implies -e^{-z} = \ln|x| + \ln C$$

te je $-z = \ln\ln\dfrac{1}{C|x|}$ i odavde $y = -x\ln\ln\dfrac{1}{C|x|}$.

Primjer 23. Odredimo oblik zrcala koje paralelne zrake reflektira u jednu točku.



Sl. 10.7.

▶ Možemo pretpostaviti da je ta točka ishodište i da su upadne zrake paralelne sa osi Ox. Dakle, zraka dolazi horizontalno prema zrcalu, upada u točki $T(x,y)$ i reflektira se u ishodište. Kut upada jednak je kutu refleksije, označimo ga s α. Neka tangenta na traženu krivulju (koja opisuje oblik zrcala) povučena u točki T siječe os apscisa u točki A. Trokut OTA je jednakokračan. Tako imamo:

$$y' = \operatorname{tg}\alpha = \frac{|BT|}{|AB|} = \frac{|BT|}{|OT| + |OB|} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}\,.$$

Supstitucijom $y = xz$, $y' = z + xz'$ dobivamo

$$z + xz' = \frac{z}{1 + \sqrt{1 + z^2}}\,, \qquad \frac{1 + \sqrt{1 + z^2}}{z\sqrt{1 + z^2}}\,\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln\left|\frac{C}{x}\right| = \int \frac{1 + \sqrt{1 + z^2}}{z\sqrt{1 + z^2}}\,\mathrm{d}z = \left[u = \sqrt{1 + z^2}\right] = \int \frac{1 + u}{u^2 - 1}\,\mathrm{d}u = \ln|u - 1|\,.$$

Dakle,

$$\frac{C}{x} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} - 1 \implies C = \sqrt{x^2 + y^2} - x\,.$$

Dobivamo konačno jednadžbu parabole: $y^2 = 2Cx + C^2$. Paraboličko zrcalo skuplja sve zrake koje dolaze iz beskonačno udaljenog izvora u svoje žarište. (I obratno, parabolički reflektor će davati paralelan snop svjetla.)

Primjer 24. Odredimo jednadžbu krivulje koja prolazi točkom $(1,0)$ i za koju je u svakoj točki odsječak tangente na osi Oy jednak udaljenosti od dirališta tangente do ishodišta.

▶ Neka je (x_0, y_0) točka na krivulji u kojoj postavljamo tangentu. Jednadžba tangente glasi

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0),$$
$$y = y'(x_0)x + y_0 - y'(x_0)x_0.$$

Odrezak ove tangente na osi Oy je $|y_0 - y'(x_0)x_0|$. Prema uvjetu zadatka, mora biti

$$|y_0 - y'(x_0)x_0| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\,.$$

Ova jednakost mora vrijediti za svaku točku na krivulji. Tako dobivamo diferencijalnu jednadžbu:

$$y - xy' = \pm\sqrt{x^2 + y^2},$$
$$y' = \frac{y \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{x}.$$

Jednadžba je homogena. Supstitucijom $y = xz$, $y' = z + xz'$ dobivamo

$$z + xz' = z \pm \sqrt{1 + z^2}.$$

Jednadžba se svodi na separirane varijable. Integriranjem dobivamo

$$\ln\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) = \pm \ln|x| + \ln C,$$
$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = C|x| \quad \text{ili} \quad \frac{C}{|x|}.$$

U ovom trenutku možemo odrediti konstantu C, tražeći ono rješenje koje prolazi točkom $(1, 0)$. Dobivamo $C = 1$. Daljnjim sređivanjem dobivamo jednadžbu dviju parabola:

$$2y = \pm(x^2 - 1).$$

Zadatak 7. Među sljedećim jednadžbama prepoznaj one koje se mogu svesti na homogene i riješi ih. Riješi i one koje nisu homogene!

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y^2 + x^2}{x^2}$; **2.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x + y}$; **3.** $x\dfrac{dy}{dx} = y^2$;

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + y}{x - y}$; **5.** $\dfrac{dy}{dx} = 3xy$; **6.** $x^2\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$.

Jednadžbe koje se svode na homogene

Jednadžbe oblika

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

mogu se svesti na homogene. Moguća su dva slučaja, već prema tome ima li sustav

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

rješenje ili ne. Ako je (x_0, y_0) njegovo rješenje, onda supstitucijom

$$\begin{matrix} u = x - x_0 \,, \\ v = y - y_0 \end{matrix} \,, \qquad y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$$

diferencijalna jednadžba prelazi u homogenu:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = f\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right).$$

Ukoliko pak sustav nema rješenja, onda će supstitucijom

$$z = a_1 x + b_1 y$$

jednadžba prijeći u jednadžbu sa separiranim varijablama.

Primjer 25. Riješimo jednadžbu

$$(2x - y + 4)\mathrm{d}y + (x - 2y + 5)\mathrm{d}x = 0.$$

▶ Napišimo jednadžbu ovako:

$$y' = \frac{-x + 2y - 5}{2x - y + 4}.$$

Sad rješavamo sustav

$$\left.\begin{matrix} -x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \Longrightarrow \quad x_0 = -1, \quad y_0 = 2$$

Uvodimo supstituciju

$$\begin{matrix} x = u + x_0 = u - 1, \\ y = v + y_0 = v + 2, \end{matrix} \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}.$$

Sad jednadžba prelazi u

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{-(u-1) + 2(v+2) - 5}{2(u-1) - (v+2) + 4} = \frac{-u + 2v}{2u - v} = \frac{-1 + 2\frac{v}{u}}{2 - \frac{v}{u}}.$$

Nakon zamjene $z = \frac{v}{u}$ slijedi $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} \cdot u + z$ pa jednadžba prelazi u jednadžbu sa separiranim varijablama:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} \cdot u + z = \frac{-1 + 2z}{2 - z} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{2 - z}{z^2 - 1}\,\mathrm{d}z$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{z+1}\right)\mathrm{d}z$$

$$\ln u + \ln C = \frac{1}{2}\ln(z-1) - \frac{3}{2}\ln(z+1)$$

$$Cu = \sqrt{\frac{z-1}{(z+1)^3}} \quad \Longrightarrow \quad C_1 u^2 = \frac{\frac{v}{u} - 1}{\left(\frac{v}{u} + 1\right)^3} \quad \Longrightarrow \quad v - u = C_1 (v + u)^3$$

$$y - x - 3 = C_1 (y + x - 1)^3.$$

Primjer 26. Riješimo jednadžbu

$$y' = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}.$$

▶ Sustav

$$\begin{aligned} x+2y+1&=0,\\ 2x+4y+3&=0, \end{aligned}$$

nema rješenja. Sad stavljamo supstituciju

$$x+2y=z, \qquad 1+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.$$

Dobivamo

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{2}=\frac{z+1}{2z+3}, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{4z+5}{2z+3}$$

$$\frac{2z+3}{4z+5}\mathrm{d}z=\mathrm{d}x, \qquad \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{z+\frac{5}{4}}\right]\mathrm{d}z=\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}z+\frac{1}{8}\ln\left(z+\frac{5}{4}\right)=x+C_1$$

$$4z+\ln\left(z+\frac{5}{4}\right)=8x+C_2$$

$$4(x+2y)+\ln(4x+8y+5)-\ln 4=8x+C_2$$

$$\ln(4x+8y+5)=4x-8y+C_3.$$

Zadatak 8. Odredi rješenje homogene diferencijalne jednadžbe, uz zadani početni uvjet.

1. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2-x^2}{x^2}$, $y(2)=6$;

2. $x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2+x^2$, $y(1)=4$;

3. $y^2x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^4-y^4$, $y(0)=2$;

4. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y}{x+y}$, $y(2)=7$;

5. $3x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x+y$, $y(1)=8$;

6. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{8x-4y}{x-2y}$, $y(2)=-7$;

7. $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3y+\dfrac{y^2}{x}$, $y(1)=4$;

8. $(x+y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4x-3y$, $y(2)=6$;

Zadatak 9. Sljedeće diferencijalne jednadžbe svedi na homogene i odredi njihovo opće rješenje:

1. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2x+y-2}{x-y+4}$;

2. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-3y+1}{x+y}$;

3. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+4y-3}{2x+6y-2}$;

4. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y+2}{x-y+3}$;

5. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3x+y-1}{6x+2y-3}$;

6. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2x+3y-4}{8x+y-2}$.