1.
Vektorski prostori

1.1. Baza i dimenzija vektorskoga prostora

Vektorski prostor. S pojmom vektorskoga prostora već smo se susreli, govorili smo o vektor-stupcima prostora $\mathbf{R}^n$, o dvodimenzionalnom, trodimenzionalnom prostoru vektora itd.

Svojstva vektorskoga prostora također smo već navodili u Matematici 1. Ponovit ćemo ta svojstva navodeći njegovu strogu definiciju.

Neprazni skup X na kojemu su definirane dvije operacije, $+ : X \times X \to X$ (**zbrajanje vektora** i $\cdot : \mathbf{R} \times X \to X$ **množenje skalara i vektora**) naziva se **vektorski prostor**[1] ako vrijede sljedeća svojstva:

VP_1) za sve $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ je $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (komutativnost).

VP_2) za sve $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ je $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ (asocijativnost).

VP_3) postoji vektor $0 \in X$ tako da za sve $\mathbf{x} \in X$ vrijedi $\mathbf{x} + 0 = 0 + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ (vektor 0 zovemo nul-vektorom).

VP_4) za svaki vektor $\mathbf{x} \in X$ postoji $\mathbf{x}' \in X$ tako da je $\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{x}' + \mathbf{x} = 0$ (vektor $\mathbf{x}'$ zovemo suprotnim vektorom od x, i označavamo ga sa $-\mathbf{x}$).

VP_5) za sve $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ i $\mathbf{x} \in X$ je $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$ (usklađenost množenja).

VP_6) za sve $\alpha \in \mathbf{R}$ i $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ je $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ (distributivnost množenja prema zbrajanju u X).

VP_7) za sve $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ i $\mathbf{x} \in X$ je $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ (distributivnost množenja prema zbrajanju u $\mathbf{R}$).

[1] engl. *vector space*, njem. *Vektorraum*, franc. *l'espace vectoriel*, rus. векторное пространство.

VP_8) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ (netrivijalnost množenja).

Govorimo preciznije da je vektorski prostor uređena trojac $(X, +, \cdot)$. Kažemo još da je to vektorski prostor *nad poljem* realnih brojeva $\mathbf{R}$, pošto se u definiciji množenja sa skalarom koriste realni brojevi. Umjesto polja $\mathbf{R}$ može se koristiti i drugo polje skalara, na primjer polje kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$. Tada bi govorili o vektorskom prostoru nad poljem $\mathbf{C}$ ili naprosto o kompleksnom vektorskom prostoru. Vektorski prostor si geometrijski predočujemo kao 'ravninu' kroz ishodište.

$*^**$

Neke smo primjere vektorskih prostora promatrali u Matematici II. Tamo smo pokazali da je skup M_{mn} svih matrica tipa $m \times n$ čini vektorski prostor, uz operacije matričnoga zbrajanja i množenja skalara s matricom.

Tako i vektor-stupci, odnosno vektor retci duljine n čine vektorski prostor, jer su to matrice tipa $n \times 1$ odnosno $1 \times n$.

Prostori V^1, V^2, V^3 vektora na pravcu, ravnini i u prostoru E^3, uz standardno definirane operacije zbrajanja i množenja sa skalarom također su vektorski prostori. Nazivamo ih klasičnim vektorskim prostorima.

Vektorski prostor mogu činiti i funkcije. Neka je X skup svih funkcija definiranih na intervalu $[a, b]$ s vrijednostima u $\mathbf{R}$. Operacije definiramo na način

$$(x + y)(t) := x(t) + y(t),$$
$$(\alpha x)(t) := \alpha x(t).$$

Svojstva $VP_1 - VP_8$ vrijede jer se svode na analogna svojstva za skup realnih brojeva.

$*^**$

Vektorski potprostor. Pri navođenju narednih primjera često ćemo biti u situaciji da promatramo neki podskup gore navedenih vektorskih prostora te se pitamo čini li i taj podskup vektorski prostor? S tim je u vezi sljedeća definicija.

Neka je $(X, +, \cdot)$ vektorski prostor. Podskup $W \subset X$ čini **vektorski potprostor** prostora X ako je on vektorski prostor uz iste operacije koje su definirane na prostoru X.

Da bi neki podskup vektorskog prostora bio vektorski potprostor, nužno je i dovoljno da linearne kombinacije vektora iz tog podskupa ostaju u njemu:

Teorem 1. *Neka je X vektorski prostor. $W \subset X$ je potprostor onda i samo onda ako vrijedi*

(1) *za sve vektore $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ i skalare $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ je $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in W$.*

Dokaz. Činjenica da je W podskup vektorskoga prostora dozvoljava nam da ne provjeravamo posebno vrijede li svojstva VP_1, VP_2, VP_5, VP_6, VP_7 i VP_8 u prostoru W: ona su ispunjena *jer vrijede u većem prostoru* X. Potrebno je samo provjeriti da li nul-element iz X leži u W te da li suprotni element svakoga elementa iz W i sam leži u W.

Ako je $\mathbf{x} \in W$, onda po pretpostavci u W leži i kombinacija $1 \cdot \mathbf{x} + (-1) \cdot \mathbf{x} = 0$. Također, čim je $\mathbf{x} \in W$, u tom prostoru leži i kombinacija $0 \cdot \mathbf{x} + (-1) \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x}$. Time smo pokazali da je W vektorski prostor.

Obratna tvrdnja je očevidna, ako je W vektorski prostor, on mora sadržavati linearni spoj svaka svoja dva elementa.

Uvjet (1) iz Teorema može se zamijeniti sa sljedeća dva uvjeta

(2a) za sve $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ je $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$,

(2b) za sve $\mathbf{x} \in W$ i $\alpha \in \mathbf{R}$ je $\alpha\mathbf{x} \in W$,

što čitatelj može lako sam provjeriti.

Linearna nezavisnost vektora. Za vektore $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ u zadanom vektorskom prostoru kažemo da su **linearno nezavisni** ako iz $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n\lambda_n = 0$ slijedi da su svi koeficijenti jednaki nula, tj. $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

U suprotnom kažemo da su vektori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ **linearno zavisni**. Drugim riječima, postoje skalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ koji nisu svi jednaki nula, takvi da vrijedi $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n\lambda_n = 0$.

Ako su vektori linearno nezavisni, jasno je da u tom slučaju mora biti $\mathbf{v}_i \neq 0$ za sve i. Dva su vektora $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ linearno nezavisna ako su neparalelni (tj. nisu na istom pravcu), tri su vektora linearno nezavisna ako su nekomplanarni (tj. nisu u istoj ravnini), itd.

U prostoru $\mathbf{R}^2$ su vektori $\mathbf{v}_1 = (1,0)^\top$ i $\mathbf{v}_2 = (0,1)^\top$ linearno nezavisni. Također i vektori $\mathbf{w}_1 = (4,3)^\top$ i $\mathbf{w}_2 = (-2,5)^\top$. Doista, iz $\lambda_1\mathbf{w}_1 + \lambda_2\mathbf{w}_2 = 0$ slijedi $4\lambda_1 - 2\lambda_1 = 0$ i $3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0$, a taj sustav ima rješenje $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Primjeri vektorskih prostora. Znajući za primjere vrlo općenitih vektorskih prostora, pomoću ovoga teorema možemo dati i neke nove primjere.

Budući da sve matrice tipa $n \times n$ čine vektorski prostor, onda će vektorski prostor činiti i sve dijagonalne matrice, sve gornje ili donje trokutaste matrice itd., jer je linearna kombinacija dvije takve matrice ponovo matrica istoga oblika.

Slično, vektorski prostor čini skup $C[a,b]$ svih neprekinutih funkcija na intervalu $[a,b]$, jer je zbroj neprekinutih funkcija ponovo neprekinuta funkcija. Vektorski prostor čini skup P svih polinoma, skup P_n svih polinoma stupnja $\leqslant n$ itd.

Ovi primjeri ukazuju na važnost pojma vektorskoga prostora.

$*^*{}^*$

Navest ćemo najvažniji način dobivanja vektorskih potprostora. Neka je X vektorski prostor te $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ bilo koji vektori iz X. Tvrdimo da je skup

$$W = \{\mathbf{a} \in X : \mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n,\ \lambda_i \in \mathbf{R}\}$$

vektorski potprostor. Da se uvjerimo u to, uzmimo dva elementa $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ovoga skupa:

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n, \quad \mathbf{b} = \mu_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \mu_n\mathbf{a}_n.$$

Onda je njihova linearna kombinacija oblika

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1)\mathbf{a}_1 + \ldots + (\alpha\lambda_n + \beta\mu_n)\mathbf{a}_n$$

i ona ponovo pripada skupu W. Stoga je W vektorski potprostor od X. Nazivamo ga **potprostor generiran (razapet) vektorima** $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ i označavamo s $L(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$. Zove se još i *linearni omotač* ili *linearna ljuska* skupa vektora $\{\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_n\}$.

Primjer 1. Neka je X prostor svih funkcija definiranih na $\mathbf{R}$. Izdvojimo sljedeće funkcije

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0(t) &= 1, \\ \mathbf{x}_1(t) &= t, \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_n(t) &= t^n. \end{aligned}$$

Onda je $L(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = P_n$, prostor svih polinoma stupnja $\leqslant n$.

Primjer 2. Neka je $\mathbf{a} \in V^3$ zadani vektor. $L(\mathbf{a})$ je vektorski potprostor koji čine svi vektori kolinearni s $\mathbf{a}$. Ako $\mathbf{b}$ nije takav, onda $L(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ predstavlja skup svih vektora u ravnini razapetoj s $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

$*^**$

Konačno-dimenzionalni i beskonačno-dimenzionalni prostori. Svi se prostori u gornjim primjerima mogu podijeliti u dvije bitno različite skupine. Prvu čine **konačno-dimenzionalni** a drugu **beskonačno-dimenzionalni** prostori. Je li neki prostor konačno ili beskonačno-dimenzionalan određujemo po broju linearno nezavisnih vektora koje možemo u njemu pronaći. Tako na primjer, prostor P svih polinoma zasigurno je beskonačno-dimenzionalan jer su za svaki n vektori 1, t, t^2,..., t^n linearno nezavisni: njihov linearni spoj jednak je nul funkciji ako za svaki t vrijedi

$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n = 0$$

što je moguće samo ako su svi koeficijenti jednaki nuli.

Jednako tako, beskonačno-dimenzionalni su prostor neprekinutih funkcija (jer sadrži sve polinome!), prostor *svih* funkcija itd.

Područje matematike koje izučava beskonačno-dimenzionalne vektorske prostore naziva se *funkcionalna analiza*. Linearna algebra bavi se uglavnom konačno-dimenzionalnim prostorima.

Po gornjoj definiciji, to znači da će u njima *broj linearno nezavisnih vektora biti ograničen*.

Dimenzija vektorskoga prostora. U konačno-dimenzionalnome prostoru broj linearno nezavisnih vektora je konačan. Sam naziv prostora sadrži u sebi riječ 'dimenzionalan' koji upravo određuje *koliki* je taj broj. **Dimenzija** prostora maksimalan je mogući broj linearno-nezavisnih vektora u tome prostoru. Taj broj označavamo s $\dim X$

Pojam dimenzije vektorskoga prostora intuitivno je jasan. Mi smo navikli govoriti o dvo ili tro-dimenzionalnom prostoru. Primjeri takvih prostora su $\mathbf{R}^2$, V^2, $\mathbf{R}^3$, V^3 itd, broj u oznaci prostora upravo označava njegovu dimenziju.

Kod složenijih prostora dimenziju je nešto teže utvrditi. Posebice, pri određivanju dimenzije raznih potprostora moramo koristiti aparat linearne algebre.

Prije no što nastavimo s navođenjem primjera, korisno je definirati još jedan pojam koji se prirodno nastavlja na ovo razmatranje. To je pojam *baze* vektorskoga prostora.

Baza vektorskoga prostora. Neka je X vektorski prostor dimenzije k. To znači da u njemu možemo pronaći skup $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ linearno nezavisnih vektora, takav da — dodamo li mu bilo koji novi element $\mathbf{x}$ — novodobiveni skup više neće biti linearno nezavisan. Stoga postoje skalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda$ od kojih je barem jedan različit od nule, takvi da vrijedi

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_k \mathbf{v}_k + \lambda \mathbf{x} = 0.$$

Pri tom je sigurno $\lambda \neq 0$, inače bi iščezavala linearna kombinacija vektora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Dijeljenjem s brojem $-\lambda$ vektor $\mathbf{x}$ prikazujemo u obliku spoja vektora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$:

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\mathbf{v}_1 - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda}\mathbf{v}_k.$$

Prema tome, svaki se vektor prostora može napisati u obliku linearne kombinacije $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$.

Ova dva svojstva upravo definiraju bazu prostora. Zbog njezine važnosti, ponovit ćemo ih u strogoj definiciji.

Neka je X vektorski prostor. **Baza** u X je svaki skup $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ koji ima sljedeća dva svojstva

(B_1) vektori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ su linearno nezavisni, i

(B_2) svaki drugi vektor $\mathbf{x} \in X$ može se napisati u obliku linearne kombinacije vektora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.

Skup svih linearnih kombinacija vektora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ označili smo s $L(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$. Svojstvo (B_2) kaže da za bazu vrijedi

$$X = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k).$$

Kažemo još da vektori baze *razapinju čitav prostor*. Prikaz svakoga vektora u odabranoj bazi je jednoznačan. Zaista, iz pretpostavke da $\mathbf{x}$ ima dva različita prikaza,

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mu_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \mu_k \mathbf{v}_k$$

slijedi

$$(\lambda_1 - \mu_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (\lambda_k - \mu_k)\mathbf{v}_k = 0$$

a odavde, zbog linearne nezavisnosti, svi koeficijenti moraju biti jednaki nuli, te je $\lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_k = \mu_k$.

$*\,*\,*$

Po gornjoj konstrukciji baze zaključujemo da se broj vektora u bazi podudara s dimenzijom prostora. No, ta tvrdnja nije posve očita pa bi bilo korisno dati detaljniji dokaz. Naime, baza ima beskonačno mnogo i nije očito da će svake dvije imati isti broj elemenata.

Teorem 2. *Svake dvije baze u vektorskom prostoru X imaju isti broj elemenata. Taj se broj podudara s dimenzijom prostora.*

Dokaz. Neka je n dimenzija prostora. Broj vektora u bazi mora biti manji ili jednak n jer su njezini elementi linearno nezavisni vektori. Pretpostavimo da postoji baza $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ kod koje je $m < n$.

Neka su $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ linearno nezavisni vektori toga prostora. (Takav skup postoji jer je n dimenzija prostora.) Kako je $X = L(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$, postoje brojevi (a_{ij}) takvi da vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= a_{11}\mathbf{v}_1 + \ldots + a_{m1}\mathbf{v}_m, \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_n &= a_{1n}\mathbf{v}_1 + \ldots + a_{mn}\mathbf{v}_m. \end{aligned}$$

Promotrimo sad linearnu kombinaciju vektora $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$. Ona ima oblik

$$x_1\mathbf{w}_1 + \ldots + x_n\mathbf{w}_n = (x_1a_{11} + \ldots + x_na_{1n})\mathbf{v}_1 + \ldots + (x_1a_{m1} + \ldots + x_na_{mn})\mathbf{v}_m$$

(pomnožimo gornje jednakosti redom s $x_1, \ldots x_n$ i zbrojimo ih). Može li ova kombinacija iščezavati na netrivijalan način? Promotrimo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Ovo je homogeni sustav s m jednadžbi i n nepoznanica. Kako je $m < n$, takav sustav uvijek ima netrivijalno rješenje $(x_1, \ldots, x_n)$. To znači da postoji linearna kombinacija

$$x_1\mathbf{w}_1 + \ldots + x_n\mathbf{w}_n$$

koja iščezava na netrivijalan način, pa su $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ linearno zavisni, protivno pretpostavci.

Time smo dobili proturječje. Pretpostavka $m < n$ nije stoga istinita i mora biti $m = n$.

Iskažimo odmah i jednu važnu posljedicu ovoga teorema.

Teorem 3. *Neka je X vektorski prostor dimenzije n. Onda svaki skup $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ od n linearno nezavisnih vektora čini bazu.*

Dokaz. Prvo svojstvo (B_1) je ispunjeno po pretpostavci. Da dokažemo drugo, dovoljno je primijetiti da je za svaki vektor $\mathbf{x}$ skup $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{x}\}$ linearno zavisan, inače bi dimenzija prostora bila veća od n. No, odavde slijedi da se $\mathbf{x}$ može prikazati kao linearna kombinacija vektora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, te oni razapinju cijeli prostor.

Ovaj teorem je izrazito koristan, jer za većinu prostora s kojima baratamo mi unaprijed znamo kolika im je dimenzija (recimo stoga što smo jednom pronašli neku bazu u njima). Želimo li odrediti neku drugu bazu, dovoljno je izabrati određen broj linearno nezavisnih vektora; nismo dužni provjeravati razapinje li taj skup čitav prostor.

Primjer 3. U prostoru P_n polinoma stupnja $\leqslant n$ bazu čine vektori

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0(t) &= 1, \\ \mathbf{e}_1(t) &= t, \\ \mathbf{e}_2(t) &= t^2, \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n(t) &= t^n, \end{aligned}$$

stoga je njegova dimenzija $n+1$.

Promotrimo sljedeći skup:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_0'(t) &= 1,\\
\mathbf{e}_1'(t) &= t-1,\\
\mathbf{e}_2'(t) &= (t-1)^2,\\
&\vdots\\
\mathbf{e}_n'(t) &= (t-1)^n.
\end{aligned}$$

Tvrdimo da i ovaj skup čini bazu. Broj elemenata u njemu je $n+1$. Oni su linearno nezavisni pošto svaki polinom ima veći stupanj od prethodnih i ne može se prikazati kao njihova linearna kombinacija. Stoga, po teoremu, ovaj skup čini bazu.

Zaključujemo da se svaki polinom $P(t)$ može napisati u obliku

$$P(t) = \lambda_0 + \lambda_1(t-1) + \ldots + \lambda_n(t-1)^n.$$

Iz Matematike II znamo da se ovdje zapravo radi o razvoju polinom u red potencija oko točke $a=1$, pa je $\lambda_k = \frac{P^{(k)}(1)}{k!}$.

***

Interesantno je da vrijedi i obrat teorema 3. Ako ne želimo provjeravati linearnu nezavisnost, onda možemo iskoristiti ovaj teorem:

Teorem 4. *Neka je X vektorski prostor dimenzije n. Ako za vektore $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ vrijedi $L(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)=X$, onda oni čine bazu.*

Dokaz. Moramo dokazati da su ovakvi vektori linearno nezavisni. Pretpostavimo suprotno. Izbacimo iz poredanog skupa $(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ sve vektore koji su linearno zavisni s prethodnima. Dobit ćemo skup koji će sadržavati $m<n$ vektora, biti će linearno nezavisan i *još uvijek* će razapinjati isti prostor. Takav skup je baza prostora, s manjim brojem elemenata od dimenzije prostora — proturječje. Zato su početni vektori linearno nezavisni.

***

Po ova dva teorema, pokazali smo da je skup $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ baza u prostoru X ako vrijede bilo koja dva od sljedeća tri uvjeta:

- $k=\dim X$,
- $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ su linearno nezavisni,
- $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ razapinju prostor X.

Treće je svojstvo u tom slučaju posjedica odabrana dva.

1.2. Opći vektorski prostori i prostori funkcija

Podsjetimo se pojma grupe, koju smo učili u Matematici 1. **Grupa** je neprazni skup G zajedno s binarnom operacijom $\circ$ tako da vrijedi ovo:

1) za svaka dva elementa $a, b \in G$ je $a \circ b \in G$,
2) za sve $a, b, c \in G$ je $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$,
3) postoji element $e \in G$ takav da za sve $a \in G$ vrijedi $e \circ a = a \circ e = a$ (e se zove neutralni element)
4) za svaki $x \in G$ opstoji $x^{-1} \in G$ takav da je $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$ (a^{-1} se zove inverzni element od a).

Ako je još k tome binarna operacija komutativna, onda kažemo da je G **komutativna ili Abelova grupa**, u čast znamenitog norveškog matematičara Nielsa Abela iz 19. st. Grupu kraće označavamo s $(G, \circ)$, ili samo kao G ako je jasno o kojoj se binarnoj operaciji radi.

U slučaju da je binarna operacija zapisana multiplikativno, tj. kao množenje, onda umjesto e često pišemo 1. Ako je binarna operacija na G zapisana aditivno, tj. kao $+$, onda automatski smatramo da je grupa Abelova, neutralni element zovemo nulelementom i označavamo se 0, a inverzni element od a zove suprotnim elementom i označavamo s $-a$.

Primjer 4. Neki jednostavni primjeri grupa su ovi:

a) grupa $G = \{1, -1\}$ s obzirom na množenje;
b) skup realnih brojeva $\mathbf{R}$ s obzirom na zbrajanje (također i $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}$ s obzirom na istu operaciju);
c) $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ s obzirom na množenje (također i interval $(0, \infty)$);
d) $\mathbf{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, gdje elemente zbrajamo po modulu n, tj. $a +_n b$ je jednak ostaku koji se dobiva pri dijeljenju uobičajenog zbroja $a + b$ s n. Na pr. u $\mathbf{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$, vrijedi $1 +_3 2 = 0$, pa je $-1 = 2$.
e) Skup $\mathbf{Z}_n^* = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ je grupa s obzirom na množenje $\cdot_n$ po modulu n onda i samo onda ako je n prim-broj. Npr. u $\mathbf{Z}_3^* = \{1, 2\}$ je $2 \cdot 2 = 1$, pa je $2^{-1} = 2$.
f) Skup svih kvadratnih matrica zadanog reda n koje su invertibilne čini grupu s obzirom na množenje matrica kao binarnu operaciju. Jedinični element je jedinična matrica. Ova grupa nije komutativna za $n \geqslant 2$.

Polje je neprazan skup F zajedno s dvije binarne operacije, zbrajanjem $+$ i množenjem $\cdot$, tako da vrijedi:

a) $(F, +)$ je komutativna grupa (znači ima nulu kao neutralni element)
b) $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ je komutativna grupa s obzirom na množenje (neutralni element označavamo s 1),
c) za sve $\lambda, \mu, \nu \in F$ vrijedi $\lambda(\mu + \nu) = \lambda\mu + \lambda\nu$ (distributivnost zbrajanje prema množenju).

Polje označavamo kao trojac $(F, +, \cdot)$, ili kraće samo kao F ako su pripadajuće dvije binarne operacije poznate.

Primjer 5. Najjednostavniji primjeri polja su
1) polje kompleksnih brojeva $(\mathbf{C}, +, \cdot)$;
2) $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ polje realnih brojeva;
3) polje racionalnih brojeva $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$;
4) Neka od konačnih polja su $(\mathbf{Z}_p, +_p, \cdot_p)$, gdje je p prim-broj. Polje s najmanjim mogućim brojem elemenata je $\mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$, s množenjem i zbrajanjem po modulu 2.

Elemente nekog polja F (kod nas najčešće $\mathbf{R}$ ili $\mathbf{C}$) zvat ćemo **skalarima**. Skalar je dakle drugi naziv za "broj". Uvedimo sada jednu od temeljnih struktura u linearnoj algebri.

Vektorski prostor nad zadanim poljem F je skup X zajedno s dvije operacije:
1) binarnom operacijom zbrajanja $+$ u X,
2) operacijom $\cdot$ kojom bilo kojem skalaru $\lambda \in F$ i elementu (vektoru) $x \in X$ pridružujemo $\lambda x \in X$ (Pažnja! Ovo "množenje" nije isto što i množenje u polju F),

tako da vrijedi:
a) $(X, +)$ je aditivna grupa (komutativnost podrazumijevamo); elemente od X zovemo **vektorima**,
b) usklađenost operacija množenja skalara u polju F i množenja skalara s vektorima u X:
$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \quad 1x = x,$$
za sve $\lambda, \mu \in F$ i $x \in X$
c) zakoni distribucije:
$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y,$$
za sve $\lambda, \mu \in F$ i $x, y \in X$.

Kada govorimo o vektorskom prostoru $(X, +, \cdot)$, onda se operacija $\cdot$ odnosi na množenje skalara iz F s vektorima iz X. Ne zaboravimo da u polju F imamo operaciju (međusobnog) množenja skalara, koje označavamo na isti način, koje se razlikuje od prethodnog množenja skalara i vektora.

U vektorskom prostoru X uvodimo **linearnu kombinaciju vektora** $x_1, \ldots, x_k \in X$ kao izraz
$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k \in X.$$
Za vektore $x_1, \ldots, x_k$ kažemo da su **linearno nezavisni** ako vrijedi da
$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0.$$
Zamislimo sve podskupove u X koji su sastavljeni od linearno nezavisnih vektora (linearno nezavisni podskupovi). Ako postoji prirodan broj k takav da svaki linearno nezavisan podskup od X ima broj elemenata koji je $\leqslant k$, onda kažemo da je vektorski prostor X **konačno-dimenzionalan**. Najmanji takav broj k zove se **dimenzija** vektorskog prostora X i označava sa $\dim X$ ili $\dim_F X$. Ako takav prirodan broj k ne postoji, kažemo da je vektorski prostor X **beskonačno-dimenzionalan**.

Za vektore $x_1, \ldots, x_k$ iz vektorskog prostora X kažemo da su **linearno zavisni** ako postoje skalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ koji nisu svi nula, takvi da je $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k = 0$.

Ako je X vektorski prostor nad poljem F, onda neki njegov podskup Y zovemo **vektorskim potprostorom** ako je Y vektorski prostor s operacijama $+$ i $\cdot$ naslijeđenim iz X. Kako su sva svojstva vektorskog prostora također naslijeđena na Y, da bi podskup Y bio vektorski potprostor treba provjeriti samo ovo:

a) ako su $x, y \in Y$, onda mora biti i $x + y \in Y$ (zatvorenost skupa Y s obzirom na zbrajanje vektora)
b) ako su $\lambda \in F$ i $x \in Y$, mora biti i $\lambda x \in Y$ (zatvorenost skupa Y s obzirom na množenje sa skalarima).

Kraće, Y je vektorski potprostor vektorskog prostora X ako je zatvoren s obzirom na uzimanje linearnih kombinacija:

$$\lambda, \mu \in F, \;\; x, y \in Y \quad \Rightarrow \quad \lambda x + \mu y \in Y.$$

Posebno, svaki potprostor Y od X sadrži nul-element 0. Potprostor Y si obično predočavamo kao podravninu (ili pravac) kroz ishodište 0 u X. Među mogućim potprostorima od X je i $Y = \{0\}$, koji zovemo **nul-potprostorom** od X. Zovemo ga i nul-dimenzionalnim prostorom. Potprostore od X koji su različiti od nul-potprostora i X zovemo **netrivijalnim potprostorima** od X.

Za odabrane vektore $x_1, \ldots, x_k$ u X možemo definirati vektorski prostor

$$L(x_1, \ldots, x_k)$$

svih linearnih kombinacija vektora $x_1, \ldots, x_k$. Zove se **prostorom razapetim vektorima** $x_1, \ldots, x_k$. To je najmanji vektorski potprostor od X koji sadrži vektore $x_1, \ldots, x_k$. Dimenzija mu je najviše k. Za bilo koji $x_1 \neq 0$ pripadni potprostor $L(x_1)$ zovemo **pravcem u** X razapetim vektorom x_1.

Ako je B neki podskup vektorskog prostora X, onda sa $L(B)$ označavamo skup svih linearnih kombinacija vektora odabranih iz B. To je najmanji vektorski potprostor od X koji sadrži skup B.

Bilo koji podskup B vektorskog prostora X takav da je

a) skup B linearno nezavisan, što po definiciji znači da je svaki njegov konačan podskup linearno nezavisan,
b) skup B razapinje cijeli X, tj. $L(B) = X$ (drugim riječima, za svaki $x \in X$ postoji konačan podskup od B čija linearna kombinacija daje x),

zovemo **bazom vektorskog prostora** X.

Ako je vektorski prostor X konačno-dimenzionalan, onda svake dvije baze u X imaju isti broj elemenata.

Ako je $k = \dim X < \infty$, i skup $\{x_1, \ldots, x_k\}$ linearno nezavisan, onda je $L(x_1, \ldots, x_k) = X$, tj. $\{x_1, \ldots, x_k\}$ je baza u X.

Presjek dvaju potprostora u X je opet potprostor od X. Za dva potprostora E i F od X možemo definirati **zbroj potprostora** $E + F$ kao skup svih vektora oblika $e + f$, gdje je $e \in E$ i $f \in F$. To je također potprostor od X. Ako je pritom $E \cap F = \{0\}$, onda zbroj takvih prostora zovemo **direktnom sumom potprostora**, i označavamo sa $E \oplus F$. Svaki vektor iz direktne sume onda možemo na jednoznačan način prikazati u obliku $e + f$, gdje je $e \in E$ i $f \in F$. Ako je $\{e_1, \ldots, e_k\}$ baza u E i $\{f_1, \ldots, f_l\}$ baza u F, onda je unija tih dviju baza - baza prostora $E \oplus F$, i dimenzija mu je $k + l$.

Ako su X i Y dva vektorska prostora nad istim poljem, onda je prirodno definirati **kartezijev produkt vektorskih prostora** $X \times Y$ kao vektorski prostor parova (x, y)

takvih da je $x \in X$ i $y \in Y$. Zbrajanje parova definiramo po komponentama, a množenje sa skalarom kao $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$. Jasno je da je $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$, jer ako je e_i baza u X, a f_j baza u Y, onda vektori $(e_i, 0)$ i $(0, f_j)$ zajedno čine bazu u $X \times Y$.

Ako je B bilo koji podskup od X, onda možemo definirati vektorski potprostor svih linearnih kombinacija elemenata iz B. Ako je Y pravi potprostor od X takav da za bilo koji $e \notin Y$ vrijedi $L(Y \cup \{e\}) = X$, onda kažemo da je Y potprostor u X **kodimenzije jedan**, ili **hiperprostor**. Drugim riječima, potprostor Y je kodimenzije jedan ako postoji jednodimenzionalan potprostor E u X takav da je $Y \oplus E = X$. Npr. ako je $\{x_1, \ldots, x_k\}$ baza u X, onda je potprostor $L(x_1, \ldots, x_{k-1})$ kodimenzije 1 u X.

Primjer 6. Jedan od najvažnijih primjera konačno-dimenzionalnih prostora je $X = \mathbf{R}^n$ nad poljem $F = \mathbf{R}$. Lako se vidi da je $\dim \mathbf{R}^n = n$. Slično, vektorski prostor $X = \mathbf{C}^n$ nad poljem $F = \mathbf{C}$ je n-dimenzionalan. Ako gledamo vektorski prostor $X = \mathbf{C}^n$ nad poljem $F = \mathbf{R}$, onda je njegova dimenzija $2n$. U tom slučaju naime možemo $\mathbf{C}^n$ poistovjetiti s $\mathbf{R}^{2n}$, jer je $\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (Gaussova ravnina).

Primjer 7. Ako na zadanom intervalu (a,b), $a < b$, gledamo funkcije $1, x, \ldots, x^k$, onda su njihove linearne kombinacije polinomi stupnja najviše k. Skup svih polinoma stupnja najviše k je vektorski prostor nad poljem realnih brojeva. Označavamo ga sa P_k. Očevidno je $\dim P_k = k+1$.

Skup svih polinoma s realnom varijablom x označavamo sa P. Očevidno je P beskonačno-dimenzionalan prostor, jer je $P = \cup_{k=1}^{\infty} P_k$.

Primjer 8. Primjer beskonačno-dimenzionalnog prostora je i skup X svih neprekinutih funkcija $f : (a,b) \to \mathbf{R}$, gdje je interval (a,b) učvršćen. To je vektorski prostor nad poljem realnih brojeva. U beskonačnom slijedu neprekinutih funkcija $1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots$, lako je vidjeti da je skup funkcija $\{1, x, x^2, \ldots, x^k\}$ linearno nezavisan za svaki k (naime, ako njihova linearna kombinacija, tj. polinom $a_0 1 + a_1 x + \ldots + a_k x^k$ stupnja $\leqslant k$, iščezava na intervalu (a,b), onda taj polinom ima bezbroj nultočaka, a to svojstvo prema Gaussovu osnovnom teoremu algebre ima samo nul-polinom, tj. vrijedi $a_i = 0$ za sve i). Taj važan beskonačno-dimanezionalan vektorski prostor označavamo sa $C(a,b)$ i zovemo **prostorom neprekinutih funkcija** na intervalu (a,b). Ovdje se dopušta da bude a ili b beskonačno, npr. $C(0,\infty)$. Primijetite da neprekinute funkcije definirane na otvorenom intervalu mogu imati singularitet na rubu intervala, kao npr. $1/x \in C(0,1)$.

Drugi primjer vektorskog prostora, također beskonačno-dimenzionalnog, je **prostor neprekinutih funkcija na zatvorenom intervalu** $[a,b]$. Označavamo ga sa $C([a,b])$. To je **prostor uniformno neprekinutih funkcija**, tj. jednoliko neprekinutih funkcija: za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za sve $x_1, x_2 \in (a,b)$ iz uvjeta $|x_1 - x_2| \leqslant \delta$ slijedi $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \varepsilon$. Neprekinuta funkcija definirana na zatvorenom intervalu je uvijek omeđena, pa funkcije iz $C([a,b])$ ne mogu imati singularitet, za razliku od funkcija iz $C(a,b)$. Lako se vidi da je $C([a,b]) \subset C(a,b)$, tj. svaku funkciju $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ možemo poistovjetiti s odgovarajućom funkcijom $f : (a,b) \to \mathbf{R}$.

Na sličan način može se definirati vektorski prostor $C^1(a,b)$ svih funkcija $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ koje su svuda diferencijabilne i f' je neprekinuta. Analogno i skup $C^2(a,b)$ svih funkcija $y=f(x)$ za koje su f, f' i f'' neprekinute (zapravo, dovoljno je zahtijevati samo neprekinutost od f'').

Slično definiramo i prostor $C^1([a,b])$ kao skup svih funkcija $f\in C^1(a,b)$ takvih da se derivacija $f':(a,b)\to\mathbf{R}$ može proširiti do neprekinute funkcije $f':[a,b]\to\mathbf{R}$. Poanta je u tome da su za $f\in C^1([a,b])$ funkcije f i f' neprekinute na zatvorenom intervalu (dakle i omeđene), za razliku od funkcija iz $C^1(a,b)$. Slično definiramo $C^2([a,b])$, kao vektorski prostor funkcija čije prve i druge derivacije se mogu proširiti s intervala (a,b) do neprekinute funkcije (dakle i omeđene) na zatvoren interval $[a,b]$.

Primjer 9. Još jedan važan beskonačno-dimenzionalan prostor je prostor funkcija $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ koje su kvadratno-integrabilne, tj. $\int_a^b|f(x)|^2dx<\infty$. Označavamo ga sa $L^2(a,b)$ i zovemo **Lebesgueovim prostorom kvadratno integrabilnih funkcija** (kratko: L^2-prostor). Vidjet ćemo kasnije da je to doista vektorski prostor, tj. iz $f,g\in L^2(a,b)$ slijedi da je i $f+g\in L^2(a,b)$. Npr. $x^{-1/3}\in L^2(0,1)$, ali $x^{-2/3}\notin L^2(0,1)$.

Skup svih funkcija $f\in L^2(a,b)$ za koje vrijedi $\int_a^b f(x)\,dx=0$ (lijeva strana pomnožena s $1/(b-a)$ zove se srednja vrijednost od f) je potprostor Y od $L^2(a,b)$ čija kodimenzija je 1. Doista, označimo li sa E potprostor svih konstantnih funkcija (možemo ga poistovjetiti sa $\mathbf{R}$), onda je $L^2(a,b)=E\oplus Y$. Svaku funkciju $f\in L^2(a,b)$ možemo naime rastaviti na dva dijela:

$$f(x)=e(x)+g(x),\quad e(x):=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,\quad g(x):=f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x),$$

i pritom je $e\in E$ i $g\in Y$.

Iz gornjih primjera dobivamo već cijelu jednu beskonačnu skalu vektorskih potprostora uloženih u $L^2(a,b)$ (ovdje pretpostavljamo da je interval (a,b) omeđen):

$$\{0\}\subset P_1\subset P_2\subset\ldots\subset P_k\ldots\subset C^2([a,b])\subset C^1([a,b])\subset C([a,b])\subset L^2(a,b).$$

Primijetite da prostor $C(0,1)$ nije sadržan u $L^2(0,1)$, jer npr. $1/x$ jest u $C(0,1)$, ali nije u $L^2(0,1)$.

Primjer 10. Skup realnih brojeva $\mathbf{R}$ nad poljem $\mathbf{R}$ (nad samim sobom) je jednodimenzionalan. S druge strane, isti skup $\mathbf{R}$ nad poljem racionalnih brojeva je beskonačno-dimenzionalan. Npr. ako je $\pi=3.14\ldots$ Ludolphov broj, onda se pokazuje da je beskonačan skup $1,\pi,\pi^2,\ldots$ linearno nezavisan (tj. svaki njegov konačan podskup je linearno nezavisan). Razlog je taj što je broj π **transcendentan**, tj. ne može se dobiti kao nultočka nekog netrivijalnog polinoma (tj. $P(x)\not\equiv 0$) s racionalnim koeficijentima.

Primjer 11. Spomenimo i primjere vektorskih prostora koji imaju konačno mnogo elemenata. Takav je npr. prostor $X = \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ nad poljem $F = \mathbf{Z}_2$, koji ima četiri elementa (vektora). Njegova dimenzija jednaka je 2. Zbroj bilo koja dva ista vektora je nul-vektor. On ima ukupno tri netrivijalna potprostora. To su tri pravca kroz ishodište, a svaki pravac sastoji se od samo dva elementa. Općenitije, vektorski prostor $X = \mathbf{Z}_p \times \ldots \times \mathbf{Z}_p$ (k puta), gdje je p prost broj, je k-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbf{Z}_p$. On ima konačno mnogo elemenata, ukupno p^k.

Moguće je definirati matrice s elementima iz zadanog polja F, množenje matrica. Pojam determinante kvadratne matrice, regularne matrice, inverzne matrice, ranga, defekta su potpuno analogni kao i za polje $F = \mathbf{R}$. Inverzna matrica nad poljem F računa se po analognoj formuli,

$$A^{-1} = (\det A)^{-1}(A_{ij})^\top, \quad A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij},$$

gdje su M_{ij} minore matrice A (dobiju se tako da brišemo i-ti redak i j-ti stupac matrice A i izračunamo determinantu). Vrijedi i Binet-Cauchyjeva formula $\det AB = \det A \det B$.

Primjer 12. Izračunajmo A^{-1} za $A = [\,1\ \ 3//0\ \ 5\,]$, s koeficijentima iz polja $\mathbf{Z}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Vrijedi

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1]^\top = 3[\,[\,]5 & 4 \\ 0 & 1] = [\,[\,]1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ovdje smo $1/5$ računali tako da računamo umnoške $5 \cdot 2$, $5 \cdot 3$,... $5 \cdot 6$. Jedan od tih umnožaka jednak je jedan: $5 \cdot 3 = 1$, dakle $5^{-1} = 3$. Također, $-3 = 4$ jer je $3 + 4 = 0$.

1.3. Promjena baze

Neka je X bilo koji vektorski prostor dimenzije n te $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ dvije po volji odabrane baze u tome prostoru. Prvu ćemo zvati *stara*, a drugu *nova* baza.

Vektor $\mathbf{x}$ ima u te dvije baze prikaz

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n = x'_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + x'_n\mathbf{e}'_n.$$

U ovakvoj situaciji prirodno se nameće pitanje: na koji su način povezane komponente vektora u staroj i novoj bazi? Da bismo odgovorili na nj, potrebno je pronaći vezu između vektora stare i nove baze. Ta se veza može izraziti na dva načina. Kako su obje baze ravnopravne, možemo prikazati vektore nove baze kao spoj vektora stare i obratno. Odaberimo prvu mogućnost:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= t_{11}\mathbf{e}_1 + \ldots + t_{n1}\mathbf{e}_n, \\ &\vdots \\ \mathbf{e}'_n &= t_{1n}\mathbf{e}_1 + \ldots + t_{nn}\mathbf{e}_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Načinimo *matricu prijelaza* između dviju baza:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & & \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}.$$

Njeni stupci predstavljaju komponente vektora nove baze prikazanih pomoću vektora stare baze.

Pređimo sad na izračun komponenata vektora u ove dvije baze.

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j' \mathbf{e}_j' = \sum_{j=1}^{n} x_j' \left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij} \mathbf{e}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j' \right) \mathbf{e}_i.$$

Odavde zaključujemo da vrijedi

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j' \tag{2}$$

ili, u matričnom zapisu

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}', \text{ tj. } \mathbf{x}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}. \tag{3}$$

Drugim riječima, tražene komponente $x_1', \dots, x_n'$ rješenje su linearnoga sustava

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & & & \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Matrica sustava je regularna jer je punoga ranga (stupci su linearno nezavisni), stoga ovaj sustav uvijek ima (jedinstveno) rješenje.

Prostor $\mathbf{R}^n$. Za nas je najvažniji primjer prostora $\mathbf{R}^n$. Promotrimo opisane pojmove i njihove veze u ovoj jednostavnijoj situaciji.

O elementima prostora $\mathbf{R}^n$ možemo govoriti kao o vektor-stupcima, ili pak o vektor-retcima: to je samo stvar zapisivanja vektora. Mi ćemo ovdje zapisivati elemente prostora kao *poredane n-terce*. Operacije su definirane na način:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$
$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

U prostoru $\mathbf{R}^n$ izdvajamo n karakterističnih vektora:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, \dots, 0), \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

Skup $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ nazivamo **kanonskom bazom** prostora $\mathbf{R}^n$.

Pokažimo da ovaj skup zaista čini bazu prostora. Linearna kombinacija tih vektora ima oblik:

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n = \lambda_1 (1, \dots, 0) + \dots + \lambda_n (0, \dots, 1) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

i ona iščezava onda i samo onda kad su svi skalari λ_i jednaki nuli. Nadalje, bilo koji element $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ može se napisati u obliku

$$\mathbf{x} = (x_1 \ldots, x_n) = x_1(1, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, \ldots, 1) = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots x_n\mathbf{e}_n$$

te je on spoj vektora $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Time smo utvrdili da je dimenzija prostora $\mathbf{R}^n$ jednaka n.

$*^*{}^*$

Baza u svakom vektorskom prostoru ima beskonačno mnogo, sve su one među sobom ravnopravne. Mi smo slobodni birati bazu po vlastitome izboru, ovisno o problemu koji rješavamo. U prostoru $\mathbf{R}^n$ je za većinu problema najpogodnija kanonska baza, jer su koeficijenti vektora u toj bazi jednaki njegovim koordinatama. Međutim, u nekim je problemima nužno preći i na neku drugu bazu. Općeniti postupak prijelaza opisali smo u prošloj točki. No, ako je jedna od baza kanonska, onda se taj postupak pojednostavnjuje.

Neka je dakle $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ kanonska, a $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ neka druga baza. Vektor $\mathbf{x}$ ima u te dvije baze prikaz

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n = x'_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + x'_n\mathbf{e}'_n.$$

Olakšanje prema općenitoj situaciji sastoji se u tome što je prikaz vektora nove baze preko vektora stare iznimno jednostavan: koordinate vektora jednake su komponentama u tome prikazu: Neka je

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= (t_{11}, \ldots, t_{n1}) = t_{11}\mathbf{e}_1 + \ldots + t_{n1}\mathbf{e}_n, \\ &\vdots \\ \mathbf{e}'_n &= (t_{1n}, \ldots, t_{nn}) = t_{1n}\mathbf{e}_1 + \ldots + t_{nn}\mathbf{e}_n, \end{aligned}$$

zapis vektora druge baze. Onda imamo sljedeću vezu:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}'. \tag{5}$$

odnosno

$$\mathbf{x}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}. \tag{6}$$

Primjer 13. Vektori $\mathbf{a}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{a}_2 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ čine bazu u prostoru V^2. Kako glase koordinate točke $T(2,3)$ kartezijevoga sustava u sustavu $(O; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$?

Pitanje je ekvivalentno ovome: Kako glasi rastav radij-vektora točke T po bazi $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$? Po formuli (5), koordinate dobivamo rješavajući sustav

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Odavde:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Moguć je naravno i izravan način rješavanja preko $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} = x'(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + y'(-2\mathbf{i} + \mathbf{j})$.