1.

Uvod

1.1. Problem matematičkog programiranja

Mnogi problemi koji se javljaju kako u praksi tako i u znanosti, prevedeni na matematički oblik sastoje se u određivanju ekstrema (maksimuma ili minimuma) neke funkcije uz zadana ograničenja. Pritom funkcija čiji se ekstrem želi odrediti obično ima određeno značenje, kao što su npr. profit, troškovi i drugo, dok ograničenja, najčešće u obliku nejednadžbi ili jednadžbi, predstavljaju tehnološke, tržišne i druge uvjete za zadani problem. To znači da se između mnogih varijanata koje mogu biti rješenja određenog problema nastoji pronaći najbolja, optimalna po nekom kriteriju. Za rješavanje takvih problema klasični matematički aparat diferencijalnog i integralnog računa nije pogodan. Zato je bilo potrebno razviti teoriju i konstruirati posebne metode pomoću kojih je moguće rješavati složene probleme ekstrema, često s velikim brojem varijabli i ograničenja, u obliku nejednadžbi. Tako je u posljednjih šezdesetak godina nastala disciplina matematičko programiranje, koja se danas sve više razvija uz pomoć suvremenih računskih strojeva i nalazi sve veću primjenu u ekonomici, inženjerstvu i drugdje.

Problem matematičkog programiranja sastoji se u određivanju ekstremne vrijednosti (maksimuma ili minimuma) funkcije na nekom skupu. Neka je $f : S \longmapsto \mathbb{R}$ funkcija od n varijabli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ definirana na skupu S iz euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$. Tada se problem matematičkog programiranja sastoji u sljedećem:

$$\text{minimizirati } f(\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

uz ograničenja

$$\mathbf{x} \in S, \tag{1.2}$$

gdje je $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^T$ vektor, dok T kao eksponent označava transpoziciju. Dakle, treba naći točku (vektor) $\mathbf{x}^* \in S$ (ako takva točka postoji!) sa svojstvom da je

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} \in S. \tag{1.3}$$

U tom slučaju kažemo da je $\mathbf{x}^*$ **točka globalnog (ili apsolutnog) minimuma** funkcije f na skupu S, dok je $f^* = f(\mathbf{x}^*)$ **vrijednost globalnog (ili apsolutnog) minimumuma** funkcije f na skupu S. Ako postoji realni broj $\varepsilon > 0$ takav da vrijedi

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}), \ \forall \mathbf{x} \in S \cap N(\mathbf{x}^*), \tag{1.4}$$

gdje je $N(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) \leq \varepsilon\}$ neka ε – okolina točke $\mathbf{x}^*$, dok je $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)$ udaljenost između $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}^*$, tada se radi o **točki lokalnog (ili relativnog) minimuma $\mathbf{x}^*$**, te **vrijednosti lokalnog (ili relativnog) minimuma** $f^* = f(\mathbf{x}^*)$. Ako u (1.3) vrijedi znak $<$ za $\mathbf{x} \in S, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ kažemo da je $\mathbf{x}^*$ **točka strogog (ili izoliranog) globalnog (ili apsolutnog) minimuma**. Slično tome, ako u (1.4) vrijedi znak $<$ za $\forall \mathbf{x} \in S \cap N(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ kažemo da je $\mathbf{x}^*$ **točka strogog (ili izoliranog) lokalnog (ili relativnog) minimuma**.

Ako se pak radi o problemu u kojem treba maksimizirati funkciju f na skupu S, to znači da u relaciji (1.3) znak $\leq$ treba zamijeniti znakom $\geq$, pa kažemo da se tada radi o **točki $\mathbf{x}^*$ globalnog (ili apsolutnog) maksimuma**. Slično tome, ako u (1.4) umjesto znaka $\leq$ vrijedi znak $\geq$, riječ je o **točki $\mathbf{x}^*$ lokalnog (ili relativnog) maksimuma**. Ako u (1.3) vrijedi znak $>$ za $\forall \mathbf{x} \in S$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$, kažemo da je $\mathbf{x}^*$ **točka strogog (ili izoliranog) globalnog (ili apsolutnog) maksimuma**. Ako pak u (1.4) vrijedi znak $>$ za $\forall \mathbf{x} \in S \cap N(\mathbf{x}^*)$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$, radi se o **točki $\mathbf{x}^*$ strogog (ili izoliranog) lokalnog (ili relativnog) maksimuma**.

U slučaju maksimizacije funkcije f na skupu S, zbog svojstva

$$\max_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x}) = -\min_{\mathbf{x} \in S} [-f(\mathbf{x})] \tag{1.5}$$

taj se problem može svesti na problem minimizacije (1.1) – (1.2), pa ćemo se zato ograničiti uglavnom na razmatranje tog problema. Istaknimo još da se funkcija f koju treba minimizirati naziva **funkcijom cilja (ili kriterija)**, dok je S **skup mogućih (ili dopustivih) rješenja**. Točka $\mathbf{x}^* \in S$ je moguće rješenje za koje se doseže minimalna vrijednost funkcije cilja f i zove se **optimalno rješenje** problema (1.1) – (1.2).

Najčešće se **problem matematičkog programiranja** promatra u obliku

$$\min f(\mathbf{x}) \tag{1.6}$$

uz ograničenja

$$g_i(\mathbf{x}) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m \tag{1.7}$$

$$h_j(\mathbf{x}) \leq 0, \ j = 1, 2, \ldots, p \tag{1.8}$$

$$\mathbf{x} \in G. \tag{1.9}$$

Pritom su $g_i : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m, h_j : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}, j = 1, 2, \ldots, p$ realne funkcije, dok je $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Ograničenja (1.7) su u obliku jednadžbi, ograničenja (1.8) su nejednadžbe, dok (1.9) mogu biti npr. ograničenja nenegativnosti na varijable, pa je skup $G = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \geq 0\}$. Tada je svaka točka iz skupa

$$S = \{\mathbf{x} | g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, h(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in G\}, \tag{1.10}$$

gdje su $g : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$ i $h : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^p$ vektorske funkcije, **moguće rješenje** problema matematičkog programiranja (1.6) – (1.9). Može se reći da je **matematičko programiranje** disciplina koja se bavi izučavanjem problema oblika (1.6) – (1.9) i metodama za njihovo rješavanje, uz različite uvjete koji se postavljaju na funkcije $f, g_1, \dots g_m, h_1, \dots, h_p$ i skup G.

Problemi matematičkog programiranja mogu se klasificirati npr. na neprekidne ili diskretne, determinističke ili stohastičke, linearne ili nelinearne, jednokriterijske ili višekriterijske, itd. Npr., ako je funkcija cilja linearna, uz ograničenja gdje su funkcije g_i, h_j linearne, te je skup G nenegativni ortant, radi se o **problemu linearnog programiranja (LP)**. Ako je pak funkcija cilja nelinearna ili su u ograničenjima (1.7), (1.8) neke ili sve funkcije g_i, h_j nelinearne ili oboje, to je problem **nelinearnog programiranja (NLP)**. U nelinearnom programiranju važan je slučaj **konveksnog programiranja (KP)**, u kojem treba minimizirati konveksnu funkciju (odnosno maksimizirati konkavnu funkciju) na konveksnom skupu. Istaknimo još i **problem cjelobrojnog linearnog programiranja (CLP)**, u kojem se na varijable postavlja i ograničenje cjelobrojnosti.

Napomenimo također važan slučaj u kojem nema ograničenja (1.7) – (1.8), dok je $G = \mathbb{R}^n$, gdje treba naći minimum funkcije f na cijelom prostoru $\mathbb{R}^n$. Naime, postoje metode kojima se problem s ograničenjima nastoji svesti na niz problema bez ograničenja. Osim toga, može se promatrati problem samo s ograničenjima (1.7) u obliku jednažbi, dok je $G = \mathbb{R}^n$. Ta dva problema s diferencijabilnim funkcijama $f, g_i, i = 1, 2, \dots, m$ spadaju u tzv. klasičnu optimizaciju.

1.2. Ilustrativni primjeri

Za ilustraciju navedimo nekoliko primjera do čijih rješenja možemo doći jednostavnim, uglavnom geometrijskim razmatranjima.

Primjer 1.1. Promatrajmo sljedeći problem matematičkog programiranja s dvije varijable i tri ograničenja uz uvjete nenegativnosti na varijable:

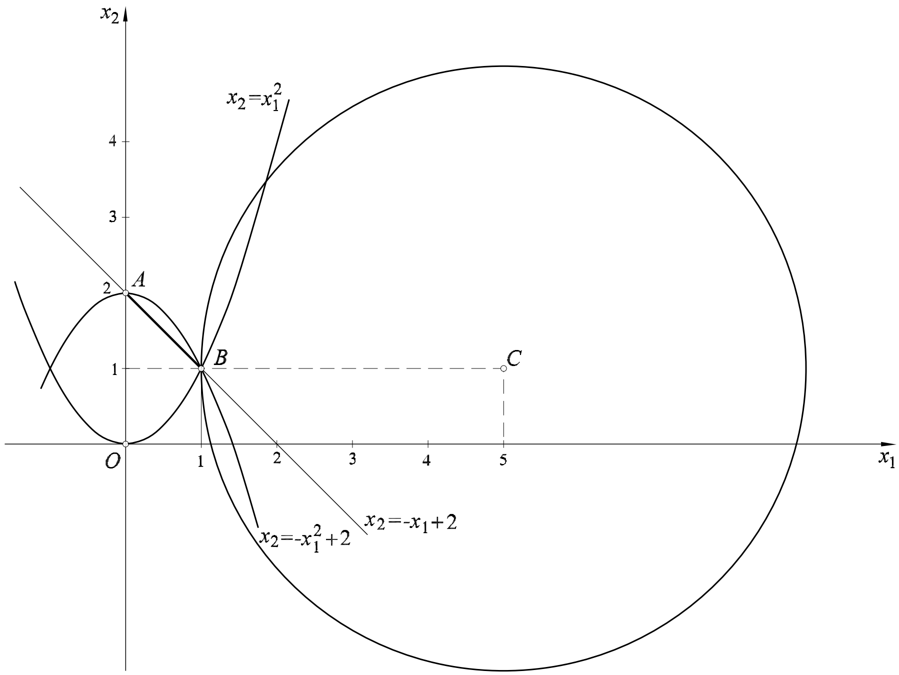
$$\min f(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 1)^2$$

uz ograničenja

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 - 2 = 0 \\ h_1(x_1, x_2) &= x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ h_2(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2 - 2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

To je problem nelinearnog programiranja, sa skupom $G = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, dok je skup mogućih rješenja S dužina $\overline{AB}$ na slici 1.1., gdje je $A(0,2)$, $B(1,1)$. Kako funkcija cilja predstavlja kvadrat udaljenosti od točke $C(5,1)$ do proizvoljne točke $T(x_1, x_2)$ na dužini $\overline{AB}$, očigledno se minimum doseže u točki $B(1,1)$. To znači da je $x_1^* = 1$, $x_2^* = 1$, dok je $f^* = f(x_1^*, x_2^*) = 16$. Primijetimo da je skup S mogućih rješenja konveksan skup, a rješenje se doseže u vrhu B tog skupa i radi se o točki strogog globalnog minimuma.



Slika 1.1. Rješenje primjera 1.1

Primjer 1.2. Razmotrimo zatim ovaj primjer maksimizacije linearne funkcije:

$$\max f(x_1,x_2) = x_1 + 4x_2$$

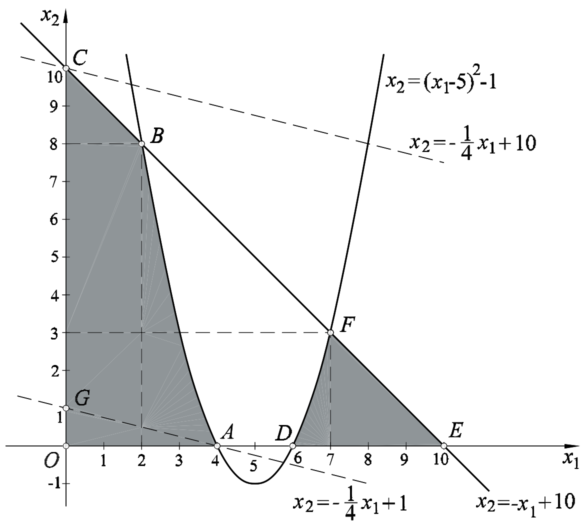
uz ograničenja

$$\begin{aligned} h_1(x_1,x_2) &= -(x_1-5)^2 + x_2 + 1 \le 0 \\ h_2(x_1,x_2) &= x_1 + x_2 - 10 \le 0 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Skup mogućih rješenja sastoji se od dva dijela na slici 1.2. Prvi dio je lik $OABC$, gdje je $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(2,8)$, $C(0,10)$, dok je drugi dio lik DEF, s vrhovima $D(6,0)$, $E(10,0)$, $F(7,3)$. Točke u kojima funkcija cilja doseže jednaku konstantnu vrijednost $f(x_1,x_2) = x_1+4x_2 = c, c \in \mathbb{R}$, nalaze se na pravcu koji ima jednažbu $x_1+4x_2 = c$. Takav je, na primjer, pravac AG s jednadžbom $x_1+4x_2 = 4$ prikazan iscrtkanom linijom na slici 1.2., koji prolazi točkama $A(4,0)$ i $G(0,1)$. U točkama tog pravca funkcija cilja doseže vrijednost 4. Za različite vrijednosti $c, c \in \mathbb{R}$ dobivamo skup paralelnih pravaca s koeficijentom smjera $k = -1/4$. Ti pravci su tzv. razinske (ili nivo) linije, sa svojstvom da oni koji su udaljeniji od ishodišta daju veću vrijednost funkcije cilja. To znači da među njima treba naći onaj za koji je udaljenost od ishodišta najveća, a ima zajedničkih točaka sa skupom S. Takav je pravac paralelan s pravcem AG kroz točku $C(0,10)$, što znači da je $x_1^* = 0, x_2^* = 10$ točka (strogog) lokalnog maksimuma (koji je ujedno i globalni), s vrijedošću funkcije cilja $f^* = 40$. Međutim, vidi se da je i točka $F(7,3)$ točka (strogog) lokalnog maksimuma

$\overline{x}_1^* = 7, \overline{x}_2^* = 3$, s vrijednošću funkcije cilja $\overline{f}^* = 19$. Napomenimo da skup S mogućih rješenja nije konveksan.



Slika 1.2. Lokalni i globalni maksimum u primjeru 1.2

Primjer 1.3. Razmotrimo problem nelinearnog programiranja u kojem su ograničenja samo u obliku nejednadžbi:

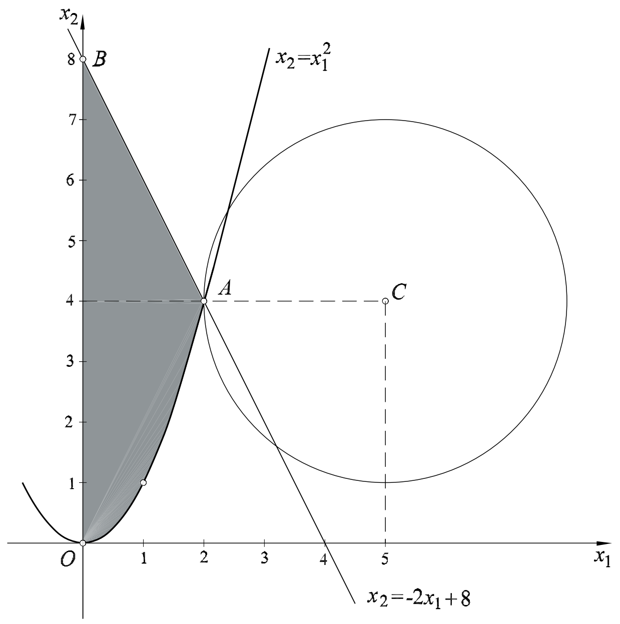
$$\min f(x_1,x_2) = (x_1-5)^2 + (x_2-4)^2$$

uz ograničenja

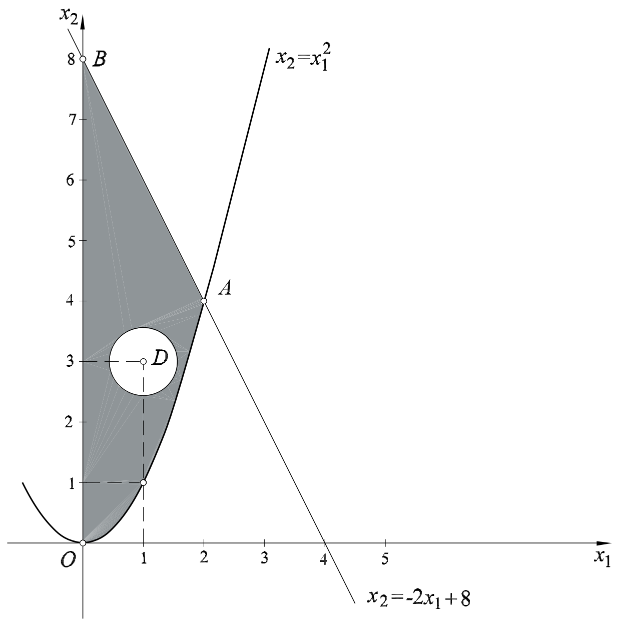
$$\begin{array}{rcl} h_1(x_1,x_2) & = & x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ h_2(x_1,x_2) & = & 2x_1 + x_2 - 8 \leq 0 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Skup mogućih rješenja je lik OAB na slici 1.3., gdje je $O(0,0)$, $A(2,4)$, $B(0,8)$. Ako promatramo linije u ravnini u kojima se doseže jednaka vrijednost funkcije cilja $f(x_1,x_2) = r^2$, $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$, lako se vidi da su to kružnice sa središtem u točki $C(5,4)$ polumjera r. Te kružnice su tzv. razinske (ili nivo) linije, između kojih treba naći onu koja ima zajedničkih točaka sa skupom S za koje je udaljenost od točke C najmanja. Očigledno je takva točka $A(2,4)$, pa je $x_1^* = 2$, $x_2^* = 4$, $f^* = 9$. Kao i u primjeru 1.1, skup mogućih rješenja je konveksan, a optimalno rješenje je točka globalnog minimuma koji se doseže u vrhu A.



Slika 1.3. Rješenje primjera 1.3



Slika 1.4. Rješenje primjera 1.4

Primjer 1.4. Promatrajmo slučaj u kojem je skup S mogućih rješenja isti kao u primjeru 1.3 (vidi sl. 1.3.), ali neka je funkcija cilja koju treba minimizirati oblika

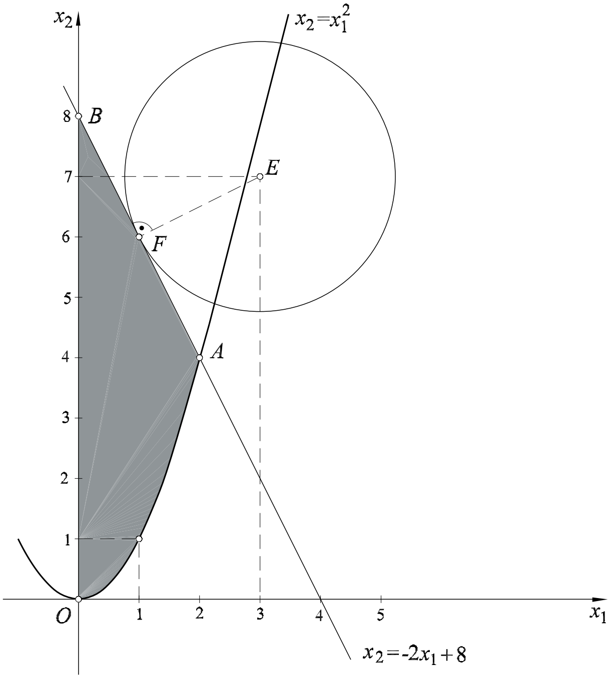
$$f(x_1,x_2) = (x_1-1)^2 + (x_2-3)^2.$$

Tada su razinske linije kružnice sa središtem u točki $D(1,3)$ i rješenje je očigledno točka $D(1,3)$, u kojoj je vrijednost funkcije cilja jednaka nuli, dok je u svim drugim točkama iz skupa S pozitivna. Dakle, opet se radi o strogom globalnom minimumu, koji je unutarnja točka skupa S mogućih rješenja.

Primjer 1.5. Razmotrimo problem

$$\min f(x_1,x_2) = (x_1-3)^2 + (x_2-7)^2$$

na skupu S određenom ograničenjima iz primjera 1.3 (vidi sl. 1.5.). Budući da su razinske linije ovaj put kružnice sa središtem u točki $E(3,7)$, rješenje će očigledno biti točka F na dužini $\overline{AB}$ u kojoj kružnica sa središtem u točki E dodiruje tu dužinu, jer je to točka za koju je udaljenost od točke E do skupa mogućih rješenja S najmanja. Kako odrediti koordinate te točke? Najprije treba pronaći jednadžbu pravca kroz točku E, koji je okomit na pravac određen točkama A i B, a zatim odrediti njihovo sjecište. Jednadžba pravca kroz točke A i B je $x_2 = -2x_1 + 8$, a jednadžba pravca kroz točku E okomitog na njega je $x_2 = 0.5x + 5.5$. Sjecište tih dvaju pravaca je točka $F(1,6)$, što znači da je $x_1^* = 1$, $x_2^* = 6$, $f^* = 5$. Istaknimo da se rješenje nalazi na granici skupa S mogućih rješenja.



Slika 1.5. Rješenje primjera 1.5

Primjer 1.6. Promatrajmo problem

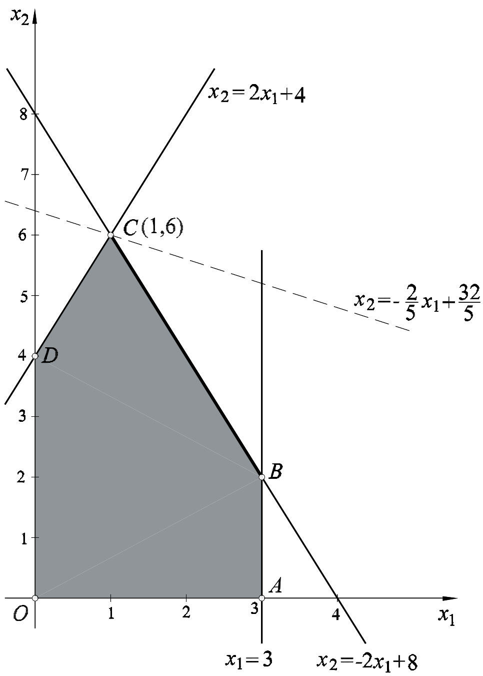
$$\max f(x_1,x_2) = 2x_1 + 5x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{aligned} h_1(x_1,x_2) &= -2x_1 + x_2 - 4 \le 0 \\ h_2(x_1,x_2) &= 2x_1 + x_2 - 8 \le 0 \\ h_3(x_1,x_2) &= x_1 - 3 \le 0 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Kako je funkcija cilja linearna, a i u ograničenjima su funkcije h_i linearne, radi se o problemu linearnog programiranja. Skup S mogućih rješenja je peterokut $OABCD$ na slici 1.4., pri čemu je $O(0,0)$, $A(3,0)$, $B(3,2)$, $C(1,6)$, $D(0,4)$. Razinske linije su pravci s koeficijentom smjera $k = -2/5$, a optimalno rješenje je u točki C. Njene koordinate dobiju se kao sjecište pravaca $-2x_1 + x_2 - 4 = 0$ i $2x_1 + x_2 - 8 = 0$, pa je zato $x_1^* = 1$, $x_2^* = 6$, $f^* = 32$. Primijetimo da je skup S mogućih rješenja omeđen (sadržan je u krugu radijusa $r = 10$ sa središtem u ishodištu), konveksan i zatvoren (tj. sadrži sve svoje granične točke), te da se rješenje doseže u njegovom vrhu, što, kako će se kasnije pokazati, nije slučajno.



Slika 1.6. Rješenja primjera 1.6 i 1.8

Primjer 1.7. Promatrajmo problem linearnog programiranja

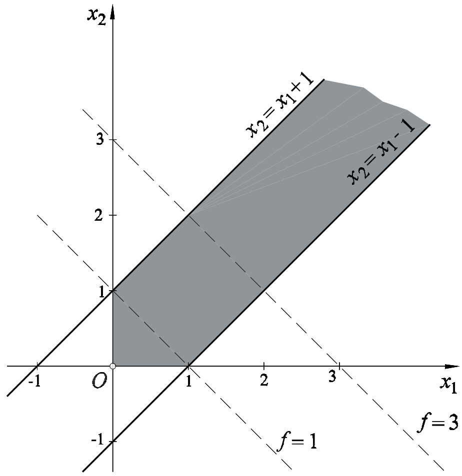
$$\max f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$$

uz ograničenja

$$h_1(x_1,x_2) = \quad x_1 - x_2 - 1 \le 0$$
$$h_2(x_1,x_2) = -x_1 + x_2 - 1 \le 0$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Skup S mogućih rješenja prikazan je na slici 1.7. Kao što se vidi na slici, taj skup nije omeđen, tj. ne postoji krug dovoljno velikog radiusa r sa središtem u ishodištu, koji bi sadržavao skup S. Ako promatramo razinske linije, a to su paralelni pravci oblika $x_1 + x_2 = c, c \in \mathbb{R}$ s koeficijentom smjera $k = -1$, vidimo da se možemo udaljiti koliko želimo daleko od ishodišta, a da ćemo se nalaziti u skupu S i time doseći po volji veliku vrijednost funkcije cilja. To znači da funkcija cilja nije omeđena odozgo na skupu S, pa problem nema optimalno rješenje. Ako umjesto maksimizacije funkcije cilja promatramo njenu minimizaciju na istom skupu S, tada problem ima optimalno rješenje $x_1^* = 0, x_2^* = 0,\ f^* = 0$.



Slika 1.7. Problem u primjeru 1.7 nema optimalnog rješenja

Primjer 1.8. Promatrajmo problem linearnog programiranja

$$\max f(x_1,x_2) = 10x_1 + 5x_2$$

uz ograničenja ista kao u primjeru 1.6, što znači da je skup S mogućih rješenja ponovno peterokut $OABCD$ u koordinatnoj ravnini x_1Ox_2 na slici 1.6. Lako se vidi da se u tom slučaju optimalno rješenje doseže u vrhovima B i C, a to znači i u svim točkama dužine $\overline{BC}$. Dakle, skup optimalnih rješenja je konveksan skup.

Istaknimo da prema Weierstrassovom teoremu (vidi npr. de la Fuente [23], str. 99; Bazaraa et al. [4], str. 41) neprekidna funkcija definirana na kompaktnom (tj. zatvorenom i omeđenom) skupu iz $\mathbb{R}^n$ doseže svoj (globalni) minimum i maksimum, što se vidi u navedenim primjerima. U primjeru 1.7 to nije slučaj, jer skup mogućih rješenja nije omeđen.

Osim toga, za problem konveksnog programiranja, u kojem treba minimizirati (maksimizirati) konveksnu (konkavnu) funkciju na konveksnom skupu, vrijedi činjenica da je svaki lokalni minimum (maksimum) ujedno i globalni, te da je skup optimalnih rješenja konveksan. To je ilustrirano u primjerima 1.1, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 i 1.8.

1.3. Formulacija nekih problema matematičkog programiranja

Navedimo nekoliko primjera formulacije problema, koji se svode na problem matematičkog programiranja.

1.3.1. Problem lokacije

Problem lokacije centara proizvodnje često se susreće u praksi. To može biti problem lokacije strojeva ili pogona u tvornici, zatim problem lokacije tvornica ili skladišta iz kojih se proizvodi mogu distribuirati trgovačkim centrima ili potrošačima, problem lokacije vatrogasnih brigada ili policijskih stanica, itd. Ovdje ćemo prikazati jednostavan primjer formulacije jednog problema lokacije. (Vidi npr. Avriel [2], str. 2–3.)

Pretpostavimo da su nam poznati n centara potrošnje nekog proizvoda i količina potražnje svakog od njih. Potražnja može biti zadovoljena iz m skladišta zadanog kapaciteta, čiju lokaciju treba odrediti prema nekom kriteriju. Kako bismo mogli formulirati navedeni problem, uvedimo ove oznake:

(x_i, y_i) – nepoznate koordinate skladišta i ($i = 1, 2, \ldots, m$);

a_i – kapacitet skladišta i ($i = 1, 2, \ldots, m$);

(p_j, q_j) – poznate koordinate potrošača j ($j = 1, 2, \ldots, n$);

b_j – poznata potražnja potrošača j ($j = 1, 2, \ldots, n$);

d_{ij} – udaljenost od skladišta i do potrošača j ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$);

u_{ij} – nepoznata količina proizvoda koju treba prevesti iz skladišta i potrošaču j ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$).

Tada se postavljeni problem može formulirati u obliku

$$\min f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} d_{ij} \tag{1.11}$$

uz ograničenja

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} \leq a_i, i = 1,2,\ldots,m, \tag{1.12}$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_{ij} = b_j, j = 1,2,\ldots,n, \tag{1.13}$$

$$u_{ij} \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n. \tag{1.14}$$

Pritom su varijable u_{ij} i d_{ij} pomnožene, tako da je funkcija cilja nelinearna. Za udaljenost se može uzeti pravolinijska (ili l_1 – norma)

$$d_{ij} = | x_i - p_j | + | y_i - q_j |, \tag{1.15}$$

odnosno euklidska (ili l_2 – norma)

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - p_j)^2 + (y_i - q_j)^2}. \tag{1.16}$$

Tada su varijable u problemu (1.11) – (1.14) $x_1, x_2, \ldots, x_m,\ y_1, y_2, \ldots, y_m,\ u_{11}, \ldots, u_{mn}$. Funkcija cilja (1.11) predstavlja ukupnu ponderiranu udaljenost, pri čemu se kao ponderi koriste nepoznate količine proizvoda u_{ij} koje treba prevesti od skladišta do potrošača. U slučaju poznatih udaljenosti d_{ij}, koje možemo shvatiti i kao troškove transporta po jedinici proizvoda, problem postaje linearan, poznat kao problem transporta.

1.3.2. Rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi

Za sustav nelinearnih jednadžbi

$$h_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = 1,2,\ldots,m, \tag{1.17}$$

može se formulirati ekvivalentan problem oblika

$$\min f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} [h_i(\mathbf{x})]^2. \tag{1.18}$$

Naime, očigledno je $f(\mathbf{x}) \geq 0$, te je $f(\mathbf{x}) = 0$ ako i samo ako je $\mathbf{x}$ rješenje sustava jednadžbi (1.17). Prema tome, rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi (1.17) svodi se na rješavanje problema nelinearnog programiranja (1.18) bez ograničenja. (Vidi npr. Zangwill [61], str. 6.)

1.3.3. Problem aproksimacije

Pretpostavimo da imamo podatke o vrijednosti funkcije g u točkama $x_1, x_2, \ldots, x_m$, tj. $g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_m)$. Cilj nam je aproksimirati funkciju g polinomom

$$h(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

stupnja n, gdje je $n < m$. Za svaki polinom $h(x)$ imamo odgovarajuće greške (ili odstupanja) aproksimacije

$$\varepsilon_i = g(x_i) - h(x_i), i = 1, 2, \ldots, m.$$

Najbolja aproksimacija je ona za koju je suma kvadrata odstupanja minimalna, tj. za koju se doseže

$$\min f(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{m} [g(x_i) - h(x_i)]^2,$$

odnosno

$$\min f(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{m} \left[g(x_i) - (a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \cdots + a_1 x_i + a_0)\right]^2.$$

Ovdje se, dakle, radi o problemu kvadratnog programiranja bez ograničenja. (Vidi npr. Luenberger [39], str. 171).

1.3.4. Alokacija resursa

Pretpostavimo da poduzeće ima određenu količinu svakog od m resursa, koje treba alocirati na n aktivnosti (ili procesa). (Vidi npr. Hillier, Lieberman [29], str. 33–34; Martić [43], str. 94–96) Svaka aktivnost karakterizirana je utroškom resursa pri jediničnoj razini aktivnosti. Npr., aktivnost može predstavljati količinu proizvodnje nekog proizvoda iz raspoloživih resursa ili transport proizvoda iz nekog ishodišta u odredište itd. Pretpostavimo još da imamo određenu vrijednost koja mjeri ukupne postignute rezultate (npr. ukupni profit), uz poznato povećanje te vrijednosti, koje je rezultat jediničnog povećanja svake od aktivnosti (npr. profit po jedinici proizvoda). Problem se sastoji u alociranju resursa na aktivnosti, uvažavajući činjenicu o raspoloživim količinama resursa uz ostvarivanje maksimalne vrijednosti ukupnih postignutih rezultata. Uz uobičajene pretpostavke u linearnom programiranju (proporcionalnost, aditivnost i djeljivost) i oznake

a_{ij} – utrošak resursa i po jedinici aktivnosti j ($i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$);

b_i – raspoloživa količina resursa i ($i = 1, 2, \ldots, m$);

c_j – povećanje vrijednosti ukupnih rezultata koje nastaje jediničnim povećanjem aktivnosti j ($j = 1, 2, \ldots, n$);

x_j – nepoznata razina aktivnosti j $(j = 1, 2, \ldots, n)$,

postavljeni problem može se formulirati kao problem linearnog programiranja oblika

$$\max f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0.$$

Ako je npr. x_j – nepoznata količina proizvoda j koju treba proizvesti, a c_j – profit po jedinici proizvoda j, tada je c_jx_j – profit ostvaren pri proizvodnji x_j jedinica proizvoda j (pretpostavka proporcionalnosti), dok funkcija cilja f, koju treba maksimizirati, predstavlja ukupni profit. Slično tome, $a_{ij}x_j$ je utrošak resursa i u proizvodnji x_j jedinica proizvoda j, a prema ograničenjima ukupan utrošak pojedinog resursa i (pretpostavka aditivnosti) ne može premašiti raspoloživu količinu b_i. Na kraju su ograničenja nenegativnosti na varijable x_j koje mogu poprimiti realne vrijednosti (pretpostavka djeljivosti).

1.4. Zadaci za vježbu

Grafički prikažite skup mogućih rješenja, razinske linije funkcije cilja i riješite sljedeće probleme matematičkog programiranja:

Zadatak 1.1.

$$\max f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

uz ograničenja

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Zadatak 1.2.

$$\min f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 + 25$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcl} x_1^2 - x_2 + 1 & \leq & 0 \\ -x_1 + x_2 - 2 & \leq & 0 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Zadatak 1.3.

$$\min f(x_1,x_2) = x_1 - x_2^2$$

uz ograničenja

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - 25 &\leq 0 \\ x_1 + x_2 - 2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Zadatak 1.4.

$$\min f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2$$

uz ograničenja

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + 1 &\leq 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4 &\leq 0 \\ x_1 + x_2 - 6 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Zadatak 1.5. Nađite maksimum funkcije cilja problema u zadatku 1.4.

Zadatak 1.6.

$$\min f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1$$

uz ograničenja

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3 &\leq 0 \\ x_1 - 2x_2 + 1 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Zadatak 1.7. Nađite maksimum funkcije cilja problema u zadatku 1.6.

Zadatak 1.8.

$$\min f(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_2$$

uz ograničenja

$$4x_1^2 + 9x_2^2 - 36 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Zadatak 1.9.

$$\min f(x_1,x_2) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 4)^2$$

uz ograničenja

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - 9 &\leq 0 \\ -x_1x_2 + 1 &\leq 0. \end{aligned}$$

Zadatak 1.10.

$$\min f(x_1,x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

uz ograničenja

$$x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 9 = 0.$$

Zadatak 1.11.

$$\min f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$$

uz ograničenja

$$x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 11 = 0.$$

Zadatak 1.12.

$$\min f(x_1,x_2) = 4x_2$$

uz ograničenja

$$x_1^2 + 9x_2^2 - 10x_1 - 72x_2 + 160 = 0.$$

Zadatak 1.13.

$$\min f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 8x_2 + 41$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & + & 8x_2 & - & 40 & \leq & 0 \\ 4x_1 & - & 6x_2 & - & 24 & \leq & 0 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & - & 6 & \leq & 0 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Zadatak 1.14.

$$\max f(x_1,x_2) = 4x_1 + 6x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 60 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & - & 80 & \leq & 0 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 320 & \leq & 0 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Zadatak 1.15.

$$\max f(x_1,x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & 100 & \leq & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 80 & \leq & 0 \\ & & x_2 & - & 30 & \leq & 0 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$