1.

Deformacija i gibanje

U ovoj glavi uvodimo deformaciju i gibanje kao funkcije na referentnoj konfiguraciji. Proizvoljna deformacija aproksimira se lokalno tzv. infinitezimalnom deformacijom, koju generiraju infinitezimalna kruta deformacija i tenzor deformacije (lokalna mjera otklona od krute deformacije). Pomoću brzine i ubrzanja kao funkcija na referentnoj konfiguraciji (Lagrangeova deskripcija) definiraju se brzina i ubrzanje kao funkcije na aktualnoj (trenutnoj) konfiguraciji (Eulerova deskripcija); ovdje se kao važan pojam pojavljuje materijalna derivacija Eulerovog polja. Brzina proizvoljnog gibanja aproksimira se lokalno brzinom koju generiraju kruto gibanje i tenzor brzine deformacije (lokalna mjera otklona od krutog gibanja). Kinematički uvjet, odn. uvjet optjecanja karakterizira lokalno materijalnu plohu, odn. krutu stijenku.

1.1. Deformacija

Materijalno tijelo $($kontinuum$)$ u geometrijskom smislu identificiramo s njegovom konfiguracijom u prostoru $\mathbb{E}$. Budući da je tijelo deformabilno, njegova konfiguracija nije jedinstvena. Jednu istaknutu konfiguraciju Ω proglašavamo referentnom, a svaku drugu smatramo njenom deformacijom; pretpostavljamo da je Ω područje. Skupove iz Ω nazivamo materijalnim, pa govorimo o materijalnim točkama, krivuljama, plohama itd.

Deformacija kontinuuma Ω je injektivna transformacija $\varphi : \Omega \to \mathbb{E}$, takva da je za $X \in \Omega$ tenzor $\nabla\varphi(X)$ regularan; pretpostavljat ćemo da je

$$\det \nabla\varphi(X) > 0. \tag{1}$$

Zahvaljujući pretpostavci o glatkoći, deformacija čuva topološka svojstva materijalnih skupova, npr. područje prevodi u područje, njegovu granicu odn. unutrašnjost u granicu odn. unutrašnjost njegove slike, krivulju odn. plohu u krivulju odn. plohu, itd. Deformacija φ je izohorička ako za svako područje $\mathcal{P} \subset \Omega$ vrijedi

$$\int\limits_{\varphi(\mathcal{P})} dV = \int\limits_{\mathcal{P}} dV. \tag{2}$$

Zamjenom varijabli na lijevoj strani dobivamo ekvivalentan uvjet

$$\int\limits_{\mathcal{P}} (\det \nabla\varphi - 1)\, dV = 0 \tag{3}$$

ili, prema 1. osnovnoj lemi (v. Dodatak 2.),

$$\det \nabla\varphi = 1 \quad \text{u} \quad \Omega. \tag{4}$$

Prema tome, deformacija φ je izohorička ako i samo ako vrijedi (4). Jednostavan primjer je identična deformacija $\varphi = \mathrm{id}$ ($\mathrm{id}(X) = X$); tada je $\nabla\varphi = \mathbf{I}$. Deformacija φ je homogena ako je

$$\nabla\varphi = \mathbf{F} = \text{const}. \tag{5}$$

Za $X, Y \in \Omega$ imamo

$$\varphi(X) - \varphi(Y) = \int_{C(Y,X)} \nabla\varphi(Z)\, \boldsymbol{dZ}, \tag{6}$$

gdje se integrira po proizvoljnoj krivulji $C(Y, X)$ u Ω koja spaja točku Y s točkom X. Iz (6) i (5) slijedi

$$\varphi(X) - \varphi(Y) = \mathbf{F} \int_{C(Y,X)} \boldsymbol{dZ} = \mathbf{F}(X - Y). \tag{7}$$

Za proizvoljnu deformaciju φ vrijedi

$$\varphi(X) - \varphi(Y) = \nabla\varphi(Y)(X - Y) + o(X - Y), \tag{8}$$

tj. u okolini proizvoljne točke $Y \in \Omega$ deformacija φ se dobro aproksimira homogenom deformacijom s gradijentom $\mathbf{F} = \nabla\varphi(Y)$. Deformacija φ je kruta ako za $X, Y \in \Omega$ vrijedi

$$|\varphi(X) - \varphi(Y)| = |X - Y|. \tag{9}$$

Teorem 1. *Deformacija φ je kruta ako i samo ako je*

$$\nabla\varphi = \mathbf{F} = \text{const.}, \quad \mathbf{F} \in \mathrm{Orth}^+ . \tag{10}$$

Dokaz. Iz (9), kvadriranjem i deriviranjem po Y, a zatim po X, dobivamo

$$\nabla\varphi(Y)^T \nabla\varphi(X) = \mathbf{I}, \tag{11}$$

pa za $Y = X$ imamo

$$\nabla\varphi(X)^T = \nabla\varphi(X)^{-1}. \tag{12}$$

Iz (11) i (12) slijedi (10). Obratno, iz (10) slijedi

$$\varphi(X) - \varphi(Y) = \mathbf{F}(X - Y), \tag{13}$$

$$|\varphi(X) - \varphi(Y)| = |\mathbf{F}(X - Y)| = |X - Y|. \tag{14}$$

□

1.2. Infinitezimalna deformacija

Ako je φ deformacija, polje

$$\boldsymbol{u}(X) = \varphi(X) - X, \quad X \in \Omega \tag{15}$$

zove se pomak kontinuuma; ako je $\boldsymbol{u} = \text{const.}$, φ je translacija. Iz (15) slijedi

$$\varphi(X) = X + \boldsymbol{u}(X), \tag{16}$$

$$\nabla\varphi(X) = \mathbf{I} + \nabla\boldsymbol{u}(X). \tag{17}$$

Ako je deformacija φ kruta, prema Teoremu 1 vrijedi

$$\nabla\varphi = \text{const.}, \tag{18}$$

$$\nabla\varphi^T\nabla\varphi = \mathbf{I}, \tag{19}$$

pa iz (17) dobivamo

$$\nabla\boldsymbol{u} = \text{const.}, \tag{20}$$

$$\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^T + \nabla\boldsymbol{u}^T\nabla\boldsymbol{u} = 0. \tag{21}$$

Obratno, ako vrijedi (20) i (21), deformacija (16) je kruta. Možemo reći da tenzor

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^T + \nabla\boldsymbol{u}^T\nabla\boldsymbol{u}\right) \tag{22}$$

mjeri odstupanje od krute deformacije; zove se konačni tenzor deformacije (eng. *finite strain tensor*). Deformacija (16) je infinitezimalna ako je $|\nabla\boldsymbol{u}|$ malo. Svojstva (20) i (21) sugeriraju ovu definiciju: polje $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{V}$ je infinitezimalni kruti pomak (a transformacija (16) infinitezimalna kruta deformacija) ako je

$$\nabla\boldsymbol{u} = \text{const.}, \tag{23}$$

$$\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^T = 0. \tag{24}$$

Lema 1. *Polje $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{V}$ je infinitezimalni kruti pomak ako i samo ako za $X, Y \in \Omega$ vrijedi*

$$(X - Y) \cdot (\boldsymbol{u}(X) - \boldsymbol{u}(Y)) = 0. \tag{25}$$

Dokaz. Iz (23) slijedi

$$\boldsymbol{u}(X) - \boldsymbol{u}(Y) = \nabla\boldsymbol{u}(X - Y). \tag{26}$$

Iz toga i (24) dobivamo

$$(X - Y) \cdot (\boldsymbol{u}(x) - \boldsymbol{u}(Y)) = (X - Y) \cdot \nabla\boldsymbol{u}(X - Y) = 0. \tag{27}$$

Obratno, iz (25), deriviranjem po X, a zatim po Y, dobivamo

$$\boldsymbol{u}(X) - \boldsymbol{u}(Y) + \nabla\boldsymbol{u}(X)^T(X - Y) = 0, \tag{28}$$

$$\nabla\boldsymbol{u}(Y) + \nabla\boldsymbol{u}(X)^T = 0. \tag{29}$$

Za $X = Y$ iz (29) dobivamo (24); iz (24) i (29) slijedi

$$\nabla\boldsymbol{u}(Y) = \nabla\boldsymbol{u}(X), \tag{30}$$

tj. svojstvo (23). □

Teorem 2. *Ako vrijedi (24), onda je polje* $\boldsymbol{u}$ *infinitezimalni kruti pomak.*

Dokaz. Iz (6) i (24) slijedi

$$(X - Y) \cdot (\boldsymbol{u}(X) - \boldsymbol{u}(Y)) = \int_{C(Y,X)} (X - Y) \cdot \nabla\boldsymbol{u}(Z)\, \boldsymbol{dZ} = 0. \tag{31}$$

□

Ako je $\boldsymbol{u}$ infinitezimalni kruti pomak, onda je

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = \text{const.} \tag{32}$$

i vrijedi

$$\boldsymbol{u}(X) - \boldsymbol{u}(Y) = \nabla\boldsymbol{u}(X - Y) = [\boldsymbol{\omega}, X - Y], \quad X, Y \in \Omega. \tag{33}$$

Neka je

$$l(\lambda) = Y + \lambda\boldsymbol{\omega}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{34}$$

Tada je

$$[\boldsymbol{\omega}, l(\lambda) - Y] = 0. \tag{35}$$

Iz (33) zaključujemo da je infinitezimalni kruti pomak $\boldsymbol{u}$ jednak sumi translacije $\boldsymbol{u}(Y)$ i pomaka $X \to [\boldsymbol{\omega}, X - Y]$, $X \in \Omega$, koji se poništava na osi (34) i predstavlja infinitezimalnu rotaciju.

Za proizvoljni pomak $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{V}$ vrijedi

$$\boldsymbol{u}(X) - \boldsymbol{u}(Y) = \nabla\boldsymbol{u}(Y)(X - Y) + \boldsymbol{o}(X - Y). \tag{36}$$

Operatori

$$\mathbf{E} = \operatorname{sym}\nabla\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^T), \tag{37}$$

$$\mathbf{W} = \operatorname{skw}\nabla\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u} - \nabla\boldsymbol{u}^T) \tag{38}$$

zovu se respektivno infinitezimalni tenzor deformacije (eng. *infinitesimal strain*) i infinitezimalni tenzor rotacije. Iz (36) dobivamo

$$\boldsymbol{u}(X) = \boldsymbol{u}(Y) + \mathbf{W}(Y)(X - Y) + \mathbf{E}(Y)(X - Y) + \boldsymbol{o}(X - Y) \tag{39}$$

ili, uvodeći funkciju $\boldsymbol{\omega}$ formulom

$$\boldsymbol{\omega}(Y) = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{u}(Y), \tag{40}$$

$$\boldsymbol{u}(X) = \boldsymbol{u}(Y) + [\boldsymbol{\omega}(Y), X - Y] + \mathbf{E}(Y)(X - Y) + \mathbf{o}(X - Y). \tag{41}$$

Prema tome u nekoj okolini točke $Y \in \Omega$ proizvoljni pomak $\boldsymbol{u}$ dobro se aproksimira sumom translacije $\boldsymbol{u}(Y)$, infinitezimalne rotacije $X \to [\boldsymbol{\omega}(Y), X - Y]$, $X \in \Omega$ oko osi $\lambda \to Y + \lambda \boldsymbol{\omega}(Y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ i pomaka

$$X \to \mathbf{E}(Y)(X - Y), \quad X \in \Omega, \tag{42}$$

generiranog tenzorom $\mathbf{E}(Y)$.

1.3. Gibanje. Lagrangeova i Eulerova deskripcija

Gibanje kontinuuma Ω je 1-parametarska familija deformacija

$$t \to \varphi(\cdot, t) = \varphi_t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{43}$$

Parametar t je vrijeme. Ako se promatra jedno fiksirano gibanje φ, onda za $X \in \Omega$, odn. $\mathcal{P} \subset \Omega$ pišemo $\varphi(X, t) = X_t$, odn. $\varphi(\mathcal{P}, t) = \mathcal{P}_t$. Trajektorija materijalne točke X, odn. skupa $\mathcal{P}$ je preslikavanje $t \to X_t$, odn. $t \to \mathcal{P}_t$. *Lagrangeova* brzina, odn. ubrzanje kontinuuma je

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{V} \tag{44}$$

odn.

$$\tilde{\boldsymbol{a}} = \frac{\partial \tilde{\mathrm{v}}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial t^2} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{V}. \tag{45}$$

Funkcije na $\Omega \times \mathbb{R}$ nazivamo *Lagrangeovim* poljima. Iz (44) slijedi

$$\varphi(X, t) = X_0 + \int_0^t \tilde{\boldsymbol{v}}(X, \xi)\, d\xi. \tag{46}$$

Trajektorija gibanja φ je skup

$$\mathcal{T}_\varphi = \mathcal{T} = \{(x, t) \in \mathbb{E} \times \mathbb{R} : x \in \Omega_t, t \in \mathbb{R}\}. \tag{47}$$

Primijetimo da je $\mathcal{T}$ otvoren skup u $\mathbb{E}\times\mathbb{R}$. Korisno je trajektoriju materijalnog skupa $\mathcal{P}$ uložiti u trajektoriju gibanja $\mathcal{T}_\varphi$ identifikacijom $\varphi_t(\mathcal{P}) = (\varphi_t(\mathcal{P}), t)$. Funkcije na $\mathcal{T}_\varphi$ su *Eulerova* polja. Za $t\in\mathbb{R}$ definirano je (za dano gibanje φ) referentno preslikavanje

$$\varphi_t^{-1} : \Omega_t \to \Omega, \tag{48}$$

koje ćemo često označavati s φ^{-1}. *Eulerova* brzina kontinuuma je polje

$$\boldsymbol{v}(x,t) = \tilde{\boldsymbol{v}}(\varphi_t^{-1}(x),t) = \frac{\partial\varphi_t}{\partial t}(\varphi_t^{-1}(x),t), \quad (x,t)\in\mathcal{T}. \tag{49}$$

Nekad ćemo formulu tipa (49) pisati u obliku

$$\boldsymbol{v} = \tilde{\boldsymbol{v}}\circ\varphi^{-1} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\circ\varphi^{-1}, \tag{50}$$

podrazumijevajući da se kompozicija (kao i inverzija) odnosi na funkciju prve varijable, tj. za fiksirano $t\in\mathbb{R}$. Iz (50) dobivamo

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(X) = \boldsymbol{v}(\varphi_t(X),t). \tag{51}$$

Ako je zadano polje $\boldsymbol{v}$ i neki početni položaj kontinuuma,

$$\varphi_0(X) = \varphi(X,0) = X_0, \tag{52}$$

prema Teoremu egzistencije i jedinstvenosti za obične diferencijalne jednadžbe (v. [F3]) *Cauchyjeva* zadaća (51), (52) ima jedinstveno rješenje $t\to\varphi_t(X)$. Ako se promatra jedno određeno gibanje, zgodno je za referentnu konfiguraciju odabrati početni položaj; tada je $\varphi_0 = \mathrm{id}$, pa uvjet (52) glasi

$$\varphi_0(X) = X. \tag{53}$$

Strujnica u trenutku $t\in\mathbb{R}$ je krivulja u Ω_t kojoj je pozitivna tangenta u proizvoljnoj točki x paralelna vektoru $\boldsymbol{v}(x,t)$. Ako je $\lambda\to x(\lambda)$, $\lambda\in]0,1[$ povoljna parametrizacija strujnice, njena diferencijalna jednadžba glasi

$$\frac{d}{d\lambda}x(\lambda) = \boldsymbol{v}(x(\lambda),t). \tag{54}$$

Eulerovo ubrzanje kontinuuma je polje

$$\boldsymbol{a}(x,t) = \tilde{\boldsymbol{a}}(\varphi_t^{-1}(x),t) \tag{55}$$

ili

$$\boldsymbol{a} = \tilde{\boldsymbol{a}}\circ\varphi^{-1}. \tag{56}$$

Općenito, ako je $\tilde{f}$ *Lagrangeovo* polje, njemu odgovara *Eulerovo* polje

$$f = \tilde{f}\circ\varphi^{-1} \tag{57}$$

i obratno, *Eulerovom* polju f odgovara *Lagrangeovo* polje

$$\tilde{f} = f \circ \varphi. \tag{58}$$

Kažemo da $\tilde{f}$ i f opisuju isto polje na kontinuumu, respektivno u *Lagrangeovoj* i *Eulerovoj* deskripciji.

Materijalna derivacija *Eulerovog* polja f je *Eulerovo* polje koje označavamo s $\dot{f}$ ili df/dt, definirano formulom

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \circ \varphi^{-1} = \frac{\partial}{\partial t}(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}. \tag{59}$$

Iz toga slijedi

$$\dot{f} = \left((\nabla f \circ \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \circ \varphi \right) \circ \varphi^{-1} = (\nabla f) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \circ \varphi^{-1} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}, \tag{60}$$

gdje je $\nabla f = \nabla_x f$. Uzimajući u obzir (50), dobivamo

$$\dot{f} = (\nabla f)\boldsymbol{v} + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{61}$$

Eulerovo polje $(x, t) \rightarrow x$, $(x, t) \in \mathcal{T}$ kraće označavamo s x. Prema (61) vrijedi

$$\dot{x} = (\nabla x)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}. \tag{62}$$

Za *Eulerovo* ubrzanje, prema (56) i (59), imamo

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \circ \varphi^{-1} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \circ \varphi^{-1} = \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{v} \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = \dot{\boldsymbol{v}} \tag{63}$$

ili prema (61),

$$\boldsymbol{a} = (\nabla \boldsymbol{v})\boldsymbol{v} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}. \tag{64}$$

Prvi, odn. drugi član na desnoj strani zove se konvektivno (transportno) ubrzanje, odn. lokalno ubrzanje.

Lako se dokazuje ova činjenica: *Eulerovo* polje f zadovoljava uvjet

$$\dot{f} = 0 \quad \text{u} \quad \mathcal{T} \tag{65}$$

ako i samo ako je f konstanta na trajektoriji svake materijalne točke.

1.4. Brzina deformacije

Gibanje φ kontinuuma Ω je kruto (u trenutku t) ako vrijedi

$$\frac{d}{dt}|\varphi_t(X) - \varphi_t(Y)|^2 = 0, \quad X, Y \in \Omega. \tag{66}$$

To je ekvivalentno uvjetu

$$(\varphi_t(X) - \varphi_t(Y)) \cdot (\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(X) - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(Y)) = 0 \tag{67}$$

ili (stavljamo $\varphi_t(X) = x$, $\varphi_t(Y) = y$)

$$(x - y) \cdot (\boldsymbol{v}(x, t) - \boldsymbol{v}(y, t)) = 0, \quad x, y \in \Omega_t. \tag{68}$$

Uspoređujući (68) s (25) vidimo da je brzina krutog gibanja (u trenutku t) “infinitezimalni kruti pomak” na Ω_t; zato vrijedi

$$\nabla \boldsymbol{v}(\cdot, t) = \text{const.} \quad \text{na} \quad \Omega_t, \tag{69}$$

$$\nabla \boldsymbol{v}(\cdot, t) + \nabla \boldsymbol{v}(\cdot, t)^T = 0 \text{ na } \Omega_t. \tag{70}$$

Iz Teorema 2 slijedi

Teorem 3. *Ako vrijedi (70), gibanje je kruto (u trenutku t).*

Ako je $\boldsymbol{v}$ brzina krutog gibanja, onda je

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}(t) = \text{const.} \quad \text{na} \quad \Omega_t \tag{71}$$

i vrijedi

$$\boldsymbol{v}(x, t) - \boldsymbol{v}(y, t) = [\boldsymbol{\omega}(t), x - y], \quad x, y \in \Omega_t. \tag{72}$$

Neka je

$$l(\lambda) = y + \lambda\boldsymbol{\omega}(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{73}$$

Iz (72) zaključujemo da je brzina krutog gibanja $\boldsymbol{v}(\cdot, t)$ jednaka sumi brzine uniformnog gibanja $\boldsymbol{v}(y, t)$ i brzine $x \to [\boldsymbol{\omega}(t), x - y]$, $x \in \Omega_t$, koja se poništava na osi (73) i predstavlja brzinu rotacije. Za proizvoljno gibanje u trenutku t vrijedi

$$\boldsymbol{v}(x, t) - \boldsymbol{v}(y, t) = \nabla\boldsymbol{v}(y, t)(x - y) + \boldsymbol{o}(x - y). \tag{74}$$

Operatori

$$\mathbf{D} = \operatorname{sym}\nabla\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{v} + \nabla\boldsymbol{v}^T), \tag{75}$$

$$\mathbf{W} = \operatorname{skw}\nabla\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{v} - \nabla\boldsymbol{v}^T) \tag{76}$$

zovu se respektivno tenzor brzine deformacije (eng. *stretching*) i tenzor brzine rotacije. Iz (74) dobivamo

$$\boldsymbol{v}(x, t) = \boldsymbol{v}(y, t) + \mathbf{W}(y, t)(x - y) + \mathbf{D}(y, t)(x - y) + \mathbf{o}(x - y) \tag{77}$$

ili, uvodeći funkciju $\boldsymbol{\omega}$ formulom

$$\boldsymbol{\omega}(y, t) = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}(y, t), \tag{78}$$

$$\boldsymbol{v}(x,t) = \boldsymbol{v}(y,t) + [\boldsymbol{\omega}(y,t), x-y] + \mathbf{D}(y,t)(x-y) + \mathbf{o}(x-y). \tag{79}$$

Prema tome, u nekoj okolini točke $y \in \Omega_t$ brzina proizvoljnog gibanja $\boldsymbol{v}(\cdot,t)$ dobro se aproksimira sumom brzine uniformnog gibanja $\boldsymbol{v}(y,t)$, brzine rotacije $x \to [\boldsymbol{\omega}(y,t), x-y]$, $x \in \Omega_t$ oko osi $\lambda \to y + \lambda\boldsymbol{\omega}(y,t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ i brzine

$$x \to \mathbf{D}(y,t)(x-y), \quad x \in \Omega_t, \tag{80}$$

generirane tenzorom $\mathbf{D}(y,t)$.

Iz jednakosti

$$[\frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}] = \mathbf{W}\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{v} - \nabla\boldsymbol{v}^T)\boldsymbol{v} \tag{81}$$

dalje dobivamo korisnu formulu za konvektivno ubrzanje:

$$(\nabla\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} = (\nabla\boldsymbol{v})^T\boldsymbol{v} + [\operatorname{rot}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}] \tag{82}$$

ili

$$(\nabla\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} = \nabla\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right) + [\operatorname{rot}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}]. \tag{83}$$

1.5. Trajektorija materijalne plohe

Neka je φ gibanje kontinuuma Ω, ψ *Eulerovo* polje i $\nabla\psi \neq 0$ u $\mathcal{T}_\varphi$; tada je skup

$$\Gamma_t = \{x \in \Omega_t : \psi(x,t) = 0\} \tag{84}$$

ploha (bez ruba) u Ω_t. Ako je

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi \circ \varphi) = 0 \quad \text{na plohi} \quad \psi \circ \varphi = 0, \tag{85}$$

onda je skup

$$\{(x,t) : x \in \Gamma_t, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{T} \tag{86}$$

trajektorija materijalne plohe $\Gamma : \psi \circ \varphi = 0$. Obratno, ako je (86) trajektorija neke materijalne plohe, onda vrijedi uvjet (85); on je ekvivalentan uvjetu

$$\dot{\psi} = 0 \quad \text{na plohi} \quad \psi = 0 \tag{87}$$

ili prema (61),

$$\nabla\psi \cdot \boldsymbol{v} + \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0 \quad \text{na plohi} \quad \psi = 0. \tag{88}$$

Polje $\boldsymbol{n} = \nabla\psi/|\nabla\psi|$ je jedinična normala na plohi Γ_t, pa uvjet (88) možemo pisati u obliku

$$|\nabla\psi|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} + \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0 \quad \text{na plohi} \quad \psi = 0. \tag{89}$$

To je kinematički uvjet na trajektoriji materijalne plohe (nužan i dovoljan uvjet da skup $\psi = 0$ bude trajektorija neke materijalne plohe). Ako ploha $\Gamma : \psi \circ \varphi = 0$ leži na granici kontinuuma Ω i ako gibanje zadovoljava uvjet

$$\Gamma_t = \Gamma_0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{90}$$

onda je $\partial\psi/\partial t = 0$, pa iz (89) slijedi

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma_0 \times \mathbb{R}. \tag{91}$$

Specijalno, taj uvjet je zadovoljen na krutoj stijenci koja miruje; (91) je tada uvjet optjecanja.

Ako gibanje φ zadovoljava uvjet

$$\Omega_t = \Omega_0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{92}$$

kažemo da je Ω_0 područje gibanja; tada na $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$ vrijedi (91). Gibanje je stacionarno ako zadovoljava uvjet (92) i ako je

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0 \quad \text{u} \quad \Omega_0 \times \mathbb{R}. \tag{93}$$

Za stacionarno gibanje jednadžbe (51) i (54) se podudaraju, pa je svaka strujnica istovremeno trajektorija neke materijalne točke i obratno, trajektorija svake materijalne točke je strujnica.