1. Uvod

1.1. Što su operacijska istraživanja?

Odgovor na postavljeno pitanje nije jednostavan i kratak. Naime, ne postoji jedinstvena definicija **operacijskih istraživanja** (OI) (*operational research, operations research*), ali je moguće taj pojam opisati na određeni način. Hrvatsko društvo za operacijska istraživanja (HDOI) izdalo je 1994. godine brošuru [56], u kojoj se kaže “da se operacijska istraživanja bave matematičkim modeliranjem realnih procesa u svrhu donošenja optimalnih odluka”. Može se reći i da su OI disciplina koja primjenjuje matematičke modele i metode optimizacije, kako bi se znanstvenim pristupom rješavanju problema pomoglo pri donošenju boljih odluka u upravljanju složenim sustavima. Korištenjem matematičkog modeliranja i optimizacijom takvih sustava, OI na temelju raspoloživih podataka omogućuju menadžerima donošenje efikasnijih odluka i izgradnju produktivnijih sustava. Pritom se razmatraju sve raspoložive opcije, pažljivo se predviđaju rezultati i procjenjuje rizik, uz upotrebu najpogodnijih metoda optimizacije i tehnika za odlučivanje. Naime, organizacije i svijet u kojem one danas djeluju postaju sve složeniji. Velik broj mogućnosti izbora u rješavanju određenog problema, s neumoljivim vremenskim pritiskom, čini odluke s kojima se menadžeri susreću još težima i odgovornijima. Osim toga, nove primjene u poduzeću i programska podrška generiraju ogromne količine podataka. Ti podaci, uz odgovarajuću računalnu podršku, omogućuju donositeljima odluke korištenje prednostima, koje OI i optimizacija imaju pri rješavanju problema u složenim sustavima, s velikim brojem varijabli i ograničenja te sa znatnim rizicima. OI u praksi zahtijevaju timski rad te blisku suradnju između donositelja odluke, specijalista iz operacijskih istraživanja i optimizacije, kao i ljudi na koje će donesena odluka djelovati.[1]

Treba istaknuti da se OI koriste modelskim pristupom rješavanju realnih problema. (O modelskom pristupu OI vidi u 2. poglavlju, gdje su prikazani matematički modeli nekih realnih problema.) Pritom se rješavanje provodi u nekoliko sljedećih faza:[2]

[1] Vidi brošuru o specijalističkom poslijediplomskom studiju *Operacijska istraživanja i optimizacija* na Ekonomskom fakultetu Zagreb, koja se može naći na `www.efzg.hr`.

[2] Vidi npr. Gal [41], str. 7–11, Hillier, Lieberman [53], str. 7–21, Winston [110], str. 5–6.

1. **Prikupljanje podataka za formulaciju realnog problema koji treba riješiti.** To može načiniti tim stručnjaka različitih specijalnosti, od onih koji dobro poznaju problem do operacijskog istraživača, formiran po donositelju odluke. Pritom treba upozoriti na cilj (ili ciljeve, ako ih ima više), koji se želi ostvariti, kao i na pretpostavke na kojima se problem osniva. Također treba razmotriti i prikupiti podatke o parametrima koji će se poslije koristiti pri rješavanju modela.

2. **Formulacija odgovarajućeg matematičkog modela**. Taj je model matematička aproksimacija stvarnog problema. Model sadržava varijable koje imaju realno značenje, funkciju cilja (ili više njih) i ograničenja na varijable. To je tipično problem matematičkog programiranja, jednokriterijski u slučaju jedne funkcije cilja (odnosno višekriterijski u slučaju više funkcija cilja). U posebnom slučaju, ako su ispunjene pretpostavke linearnosti, pa je funkcija cilja linearna, a ograničenja su linearne jednadžbe i/ili nejednad'žbe, uz ograničenja nenegativnosti varijabli, riječ je o problemu linearnog programiranja.[3]

3. **Rješavanje modela, odnosno problema matematičkog programiranja.** U tu svrhu potrebno je pronaći odgovarajuću metodu za rješavanje na računalu, pri čemu se primjenjuje raspoloživa programska podrška. Npr., za rješavanje problema linearnog programiranja može se koristiti simpleks metodom, koristeći se programskim paketom LINGO. (Demo verzija programskog paketa LINGO može se preuzeti na `www.lindo.com`.) Ako ne postoji metoda, potrebno ju je razviti, a ako ne postoji programska podrška, treba je izraditi.

4. **Implementacija dobivenog rješenja.** Dobiveno rješenje treba pomoći donositelju odluke u njegovim daljnjim postupcima. Nije realno očekivati da će sve što matematičko rješenje sadržava biti prihvaćeno i realizirano, ali može znatno pomoći donositelju odluke. Pritom treba upotrebljavati rezultate analize osjetljivosti i stabilnosti modela na promjene parametara modela.[4] U slučaju da donositelj odluke nije zadovoljan dobivenim rezultatima, treba poboljšati matematički model i ponoviti neke ili sve faze dok se ne postigne prihvatljivo rješenje.

1.2. Kratka povijest i razvoj OI

Kao početak OI uzima se druga polovica tridesetih godina 20. stoljeća. Tada se u britanskim vojnim primjenama prvi put pojavio termin *operational research*. Godine 1939. objavljena je na ruskom jeziku knjiga Kantorovič [61]. Leonid Vitaljevič Kantorovič bio je sovjetski matematičar i ekonomist, poznat po uvođenju teorije i primjena linearnog programiranja. L. V. Kantorovič i T. C. Koopmans dobili su 1975. godine Nobelovu nagradu iz područja ekonomije, "za svoje doprinose teoriji optimalne alokacije resursa". Kako u

[3] O klasifikaciji problema matematičkog programiranja vidi npr. Neralić [91], str. 3, Dantzig [28], str. 15.

[4] O analizi osjetljivosti u linearnom programiranju vidi npr. Neralić [91], str. 135–143. Stabilnosti matematičkih modela, koja se osniva na parametarskom programiranju, posvećena je knjiga Zlobec [115].

svojoj autobiografiji Kantorovič kaže, kao sveučilišni profesor, radio je 1938. godine u Lenjingradu kao konzultant u laboratoriju poduzeća za proizvodnju šperploča na jednom posebnom problemu ekstrema. Ekonomski gledano to je bio problem raspodjele nekih početnih sirovina kako bi se maksimizirala produktivnost opreme pri određenim ograničenjima. Matematički je to bio problem maksimizacije linearne funkcije na konveksnom politopu. Pokazalo se da je taj problem bio tipičan i Kantorovič je našao razne ekonomske probleme koji se opisuju u biti istim matematičkim modelom: raspodjela poslova na postrojenja, najbolja upotreba površina za sijanje, racionalno rezanje materijala, upotreba složenih resursa, distribucija tokova transporta. To je bio dovoljan razlog da se nađe efikasna metoda za rješavanje tih problema. Metoda je otkrivena pod utjecajem ideja iz funkcionalne analize i nazvana "metodom rješavajućih množitelja".[5] U Lenjingradu je 1939. godine objavljena Kantorovičeva knjiga *Matematičke metode planiranja i organizacije proizvodnje*, posvećena formulaciji osnovnih ekonomskih problema, njihovu matematičkom obliku, kratkom prikazu metode rješavanja i prvi put razmatranja njezina ekonomskog smisla. U biti, knjiga sadržava glavne ideje teorije i algoritama linearnog programiranja. Ti rezultati mnogo godina nisu bili poznati istraživačima na zapadu, koji su na drugi način došli do njih, a njihovi rezultati nisu bili dostupni Kantoroviču do sredine pedesetih godina dvadesetog stoljeća. Kantorovičeva knjiga [62], koja je objavljena 1959. godine na ruskom jeziku, prevedena je na mnoge jezike, uključujući engleski. Na hrvatski jezik tu knjigu preveo je Neralić, a izdao ju je Centar za kulturnu djelatnost, Zagreb, 1985. godine.[6]

Karush je 1939. godine uveo uvjete optimalnosti za probleme nelinearnog programiranja u svojoj magistarskoj tezi, a za te rezultate se tek poslije saznalo (vidi npr. Kuhn [68]). OI nastavila su se razvijati u 2. svjetskom ratu, kad se radilo "o raspodjeli ograničenih količina vojnog materijala i ljudi za određene vojne operacije na što efikasniji način" (vidi gore spomenutu brošuru HDOI [56], Dantzig [28], str. 19–36, Čaklović [26], poglavlje XI, str. 265–278). Navedimo prema brošuri HDOI [56] sljedeće: "Velik broj stručnjaka iz raznih disciplina razvijao je i primjenjivao znanstvene metode na istraživanje vojnih operacija. Smatra se da je uloženi napor smanjio broj žrtava na strani saveznika i da je znatno doprinio njihovoj pobjedi. Nakon rata ubrzo je postalo jasno da se metodologija OI može uspješno primijeniti i u mnogim drugim situacijama, od problema pronalaženja 'optimalne' organizacije poslovanja i javnih administracija, te ekonomskih problema, do problema u inženjerskim znanostima. U čitavom nizu ekonomskih problema koji se rješavaju pomoću OI najpoznatiji su: određivanje optimalnog proizvodnog programa (plana), optimalno vođenje zaliha, optimalan izbor investicijskog projekta, problem optimalnog transporta, optimalne alokacije resursa, optimalne raspodjele kadrova na radne zadatke, problem trgovačkog putnika, problem optimalnog otpada pri krojenju i mnogi drugi. Početkom pedesetih godina dvadesetog stoljeća metode OI počele su se primjenjivati i u industriji. Jedan od prvih uspješno riješenih problema bio je problem određivanja optimalne (najjeftinije) smjese u proizvodnji benzina za avione.[7]" Spomenimo i jednu od

[5] Rješavajući množitelji su dualne cijene ili cijene u sjeni, za koje se u literaturi na ruskom jeziku rabi termin "objektivno obuslovljenie ocjenki (o.o.o)" (objektivno uvjetovane procjene). Vidi npr. Kantorovič [63].

[6] Za Neralića je bila posebna čast što su na njegovu izlaganju rada *Solving the Production-Transportation Problem by Benders Decomposition* (koautori D. Hunjet, S. Skok i L. Szirovicza), na 11th International Symposium on Mathematical Programming, u kolovozu 1982., Bonn, Njemačka, bili Dantzig i Kantorovič. Pritom je Dantzig komentirao izloženi model i sugerirao da se u jednom ograničenju umjesto jednakosti stavi nejednakost. Izlaganju je prisustvovao još jedan koautor rada, pokojni prof. S. Skok. Rad koji je nakon toga dovršen objavljen je na ruskom jeziku (vidi Neralić et al. [92]).

[7] Vidi Charnes et al. [15]

prvh knjiga iz linearnog programiranja, koju su 1952. godine objavili Charnes, Cooper i Henderson [14]. Nešto poslije, 1961. godine objavljena je knjiga Charnes, Cooper [12], dok je monumentalna knjiga Dantzig [28] objavljena 1963. godine. U brošuri HDOI [56] se kaže: "Razne metodologije OI postale su posebne znanstvene discipline, kao npr. linearno programiranje, cjelobrojno programiranje, višekriterijsko programiranje, stohastičko programiranje, analiza omeđivanja podataka itd. Danas metode OI zadiru i djelomično se preklapaju s mnogim 'klasičnim područjima', kao što su optimalno upravljanje, teorija aproksimacija, teorija vjerojatnosti, klasična mehanika i račun varijacija. Pored matematike OI, koja se bavi proučavanjem i razumijevanjem matematičkih modela, u punom su razvoju i numeričke metode optimizacije. Svoju važnost OI zahvaljuju i fenomenalnom razvoju računarske tehnologije i informatike, što je omogućilo modeliranje i rješavanje realnih problema s velikim brojem podataka. Činjenica je da se danas ekonomski i industrijski razvoj neke zemlje često uspoređuje sa stupnjem razvijenosti OI i računarske tehnologije." Istaknimo da je "programiranje" u kontekstu OI sinonim za "planiranje", pa je npr. "linearno programiranje" ustvari "linearno planiranje".

Navedimo nekoliko riječi o kampanji za primjenu linearnog programiranja u Kini prema članku Salaff [101], str. 167–172. Nakon jako dobre žetve u Kini 1958. godine, sljedeće tri godine žetva je podbacila. Zato je kao ekonomski prioritet postavljeno poticanje poljoprivredne proizvodnje i matematičari su pozvani da sudjeluju u tome. Poznati kineski matematičar Hua Lo-Keng bio je određen da sudjeluje u planiranju žetve žitarica u predgrađima Beijinga i napisao je 1960. godine članak, objavljen u Kuangming Daily, o novoj grani znanosti primijenjenoj u izgradnji nacionalne ekonomije. U članku se pored ostalog navodi: "Prije svega moram razjasniti da sam neiskusan u linearnom programiranju, ali ... budući da svi stručnjaci daju veliku pomoć poljoprivredi i stalno se razmatra kako matematičari mogu pomoći poljoprivredi, u ovom članku ću uglavnom uvesti primjenu linearnog programiranja u poljoprivredi. Siguran sam da to nije potpuno ispravno u mnogim pogledima, i od drugova se traži da načine ispravke." Prema Hua Lo-Kengu više od četiristo tisuća osoba sudjelovalo je u populariziranju linearnog programiranja u pokrajini Shantung. Pritom su bili uključeni nastavnici visokih, srednjih i osnovnih škola, radnici, seljaci i upravljačko osoblje. "Kroz različita sredstva masovnih komunikacija više od osam milijuna ljudi u provinciji bilo je upoznato s idejom linearnog programiranja." Postignuti su određeni rezultati i Akademija znanosti sazvala je skupštinu u Tsinanu, glavnom gradu provincije, kako bi iskustvo u Shantungu predočili "svim matematičarima u Kini".

Pored Kantorovića i Dantziga, koji se smatra autorom simpleks metode,[8] treba istaknuti profesora Abrahama Charnesa, kao jednog od velikana ne samo linearnog programiranja nego i drugih disciplina OI. Pored objavljenih knjiga s Cooperom i Hendersonom [14] (koja je prevedena na kineski, ruski i japanski) i Cooperom [12], Charnes je prvi riješio problem degeneracije u simpleks metodi u radu [11] iz 1952. godine. Jedan je od utemeljitelja analize omeđivanja podataka (Data Envelopment Analysis – DEA) s Cooperom i Rhodesom u radu [16]. Charnes i Cooper dobili su 1982. godine John von Neumann Theory Prize, nagradu koja se dodjeljuje osobama koje su stvorile fundamentalne i trajne doprinose teoriji u operacijskim istraživanjima i **znanstvenom upravljanju** (*management*

[8]Martić u svojoj knjizi [83], str. 103, o tome kaže: "Sam Dantzig pripisuje ovu metodu izvanredno plodnoj imaginaciji J. von Neumanna. Prema Dantzigovim riječima Von Neumann je u jednom razgovoru s njim predložio da se razradi jedna takva metoda. Međutim, neosporna je zasluga Dantziga što je iskoristio sugestiju i razvio metodu koja je priznata kao jako uporište linearnog programiranja."

science). Charnes je bio 1975. godine finalist za Nobelovu nagradu iz ekonomije.[9]

Prikažimo ukratko samo nekoliko primjera uspješne primjene OI u SAD-u. (Više detalja o tome se može naći na internetskim stranicama `www.scienceofbetter.org` i `www.orchampions.org` Američkog društva za operacijska istraživanja i znanstveno upravljanje INFORMS – The Institute For Operations Research and Management Sciences.) INFORMS dodjeljuje različite nagrade od kojih ističemo nagradu Franz Edelman, za dostignuća u operacijskim istraživanjima i znanstvenom upravljanju (vidi `www.informs.org`). Na internetskoj stranici Društva za operacijska istraživanja Velike Britanije (Operational Research Society) `www.theorsociety.com` također se mogu naći razne korisne informacije o OI. Vidi također časopis *Interfaces* koji izdaje INFORMS, gdje se u broju za siječanj i veljaču svake godine objavljuju članci o uspješnim primjenama OI u raznim područjima. (U broju za siječanj/veljaču 2012. objavljeni su radovi pobjednika i finalista za nagradu Franz Edelman za 2011. godinu.) Neke od tih primjena navedene su u Hillier, Lieberman [53], str. 4. Zrakoplovna kompanija "Continental Airlines", uz pomoć tvrtke za OI "CALEB Technologies", razvila je sustav za podršku odlučivanju, koji je pomogao u ostvarenju uštede od 40 milijuna US $ u 2001. godini. Veliki lanac trgovačkih kuća "Sears" primijenio je OI u kreiranju sustava za određivanje ruta i rasporeda vozila radi efikasnije dostave, uz godišnje uštede od 42 milijuna US $. Automobilska kompanija "Ford" je uz pomoć OI optimizirala način dizajniranja i testiranja prototipskih vozila s uštedom od 250 milijuna US $. Velika kompanija za dostavu paketa 'UPS' primijenila je OI u redizajniranju mreže za dostavu preko noći, s uštedama od 87 milijuna USA $ od 2000. do 2002. godine, uz predviđanje dodatne uštede od 189 milijuna US $ u sljedećoj dekadi. Poznata televizijska kompanija "NBC" primijenila je OI za poboljšanje planova prodaje reklama i povećala prihod za više od 200 milijuna US $. Tu se nalazi i deset razloga za karijeru u OI, od kojih spominjemo mogućnosti rješavanja realnih problema u različitim područjima ljudske djelatnosti, upotrebu vlastitih analitičkih vještina i kreativnosti, uspješnost u donošenju osobnih i profesionalnih odluka te priliku za stalno učenje i usavršavanje kroz posao.[10]

Razvoju operacijskih istraživanja doprinijela su nacionalna društva za OI i njihova udruženja. Tako je Američko društvo za operacijska istraživanja (Operations Research Society of America (ORSA)) osnovano 1952. godine, a iste godine pokrenut je i časopis "Operations Research". U 1953. godini u SAD osnovan je Institut za znanstveno upravljanje (The Institute of Management Sciences (TIMS)). ORSA i TIMS su se 1995. ujedinili i formirali INFORMS (The Institute For Operations Research and Management Sciences).

[9] Martić je jedan od osnivača "moderne primijenjene matematike" u bivšoj Jugoslaviji. On je boravio jedan semestar školske godine 1961./62. kod Charnesa na sveučilištu Northwestern u Evanstonu kraj Chicaga, kao stipendist Fordove fondacije. Charnes je bio mentor A. Ben-Israelu, koji je poslije bio Zlobecov mentor. Zlobec je po preporuci Martića došao 1968./69. na sveučilište Northwestern, gdje mu je mentor na doktorskom studiju trebao biti Charnes. Međutim, Charnes je te godine prešao na The University of Texas at Austin, gdje je s Cooperom pokrenuo Center for Cybernetic Studies i Institut for Constructive Capitalism, pa je mentor Zlobecu bio Ben-Israel. Neralić je na preporuku Martića i Zlobeca boravio s Charnesom cijelu školsku godinu 1985./86., na postdoktorskom istraživačkom radu, kao Fulbrightov stipendist. Rezultati dobiveni za vrijeme tog boravka objavljeni su u nekoliko zajedničkih radova (vidi Charnes, Neralić [18]–[22]). Zbog svega navedenoga potrebno je istaknuti zasluge Charnesa i za razvoj OI u Hrvatskoj.

[10] Edelmanovu nagradu za 2011. godinu dobio je zajednički projekt Midwest Independent Transmission System Operator (Midwest ISO), Alstom Grid i drugi, za znatan utjecaj i primjene naprednih metoda i alata OI. Midwest ISO je izvjestio o ukupnim uštedama od 2,1 do 3 milijarde US $ između 2007. i 2010. godine. Tipični model mješovito cjelobrojnog programiranja imao je 3,9 milijuna ograničenja, 3,3 milijuna neprekidnih i 450 000 binarnih varijabli (vidi Zak [113]).

U Velikoj Britaniji društvo Operational Research Society (ORS) osnovano je 1953. godine, a poslije su osnovana društva za OI i u drugim zemljama.

Istaknimo da postoji Hrvatsko društvo za operacijska istraživanja (HDOI), koje je osnovano 21. ožujka 1992. godine na Ekonomskom fakultetu Zagreb. Razvoju matematičkog programiranja u Hrvatskoj posvećena je knjižica Martić, Neralić [84], izdana povodom 30. godišnjice Seminara za programiranje i teoriju igara na Sveučilištu u Zagrebu 1966.–1996., gdje se povezuje rad Seminara i HDOI. (Detaljnije o aktivnostima HDOI vidi na `www.hdoi.hr`.) Društvo je član Međunarodne federacije društava za operacijska istraživanja IFORS (International Federation of Operational Research Societies) od 1994. godine. IFORS je osnovan 1959. godine (osnivači su bila društva Francuske, Velike Britanije i SAD) i sada ima 51 nacionalno društvo. Društva su također članovi regionalnih udruženja EURO (društva europskih zemalja), ALIO (društva zemalja Latinske i Južne Amerike), APORS (društva azijsko-pacifičkih zemalja) i NORAM (društva Sjeverne Amerike, zapravo SAD-a i Kanade). IFORS organizira međunarodne konferencije iz OI svake treće godine. Na konfrenciji održanoj 2008. godine u Sandtonu (Južna Afrika) obilježena je 50. obljetnica osnutka IFORS-a. Tom prilikom podijeljene su plakete svim društvima članicama, uključujući i HDOI, a plaketu je primio Neralić. U biltenu IFORS-a za ožujak 2012. objavljen je članak Boljunčića i Neralića o HDOI u povodu 20. godišnjice osnutka. (Detaljnije o aktivnostima IFORS-a može se naći na `www.ifors.org`.) HDOI je također član EURO-a (The Association of European Operational Research Societies), koji je osnovan 1975. godine i sada ima 29 nacionalnih društava. EURO izdaje časopis European Journal of the Operational Research (EJOR), a novi časopisi su EURO Journal on Computational Optimization, EURO Journal on Decision Processes i EURO Journal on Transportation and Logistics. U okviru tog udruženja postoji 28 radnih grupa (Working Groups) za različita područja istraživanja. (Detaljnije o tim i drugim aktivnostima može se naći na `www.euro-online.org`.) Svake druge godine HDOI organizira međunarodnu konferenciju iz OI. Godine 2010. održana je 13. Međunarodna konferencija iz OI, KOI 2010, na Ekonomskom fakultetu u Splitu. Radovi s te konferencije izdani su kao dva volumena novog časopisa Croatian Operational Research Review, jedan za 2010., a drugi za 2011. godinu. Na konferenciji je Neralić organizirao nekoliko sekcija posvećenih Sanji Zlobecu, istaknutom članu HDOI, povodom njegova jubilarnog rođendana. Istaknimo da je nekoliko vodećih stručnjaka iz OI u svijetu održalo predavanja tom prilikom, od kojih navodimo A. Ben-Israela, G. P. H. Styana, C. A. Floudasa, H. Wolkovicza i M. Asghariana.[11] Krajem rujna 2012. godine održana je 14. Međunarodna konferencija iz OI, KOI 2012 u Trogiru. Na KOI 2012 bilo je 76 sudionika, koji su izložili 61 rad. HDOI također sudjeluje u izdavanju časopisa Central European Journal of Operational Research (CEJOR), zajedno s društvima za OI Austrije, Češke, Mađarske, Slovačke i Slovenije.[12]

[11] Vidi Babić et al. [3], str. 3–58, gdje je objavljeno sedam od petnaest radova prezentiranih u Zlobecovu čast.

[12] Posebno zahvaljujemo Sanji Zlobecu, profesoru emeritusu na sveučilištu McGill, Montreal, Kanada, koji je bio jedan od utemeljitelja i osnivača HDOI i dao znatan doprinos u izradi brošure HDOI [56]. Zlobec je sudjelovao kao pozvani predavač na nekoliko konferencija KOI i na Seminaru za matematičko programiranje Matematičkog odsjeka PMF-a Zagreb. Na tome, i svemu što je učinio za HDOI i razvoj OI u Hrvatskoj, autori mu iskreno zahvaljuju. Autori mu također zahvaljuju što ih je uputio na članak Salaff [101] i kampanju opisanu u njemu.

2.

Modelski pristup operacijskih istraživanja

2.1. Uvod

U ovom poglavlju razmatraju se neki problemi, pri čemu se primjenjuje modelski pristup operacijskih istraživanja. Naime, svaki promatrani problem mora biti dobro definiran, kako bi se uz određene pretpostavke mogao načiniti njegov matematički model, kao određena aproksimacija stvarnog problema. Pritom treba imati na raspolaganju podatke o parametrima koji ulaze u model. Zatim, za rješavanje modela, koji je određeni problem matematičkog programiranja, potrebno je raspolagati metodom (procedurom), kojom ga se može riješiti uz pomoć odgovarajuće programske podrške na računalu. Dobiveno rješenje može biti od pomoći donositelju odluke o mogućoj primjeni i realizaciji rješenja u praksi. Ako donositelj odluke nije zadovoljan rješenjem, treba se sve ponovno razmotriti. Pritom je važna analiza osjetljivosti modela na promjene parametara u modelu. Kako su problemi najčešće jako složeni, u njihovu rješavanju potreban je timski rad stručnjaka različitih specijalnosti, među kojima bi svakako trebao biti operacijski istraživač (analitičar).

2.2. Model programa proizvodnje u rafineriji nafte

2.2.1. Uvod

Rafinerija nafte je kompleksno poduzeće, s velikim brojem tehnoloških postrojenja i procesa. Svaki tehnološki proces uključuje u sebi nekoliko operacija, koje se mogu odvijati pri raznim vrijednostima određenih parametara. To znači da postoji čitav skup režima (varijanata) po kojima mogu raditi postrojenja. Osim toga, postoji povezanost tehnoloških procesa, a tokovi sirovine i međuproizvoda od jednog do drugog postrojenja gipki su i mogu varirati po kvantiteti i po kvaliteti.

Program proizvodnje treba uskladiti sve tehnološke operacije uz određene režime rada postrojenja i tokove poluproizvoda i omogućiti dobivanje finalnih proizvoda zadane kvalitete i količine. Pritom, osim tehnoloških, ima i čitav niz drugih faktora, posebno ekonomskih, čiji je utjecaj također bitan. Pri sastavljanju programa proizvodnje mogu se kao jedno od sredstava rabiti matematički modeli. Međutim, realno nije moguće dobiti program proizvodnje na osnovi jednog matematičkog modela, u kojem bi bili detaljno uključeni svi ti faktori. Umjesto toga može se razmatrati nekoliko međusobno povezanih modela. Tako se npr. može promatrati model svake tehnološke operacije i svakog postrojenja. Iz takvih modela mogu se dobiti odgovarajući agregirani podaci, koji se mogu upotrebljavati za model na razini cijele rafinerije.

Istaknimo da je jedan od prvih problema riješenih pomoću matematičkog modela i metoda matematičkog programiranja bio problem smjese avionskih benzina Charnes et. al. [15]. Poslije su razrađeni modeli u kojima je uključena i prerada i miješanje (vidi npr. Symonds [106], Manne [79], [80], Aronofsky et al. [2], Suvorov [105]).[1] Ovdje ćemo prema Neralić [88] navesti dosta općenit linearni statički model programa proizvodnje rafinerije nafte, uglavnom na osnovi Mandelj [77].[2]

2.2.2. Polazne pretpostavke

Nazovimo **faktorom proizvodnje** ono što je potrebno za ostvarivanje procesa proizvodnje ili rezultat određene faze tog procesa. To znači da su faktori proizvodnje sirovine, međuproizvodi, finalni proizvodi, energija, proizvodni kapaciteti i rad. **Tehnološki režim** je bilo koja varijanta organizacije procesa proizvodnje, pri kojem određene sirovine (**ulaz** ili *input*) prelaze u određene proizvode (**izlaz** ili *output*). Svaki tehnološki režim može se prikazati vektorom, čiji su elementi veličine ulaza i izlaza odgovarajućih faktora proizvodnje po jedinici intenziteta danog tehnološkog režima (npr. tone prerađene nafte na dan), koji nazivamo *input-output* **vektorom**.

U rafineriji se neki finalni proizvodi dobivaju direktno na određenim postrojenjima, a drugi miješanjem međuproizvoda dobivenih u rafineriji (ili negdje drugdje) s još nekim dodacima. Prema tome, u modelu imamo dva odjeljka – **prerade** (tehnološka postrojenja) i **miješanja** (miješanje međuproizvoda i dodataka). U odjeljku prerade promatrat ćemo postrojenja kao objekte s *inputima* i *outputima*, bez obzira na to što se u njima događa. To znači da se u modelu provodi aproksimacija odvojenih neprekidnih tehnoloških procesa određenim brojem diskretnih načina rada, tj. tehnološkim režimima. Tada se kao varijante u modelu pojavljuju intenziteti korištenja tehnološkim režimima, izraženi u radnim danima ili u tonama prerađene sirovine, odnosno dobivenog finalnog proizvoda.

Za specijalizirano postrojenje, koje radi po strogom režimu može se promatrati samo jedan, i to **prosječni** tehnološki režim, uz pretpostavku da su odstupanja od njega slučajna

[1] Kod nas je primjer takvog modela prikazan u Černicki et al. [27].

[2] Važna je stabilnost takvih modela, koja je za dvorazinski model razmatrana u Cortez, Zlobec [25].

i normalno distribuirana. Za postrojenje koje upotrebljava sirovinu čas jedne, čas druge kvalitete to nije moguće jer se bitno mijenjaju parametri tehnološkog režima, normativi ulaza te kvaliteta ulaza i izlaza. U tom se slučaju postrojenje može aproksimirati linearnom kombinacijom *input-output* vektora koji odgovaraju prosječnim režimima rada uz određenu kvalitetu sirovine.

Ako je riječ o tehnološkom procesu u kojem se iz sirovine mogu dobiti razni proizvodi u određenom omjeru, onda je pri aproksimaciji pogodno promatrati **granične** tehnološke režime, kod kojih se neki faktor proizvodnje ili grupa faktora troši ili proizvodi u količini koja je tehnološki maksimalno odnosno minimalno moguća i svrsishodna.

Osim graničnih mogu se promatrati i drugi režimi u skladu s **principom efikasnosti**.[3] Naime, tehnološki režim je efikasan, ako ne postoji drugi, koji omogućuje veću proizvodnju (odnosno manju potrošnju) bilo kojeg faktora bez smanjenja proizvodnje (odnosno povećanja potrošnje) nekih drugih faktora. Razmatranje graničnih režima uz primjenu principa efikasnosti omogućuje da se pri aproksimaciji izabere minimalan broj neophodnih tehnoloških režima između svih dopustivih. Time se dobiva model koji prilično dobro odražava stvarnu situaciju i nije jako velikih dimenzija.

Dakle, svaki je tehnološki proces prikazan u modelu u odjeljku prerade pomoću nekoliko tehnoloških režima. U model se uključuju oni faktori za koje postoje ograničenja, a to su obično sirovine (nafta), međuproizvodi i finalni proizvodi te proizvodni kapaciteti. U praksi se pojavljuju dva tipa odjeljka prerade, ovisno o smislu varijabli:

a) ako su varijable vremena rada postrojenja pri određenom režimu, onda je proizvodni kapacitet postrojenja određen ukupnim brojem radnih dana u planskom razdoblju, a u model se unose koeficijenti koji se odnose na dan rada postrojenja pri odgovarajućem režimu;

b) ako su varijable količine sirovine, međuproizvoda i konačnih proizvoda, onda je proizvodni kapacitet određen količinom sirovine koju postrojenje može preraditi u planskom razdoblju ili količinom proizvoda koja se može proizvesti u tom razdoblju, dok se *input-output* koeficijenti odnose na jedinicu sirovine, međuproizvoda, odnosno finalnog proizvoda pri radu postrojenja po odgovarajućem režimu. U jednom modelu mogu se primjenjivati oba tipa, već prema tome kako je pogodnije.

Odjeljak miješanja također se može u modelu prikazati određenim brojem režima (receptura) miješanja. I ovdje su moguća dva tipa prema smislu varijabli. Intenzitet režima miješanja može biti: (1) količina svake komponente ili (2) količina konačnog proizvoda. Svaki od njih ima svojih prednosti i nedostataka. U prvom slučaju model je elastičan; svojstva komponenata u smjesi moraju biti aditivna; donekle se povećava dimenzija modela. U drugom je slučaju unaprijed ograničen izbor optimalnih receptura miješanja svakog proizvoda, ali se ne pretpostavlja aditivnost svojstava komponenata smjese; olakšana je praktička realizacija razmatranih receptura. Mogu se rabiti oba tipa u jednom modelu, a koji će se izabrati za koji proizvod ovisi o konkretnim uvjetima. Osim prerade i miješanja, važnu ulogu imaju i **zalihe** sirovina, međuproizvoda i finalnih proizvoda. Može se pretpostaviti da su zalihe jednake na početku i na kraju planskog razdoblja ili da imaju određeni porast ili smanjenje, ali je moguće promatrati model u kojem su zalihe promjenljive, ograničene odozgo (kapacitet rezervoara) i odozdo (sigurnosne ili sezonske zalihe).

[3] Vidi npr. Koopmans [65], te pojam efikasnog rješenja u višekriterijskom programiranju, 6. poglavlje, odjeljak 6.2.

U modelu treba uvažiti ograničenja sirovina, prije svega nafte, kao i potražnju za određenim finalnim proizvodima. **Funkcija cilja** (kriterij optimalnosti) u modelu može biti minimum troškova proizvodnje, maksimum dobiti, maksimum ukupne proizvodnje, maksimum proizvodnje deficitnih proizvoda ili maksimum iskorištenja kapaciteta.

2.2.3. Matematička formulacija modela

Pretpostavimo da u rafineriji imamo K tehnoloških postrojenja (procesa), pri čemu se k-to postrojenje ($k = 1,2,\ldots,K$) aproksimira u modelu sa r_k režima, gdje r označuje pojedini režim ($r = 1,2,\ldots,r_k$). Tada je ukupan broj tehnoloških režima postrojenja $R = \sum_{k=1}^{K} r_k$. Neka je ukupan broj faktora proizvodnje F, a među njima neka je M "vanjskih" faktora (razne vrste nafte itd.), zatim N međuproizvoda i T finalnih proizvoda. Označimo pojedine faktore proizvodnje sa f, usto vanjske faktore označimo sa m, a finalne proizvode sa t. Tada je $f = 1,2,\ldots,F$, $m = 1,2,\ldots,M$, $n = 1,2,\ldots,N$, $t = 1,2,\ldots,T$, $F = M+N+T$. Označimo sa u_t broj režima (receptura) miješanja finalnog proizvoda t, a sa v_t broj specifikacija proizvoda t. Ako recepturu miješanja finalnog proizvoda t označimo sa u, a pojedinu specifikaciju tog proizvoda sa v, za svaki proizvod $t = 1,2,\ldots T$, imamo $u = 1,2,\ldots,u_t$, $v = 1,2,\ldots,v_t$. Time dobivamo da je ukupan broj receptura $U = \sum_{t=1}^{T} u_t$, odnosno ukupan broj specifikacija je $V = \sum_{t=1}^{T} v_t$.

Uvedimo još i ove oznake:

x_{kr} – intenzitet tehnološkog režima r na postrojenju k, tj. ili (1) vrijeme rada postrojenja k po režimu r ili (2) kapacitet postrojenja k u odnosu na sirovinu ili dobiveni proizvod po režimu r;

y_{ut} – intenzitet režima (recepture) miješanja u za dobivanje finalnog proizvoda t, tj. ili količina pojedine komponente po recepturi u u finalnom proizvodu t, ili (2) količina proizvoda t dobivena po recepturi u;

$a_{kr}^{f}, a_{kr}^{m}, a_{kr}^{n}$ – koeficijenti potrošnje ili proizvodnje f-tog proizvodnog faktora, odnosno m-tog vanjskog faktora odnosno n-tog međuproizvoda pri jediničnom intenzitetu režima r na postrojenju k;

$b_{ut}^{f}, b_{ut}^{m}, b_{ut}^{n}$ – koeficijenti potrošnje f-tog faktora proizvodnje, odnosno m-tog vanjskog faktora, odnosno n-toga međuproizvoda, tj. komponente smjese za finalni proizvod t, pri jediničnom intenzitetu režima miješanja u;

d_{vt}^{f} – razlika između v-te specifikacije finalnog proizvoda t i v-tog svojstva komponente f, tj. $d_{vt}^{f} = d_{vt} - d_{vf}$;

w_m – raspoloživa količina faktora proizvodnje m;

w_t – količina finalnog proizvoda t koju treba proizvesti s obzirom na potrebe tržišta;

$\overline{w_t}$ – gornja ograda za proizvodnju proizvoda t;

$\underline{w_t}$ – donja ograda za proizvodnju proizvoda t;

q_k – proizvodni kapacitet postrojenja k u planskom razdoblju, tj. ili (1) planirano vrijeme rada postrojenja (broj radnih dana umanjen za broj dana remonta), ili (2) kapacitet postrojenja u odnosu prema sirovini ili finalnom proizvodu;

c_{kr} – varijabilni troškovi proizvodnje pri jediničnom intenzitetu rada postrojenja k po režimu r;

p_t – cijena jedinice finalnog proizvoda t.

Ograničenja, koja karakteriziraju mogućnosti proizvodnje rafinerije, mogu se uz uvedene oznake opisati ovako:

1) Vanjski faktori

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{r=1}^{r_k} a_{kr}^m x_{kr} + \sum_{t=1}^{T}\sum_{u=1}^{u_t} b_{ut}^m y_{ut} \le w_m, \quad m = 1,2,\ldots,M \tag{2.1}$$

2) Međuproizvodi

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{r=1}^{r_k} a_{kr}^n x_{kr} - \sum_{t=1}^{T}\sum_{u=1}^{u_t} b_{ut}^n y_{ut} \ge 0, \quad n = 1,2,\ldots,N \tag{2.2}$$

3) Finalni proizvodi

$$\sum_{u=1}^{u_t} y_{ut} \begin{cases} \le \overline{w}_t, & t = 1,2,\ldots,T' \\ \ge \underline{w}_t, & t = T'+1,\ldots,T \end{cases} \tag{2.3}$$

4) Kapaciteti tehnoloških postrojenja

$$\sum_{r=1}^{r_k} x_{kr} \le q_k, \quad k = 1,2,\ldots,K \tag{2.4}$$

5) Kvaliteta finalnih proizvoda

$$\sum_{u=1}^{u_t} d_{vt}^f y_{ut} \begin{cases} \le 0, v = 1,2,\ldots,v_t' \\ \ge 0, v = v_t'+1,\ldots,v_t, \end{cases} \quad t = 1,2,\ldots,T \tag{2.5}$$

6) Ograničenja nenegativnosti varijabli

$$x_{kr} \ge 0, \quad k = 1,\ldots,K, \quad r = 1,\ldots,r_k, \quad y_{ut} \ge 0, \quad t = 1,\ldots,T, \quad u = 1,\ldots,u_t. \tag{2.6}$$

Neka je funkcija cilja dobit (izražena preko doprinosa pokrića), koju želimo maksimizirati. To možemo izraziti sljedećom relacijom

$$\max z = -\sum_{k=1}^{K}\sum_{r=1}^{r_k} c_{kr} x_{kr} + \sum_{t=1}^{T}\sum_{u=1}^{u_t} p_t y_{ut}. \tag{2.7}$$

Napomenimo da (2.1) znači ograničenje odozgo za sirovine i ostale vanjske faktore. Zatim, (2.2) označuje da proizvodnja međuproizvoda ne može biti manja od njihove potrošnje. U (2.3) gornje ograničenje znači da ne treba proizvesti više od $\overline{w}_t$ proizvoda t, $t = 1,2,\ldots,T'$, a donje da ne treba proizvesti manje od $\underline{w}_t$ za proizvode $t = T'+1,\ldots,T$. Prema (2.4) kapaciteti tehnoloških postrojenja ne mogu biti premašeni. U relaciji (2.5) znak $\ge$ dolazi za one specifikacije koje su ograničene odozgo (npr. postotak sumpora), odnosno $\le$ za one koje su ograničene odozdo (npr. oktanski broj). Prema tome, ovdje je riječ o modelu linearnog programiranja, u kojem prema (2.7) maksimiziramo funkciju z dobiti, uz ograničenja na varijable izražena relacijama (2.1)–(2.6).

Svođenjem svih nejednadžbi na oblik sa znakom nejednakosti $\leq$ i uvođenjem matrične notacije, može se model napisati kraće i jednostavnije u obliku

$$\max z(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{p}^T\mathbf{y} \tag{2.8}$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{Ax} + \mathbf{By} & \leq & \mathbf{w} \\ \mathbf{Cx} & \leq & \mathbf{q} \\ \mathbf{Dy} & \leq & \mathbf{0} \end{array} \tag{2.9}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \ \ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \tag{2.10}$$

Pritom je $\mathbf{A}$ – matrica tehnoloških režima prerade, reda $(F \times R)$, $\mathbf{B}$ – matrica režima (receptura) miješanja, reda $(F \times U)$, $\mathbf{C}$ – matrica proizvodnih kapaciteta postrojenja, reda $(K \times R)$, $\mathbf{D}$ – matrica svojstava komponenata smjesa, reda $(V \times U)$, $\mathbf{x}$ – vektor intenziteta tehnoloških režima prerade, reda $(R \times 1)$, $\mathbf{y}$ – vektor intenziteta režima (receptura) miješanja, reda $(U \times 1)$, $\mathbf{w}$ – vektor raspoloživih količina sirovina i potreba konačnih proizvoda, reda $(F \times 1)$, $\mathbf{q}$ – vektor kapaciteta tehnoloških postrojenja, reda $(K \times 1)$, $\mathbf{c}$ – vektor varijabilnih troškova pri jediničnom intenzitetu tehnoloških režima prerade, reda $(R \times 1)$, $\mathbf{c}^T$ – transponat vektora $\mathbf{c}$, $\mathbf{p}$ – vektor cijena finalnih proizvoda, reda $(U \times 1)$, $\mathbf{p}^T$ – transponat vektora $\mathbf{p}$.

Problem linearnog programiranja (2.8)–(2.10), koji je statički model programa proizvodnje rafinerije nafte, može se riješiti npr. simpleks metodom.[4]

Opisani model ima i određenih nedostataka. Linearnost svojstava je bitna pretpostavka, koja ponekad predstavlja znatno ograničenje jer su neki procesi nelinearni. Zatim, model je deterministički, iako veliki broj parametara ima slučajan karakter. Također se može dogoditi da optimum dobiven na osnovi modela nije moguće ostvariti zbog nedostatka rezervoara za uskladištenje sirovina i međuproizvoda. Međutim, bez obzira na sve to, u praksi se primjenjuju takvi modeli i na osnovi njih dobivaju se rješenja pomoću elektroničkih računala. Tako je prema Catchpole [10] još 1962. godine od ukupnog vremena koje su potrošila sva računala u SAD-u na rješavanju problema optimizacije polovica otpala na probleme iz naftne industrije. Zatim u Dantzig [29] ističe se naftna industrija sa stajališta raznovrsnosti, granica i iskustva primjene linearnog i nelinearnog programiranja.[5]

2.3. Modeliranje problema lokacije

2.3.1. Uvod

Problem lokacije ima važno mjesto i u ekonomskoj teoriji i u praksi, a sastoji se u određivanju mjesta (lokacije) proizvodnje prema nekom kriteriju (ili kriterijima) uz zadana

[4] Vidi npr. Neralić [91], str. 95–114, 124–134 i Dodatak A.

[5] Napomenimo da se u Neralić [88], str. 596–597, može naći jednostavan primjer opisanog modela, koji je preuzet iz Suvorov [105], str. 162, tablica 22.

ograničenja i pretpostavke. Ovdje ćemo najprije razmotriti problem lokacije bez ograničenja kapaciteta proizvodne jedinice, koji nazivamo nekapacitiranim problemom lokacije, a može se formulirati na dva načina, kao problem djelomično ili potpuno cjelobrojnog programiranja. Zatim će se obraditi kapacitirani problem lokacije, formuliran u terminima djelomično cjelobrojnog programiranja. Za svaki od tih problema bit će naveden primjer s rješenjem. Oba problema i primjeri prikazani su prema Neralić [89].

2.3.2. Nekapacitirani problem lokacije

Nekapacitirani problem lokacije (*uncapacitated location problem*) sastoji se u određivanju mjesta proizvodnje nekog proizvoda bez ograničenja na kapacitet proizvodne jedinice mogućih lokacija. Pritom se pretpostavlja da su poznate potencijalne lokacije (ishodišta) i fiksni troškovi izgradnje proizvodne jedinice pojedine lokacije za zadani kapacitet. U slučaju povećanja ili smanjenja zadanog kapaciteta za neko od rješenja jedinični fiksni troškovi se po pretpostavci neće mijenjati. Zatim, pretpostavlja se da su poznati potrošači (odredišta) i njihova potražnja za tim proizvodom, kao i troškovi transporta jedinice proizvoda od pojedine lokacije do potrošača. Kriterij za određivanje mjesta proizvodnje jesu minimalni troškovi proizvodnje i transporta uz zadovoljavanje potražnje svih potrošača. Naime, ako s neke lokacije nije potrebno transportirati proizvod niti jednom potrošaču, to onda znači da na toj lokaciji nije potrebno graditi proizvodnu jedinicu, pa su u tom slučaju fiksni troškovi jednaki nuli. Osim toga, na taj će se način moći odrediti kojeg potrošača treba opskrbiti s koje lokacije.

Taj se problem može formulirati u terminima djelomično cjelobrojnog programiranja (vidi npr. Efroymson, Ray [31], Neralić [89]). U tu svrhu uvedimo sljedeće oznake:

i – indeks potencijalne lokacije (ishodišta), $i = 1, 2, \ldots, m$;

j – indeks potrošača (odredišta), $j = 1, 2, \ldots, n$;

b_j – količina potražnje potrošača j, $\forall j$;

f_i – fiksni troškovi izgradnje proizvodne jedinice na lokaciji i, $\forall i$;

t_{ij} – troškovi transporta jedinice proizvoda od ishodišta i do potrošača j, $\forall i, j$;

$c_{ij} = t_{ij} b_j$ – ukupni troškovi transporta od ishodišta i do odredišta j, da bi se zadovoljila potražnja tog odredišta, $\forall i, j$;

x_{ij} – dio potražnje b_j potrošača j koja će se zadovoljiti iz ishodišta i, $\forall i, j$;

y_i – cjelobrojna varijabla, koja poprima vrijednost 0 ako je $x_{ij} = 0$ za sve j, odnosno 1, ako je $x_{ij} > 0$ za neki j, tj.

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{ako je } \ x_{ij} = 0 \ \text{ za sve } j \\ 1, & \text{ako je } \ x_{ij} > 0 \ \text{ za neko } j. \end{cases}$$

Tada se nekapacitirani problem lokacije sastoji u sljedećem:

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i y_i \tag{2.11}$$

uz ograničenja

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\ldots,n, \tag{2.12}$$

$$x_{ij} \le y_i, \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad j = 1,2,\ldots,n, \tag{2.13}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad y_i = 0 \text{ ili } 1, \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{2.14}$$

Funkcija cilja (2.11) koju treba minimizirati označuje ukupne fiksne troškove svih ishodišta (lokacija) i ukupne troškove transporta do svih odredišta. Ograničenja (2.12) osiguravaju zadovoljenje potražnje svih potrošača. Ako je $x_{ij} > 0$ za neki j, zbog (2.13) mora također biti $y_i > 0$, a zbog (2.14) tada mora biti $y_i = 1$. Ako je pak $x_{ij} = 0$ za sve $j = 1,2,\ldots,n$, onda će zbog dosezanja minimuma u (2.11) biti $y_i = 0$. Problem (2.11)–(2.14) je problem djelomično (mješovito) cjelobrojnog programiranja jer su varijable x_{ij} kontinuirane, dok su y_i diskretne,[6] pa se može riješiti poznatim metodama (vidi npr., Garfinkel, Nemhauser [43], Nemhauser, Woolsey [87], Taha [107]).

Istaknimo da je dosta jednostavno moguće izvršiti proširenje na slučaj kad se u obzir uzimaju i varijabilni troškovi proizvodnje. Naime, ako su v_i – varijabilni troškovi po jedinici proizvoda na lokaciji i, $i = 1,2,\ldots,m$, koji ovise linearno o količini, onda u funkciju cilja (2.11) treba staviti

$$c_{ij} = (v_i + t_{ij})b_j, \text{ za } i = 1,2,\ldots,m, \; j = 1,2,\ldots,n. \tag{2.15}$$

U tom slučaju prvi sumand u funkciji cilja (2.11) predstavlja varijabilne troškove proizvodnje i troškove transporta. Također je moguće proširenje i na slučaj kad su varijabilni troškovi konkavna po dijelovima linearna funkcija količine (vidi npr., Efroymson, Ray [31]).

Navedimo još jednu formulaciju prikazanog problema prema Bilde, Krarup [8]. Naime, već je u Efroymson, Ray [31] istaknuto da će u optimalnom rješenju problema (2.11)–(2.14) točno n veličina x_{ij} biti jedinice, a sve ostale bit će jednake nuli. To slijedi iz činjenice da se za bilo koje (pa onda i za optimalne) vrijednosti varijabli y_i, optimalne vrijednosti varijabli x_{ij} mogu odrediti tako, da se svaki potrošač opskrbljuje iz "najbližeg" otvorenog ishodišta. Zato se može pretpostaviti da se svako odredište opskrbljuje iz samo jednog ishodišta, pa se mogu uvesti cjelobrojne varijable

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako se odredište } j \text{ opskrbljuje iz ishodišta } i, \\ 0, & \text{u protivnom} \end{cases} \tag{2.16}$$

$$i = 1,2,\ldots,m, \quad j = 1,2,\ldots,n.$$

Tako se uz isto značenje varijabli y_i, $i = 1,2,\ldots,m$, te uz istu funkciju cilja (2.11) i ograničenja (2.13), zamjenom ograničenja (2.12) i (2.14) s ograničenjima

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge 1, \quad j = 1,2,\ldots,n, \tag{2.17}$$

[6] Zapravo je riječ o varijablama koje mogu poprimiti vrijdnosti 0 ili 1, a nazivamo ih još **binarnim varijablama** (*binary variables*).

i

$$x_{ij} = 0 \text{ ili } 1, \quad y_i = 0 \text{ ili } 1, \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad j = 1,2,\ldots,n, \tag{2.18}$$

dobiva problem čisto cjelobrojnog programiranja (2.11), (2.17), (2.13) i (2.18). To je drugačija formulacija nekapacitiranog problema lokacije u terminima čisto cjelobrojnog programiranja, s binarnim ili 0–1 varijablama.

Primjer 2.1. Razmotrimo sljedeći primjer nekapacitiranog problema lokacije za neki homogeni proizvod. Potrebno je izgraditi novi kapacitet za proizvodnju tog homogenog proizvoda. Poznate su tri potencijalne lokacije $(i = 1,2,3)$, s podacima o fiksnim troškovima po jedinici, odnosno fiksnim troškovima f_i, $i = 1,2,3$ unaprijed zadanog kapaciteta od 35 000 tona u određenim novčanim jedinicama koje označujemo sa nj (vidi tablicu 2.1).

Tablica 2.1.
Fiksni troškovi lokacija

Lokacija i	Fiksni troškovi (nj / toni)	Fiksni troškovi f_i zadanog kapaciteta (000 000 nj)
1	5825	$203,875$
2	5490	$192,150$
3	4925	$172,375$

Pretpostavimo da imamo četiri potrošača $(j = 1,2,3,4)$ s ukupnom potražnjom od 220 000 tona tog homogenog proizvoda (vidi tablicu 2.2).

Tablica 2.2.
Potražnja potrošača

Potrošač j	Potražnja b_j (u tonama)
1	48 000
2	50 000
3	68 000
4	54 000

Neka su nadalje poznati jedinični troškovi transporta t_{ij} (nj / toni) od pojedine potencijalne lokacije i do potrošača j (vidi tablicu 2.3).

Tablica 2.3.
Jedinični troškovi transporta
(nj / toni) od ishodišta do odredišta

i \ j	1	2	3	4
1	240	350	228	150
2	160	195	130	250
3	100	175	184	320

Na osnovi podataka iz tablica 2.2 i 2.3 lako se dobiju troškovi transporta za ukupnu potražnju $c_{ij} = t_{ij} b_j$, koji su navedeni u tablici 2.4.

Tablica 2.4.
Troškovi transporta (000 000 nj)
od lokacije proizvodnje do mjesta
potrošnje za ukupnu potražnju

i \ j	1	2	3	4
1	$11,52$	$17,5$	$15,504$	$8,1$
2	$7,68$	$9,75$	$8,84$	$13,5$
3	$4,8$	$8,75$	$12,512$	$17,28$

Pomoću navednih podataka može se dobiti model nekapacitiranog problema lokacije kao problem djelomično cjelobrojnog programiranja (2.11)–(2.14) ili problem čisto cjelobrojnog programiranja (2.11), (2.17), (2.13) i (2.18). Ovdje navodimo problem čisto cjelobrojnog programiranja u obliku

$$\begin{aligned} \min z = \ & 11,52x_{11}+11,75x_{12}+15,504x_{13}+8,1x_{14}+7,68x_{21} \\ & +9,75x_{22}+8,84x_{23}+13,5x_{24}+4,8x_{31}+8,75x_{32}+12,512x_{33} \\ & +17,28x_{34}+203,875y_1+192,15y_2+172,375y_3 \end{aligned} \tag{2.19}$$

uz ograničenja

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{21}+x_{31} &\geq 1 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} &\geq 1 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} &\geq 1 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34} &\geq 1 \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{array}{lll} x_{11} \leq y_1 & x_{21} \leq y_2 & x_{31} \leq y_3 \\ x_{12} \leq y_1 & x_{22} \leq y_2 & x_{32} \leq y_3 \\ x_{13} \leq y_1 & x_{23} \leq y_2 & x_{33} \leq y_3 \\ x_{14} \leq y_1 & x_{24} \leq y_2 & x_{34} \leq y_3 \end{array} \tag{2.21}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ili } 1, \quad i = 1,2,3, \quad j = 1,2,3,4, \tag{2.22}$$

$$y_i = 0 \text{ ili } 1, \quad i = 1,2,3. \tag{2.23}$$

Taj problem može se riješiti npr. pomoću programskog paketa LINGO.[7] Dobiveno rješenje je $x_{11}^* = x_{12}^* = x_{13}^* = x_{14}^* = 0$, $x_{21}^* = x_{22}^* = x_{23}^* = x_{24}^* = 0$, $x_{31}^* = x_{32}^* = x_{33}^* = x_{34}^* = 1$, $y_1^* = y_2^* = 0$, $y_3^* = 1$, $\min z = z^* = 215,717$. To znači da je u skladu s naprijed navedenim pretpostavkama potrebno na lokaciji 3 izgraditi proizvodnu jedinicu, koja će opskrbljivati sve potrošače. Pritom se prema dobivenom rješenju troškovi sastoje od fiksnih troškova $f_3^* = 172,375$ i od transportnih troškova $t^* = 4,8+8,75+12,512+17,28 = 43,342$, pa je $z^* = 172,375+43,432 = 215,717$.

[7] Na `www.lindo.com` može se preuzeti verzija LINGO programskog paketa za rješavanje problema linearnog, linearnog cjelobrojnog i nelinearnog programiranja relativno malih dimenzija, s manjim brojem varijabli i ograničenja.