1. Vjerojatnost

1.1. Pojam događaja

Proučavanje pojava u prirodi i društvu podrazumijeva razne oblike opažanja pojava, a često i izvođenje pokusa. S tim u vezi postavlja se i zadatak formalnog opisivanja pokusa, odnosno obavljenog opažanja. Ishod pokusa, ispitivanja ili mjerenja ne može se unaprijed znati pa je slučajnost usko povezana s problemom izvođenja pokusa. Intuitivno je jasno da postoje ishodi pokusa za koje očekujemo da će se "lakše" ili "teže" realizirati. Mjera "količine slučajnosti" je vjerojatnost. Da bi se definirala vjerojatnost ishoda pokusa ili, govoreći općenito, nekog događaja, potrebno je, kao prvo, formalno, tj. matematički definirati događaj (rezultat pokusa, mjerenja ili opažanja).

Pri izvođenju pokusa (opažanja, mjerenja) nije moguće predvidjeti pojedini ishod, ali je moguće i vrlo važno uočiti koji su svi mogući pojedinačni ishodi pri izvođenju pokusa u određenim uvjetima. Npr., ako mjerimo protok u profilu vodomjerne stanice i bilježimo ga kao broj s jednom decimalom, onda sve moguće ishode tog pokusa (mjerenja) čine svi brojevi s jednom decimalom, naravno u granicama od najmanjeg do najvećeg protoka zabilježenog na toj stanici. Radi jednostavnosti i preglednosti razmatrat ćemo sasvim jednostavni pokus:

Primjer 1.1. Pokus se sastoji od bacanja pravilne, numerirane, šesterostrane kocke. Iako ne znamo koji će broj biti ishod pojedinog bacanja (kraće jednostavno kažemo koji će broj pasti), znamo da je svaki ishod pojedinog bacanja kocke jedan od brojeva od 1 do 6 pa možemo reći da je skup svih mogućih ishoda skup $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Općenito, skup svih mogućih pojedinačnih ishoda nekog pokusa naziva se **skup elementarnih događaja** i označuje se sa Ω. U skladu s tim, **elementarni događaj** je svaki element skupa Ω.

www.element.hr

Događaji se označuju velikim slovima.

Za pokus iz primjera 1.1 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Nazovemo li M događaj da je na kocki pao broj pet, možemo, umjesto ovog opisa događaja M riječima, pisati jednostavno $M=\{5\}$. Naravno da se obavljajući neki pokus ne ograničavamo samo na promatranje pojedinačnih ishoda, tj. elementarnih događaja. Tako možemo, npr., označiti:

A – "ishod bacanja kocke je parni broj"

B – "ishod bacanja kocke je broj veći od 2".

Te se događaje može jednostavno označiti kao skupove pojedinačnih ishoda koji ih realiziraju, tj. kao:

$$\begin{aligned} A &= \{2,4,6\} \\ B &= \{3,4,5,6\}. \end{aligned}$$

Očito su ti skupovi podskupovi skupa elementarnih događaja. Tako se i definira slučajni događaj:

Slučajni događaj je podskup skupa elementarnih događaja.

Primjedba: Definiciju je moguće bolje razumjeti ako se prihvati formulacija: događaji kao rezultati pokusa formalno se prikazuju kao skupovi sastavljeni od nekih pojedinačnih realizacija pokusa. Dakle, ako je rezultat pokusa x i $x \in A$, kaže se da se dogodio događaj A. U suprotnom, ako $x \notin A$, kaže se da se događaj A nije dogodio.

Na primjer, bacimo li kocku i ishod je broj 4, to znači da se dogodio navedeni događaj A jer je $4 \in \{2,4,6\}$.

U skladu s operacijama sa skupovima moguće je definirati i **operacije s događajima,** odnosno uvesti termine koji se upotrebljavaju u vezi s tim operacijama:

1° **Siguran događaj** je skup Ω.

2° **Nemoguć događaj** je $\emptyset$, tj. prazan skup.

3° **Suprotni događaj** događaju $A \subseteq \Omega$ je događaj koji se realizira **ako se ne realizira događaj** A i označuje se sa $\overline{A}$ ili A^c.

4° **Suma (unija) događaja** A_1, A_2 je događaj koji se realizira ako se realizira **bar jedan od događaja** A_1, A_2 (**ili** jedan, **ili** drugi, **ili** oba) i označuje se sa $A_1 + A_2$ ili $A_1 \cup A_2$.

5° **Produkt (presjek) događaja** A_1, A_2 je događaj koji se realizira ako se realiziraju **oba događaja** A_1 **i** A_2 (**i** jedan **i** drugi) i označuje se sa $A_1 \cdot A_2$ ili $A_1 \cap A_2$.

6° Događaji A_1 i A_2 **međusobno se isključuju** ako je $A_1 \cdot A_2 = \emptyset$.

7° Događaj A_2 **posljedica je događaja** A_1 ako je $A_1 \subseteq A_2$.

Upotreba ovih termina i operacija za događaje sasvim je u skladu s odgovarajućim operacijama definiranim za skupove. Na primjer, suprotni događaj događaju A je, kao skup, komplement skupa A jer ga realiziraju ishodi pokusa koji nisu u skupu A. Zato se i označuje sa $\overline{A} = A^c = \Omega \setminus A$.

www.element.hr

Suma i produkt definiraju se na odgovarajući način i za više od dva događaja. Tako $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ označuje događaj koji se realizira ako se dogodi bar jedan od događaja $A_1, A_2, \ldots, A_n$, dok $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ označuje događaj koji se realizira ako se dogode svi događaji $A_1, A_2, ..., A_n$.

Primjer 1.2. Pokus se sastoji od bacanja triju novčića, pri čemu se promatra pojavljivanje pisama i grbova nakon bacanja novčića.

a) Odredimo skup elementarnih događaja.

b) Odredimo kao skupove odgovarajućih elementarnih događaja sljedeće događaje:

A – “nije se pojavio nijedan grb”

B – “nije se pojavilo nijedno pismo”

C – “pojavilo se više grbova nego pisama”.

c) Pomoću operacija s događajima A, B i C napišimo sljedeće događaje:

D – “pojavio se bar jedan grb”

E – “pojavilo se bar jedno pismo”

F – “pojavio se i grb i pismo”

G – “pojavilo se više pisama nego grbova”

H – “pojavili su se samo grbovi ili samo pisma”.

Rješenje: a) Označimo li sa P pojavu pisma, a sa G pojavu grba na jednom novčiću, tada jednoj realizaciji pokusa možemo pridružiti uređenu trojku sastavljenu od ova dva slova. Npr. (P,P,G) predstavlja događaj da su prva dva novčića pokazala pismo, a treći novčić grb. Prema tome, skup elementarnih događaja je

$$\Omega = \{(P,P,P),(P,P,G),(P,G,P),(G,P,P),(P,G,G),(G,P,G),(G,G,P),(G,G,G)\}.$$

b)
$$\begin{aligned} A &= \{(P,P,P)\} \\ B &= \{(G,G,G)\} \\ C &= \{(P,G,G),(G,P,G),(G,G,P),(G,G,G)\}. \end{aligned}$$

c) $D = \overline{A}, \quad E = \overline{B}, \quad F = D \cdot E = \overline{A} \cdot \overline{B}, \quad G = \overline{C}, \quad H = A + B.$

1.2. Vjerojatnost događaja

U primjeru 1.1 definirali smo događaj $M = \{5\}$, tj. da je ishod bacanja kocke broj pet. Postavi li se pitanje kolika je vjerojatnost da se taj događaj dogodi, svatko će jednostavno zaključiti da je vjerojatnost jednaka 1/6 jer je broj pet jedan od šest brojeva koji se mogu pojaviti kad se baci kocka. Pritom se pretpostavlja da svih šest brojeva imaju jednaku mogućnost da se realiziraju.

Vjerojatnost nekog događaja označuje se slovom P uz oznaku tog događaja u zagradi, pa bi u ovom slučaju pisali $P(M) = \frac{1}{6}$. Na isti bi se način zaključilo da je $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ za događaj da ishod bacanja kocke bude parni broj jer su tri parna broja među svih šest mogućih.

Klasična definicija vjerojatnosti upravo je rezultat ovakvog intuitivnog zaključivanja o vjerojatnosti kao "mjeri slučajnosti", odnosno "mjeri ostvarivosti" nekog događaja:

Neka je Ω skup elementarnih događaja koji su svi jednako mogući i neka taj skup ima $n = k(\Omega)$ elemenata. **Vjerojatnost događaja** $A \subseteq \Omega$ koji ima $m = k(A)$ elemenata je broj

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{m}{n}.$$

Oznaka $k(A)$, odnosno $k(\Omega)$ je oznaka za broj elemenata skupa A, odnosno skupa Ω (kardinalni broj skupa). Riječima se ova definicija može izraziti ovako: Vjerojatnost događaja A je omjer broja elementarnih događaja koji realiziraju događaj A i broja svih elementarnih događaja.

Primjedba: Ova definicija je tzv. **klasična definicija vjerojatnosti** koja u strogo matematičkom smislu ima određene ozbiljne nedostatke. Kao prvo, definira se pojam vjerojatnosti pomoću istog tog pojma jer se pretpostavlja da su svi elementarni događaji jednako mogući, a to zapravo znači da su jednako vjerojatni. Nadalje, u stvarnim uvjetima obavljanja pokusa, tu je pretpostavku teško ispuniti jer to, npr., pri bacanju kocke, zahtijeva da je ona "idealna" (savršeno pravilna, homogena). Treći je nedostatak što ta definicija omogućuje računanje vjerojatnosti samo za skupove elementarnih događaja koji su konačni, dakle čije elemente možemo izbrojiti. Usprkos tomu, vidjet će se da se ta definicija uklapa u apstraktnu matematičku definiciju vjerojatnosti, a u širokom rasponu problema omogućuje računanje vjerojatnosti.

Prema klasičnoj definiciji vjerojatnosti vidimo da je vjerojatnost realan broj pridružen svakom događaju i pokazat ćemo da vrijede sljedeća **svojstva vjerojatnosti**:

1° $0 \leq P(A) \leq 1$ za svaki događaj A.

2° $P(\Omega) = 1$, tj. vjerojatnost sigurnog događaja jednaka je jedinici.

3° $P(\emptyset) = 0$, tj. vjerojatnost nemogućeg događaja jednaka je nuli.

4° $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

5° $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2)$. Posebno, ako se događaji međusobno isključuju, tj. $A_1 \cdot A_2 = \emptyset$, tada je $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$.

Prva tri svojstva očigledna su iz same definicije vjerojatnosti, a iz

$$P(\overline{A}) + P(A) = \frac{k(A^c)}{k(\Omega)} + \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{k(\Omega)}{k(\Omega)} = 1$$

www.element.hr

slijedi četvrto svojstvo. Računajući po definiciji

$$\begin{aligned} P(A_1+A_2) &= \frac{k(A_1\cup A_2)}{k(\Omega)} = \frac{k(A_1)+k(A_2)-k(A_1\cap A_2)}{k(\Omega)} \\ &= P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cdot A_2), \end{aligned}$$

pokazali smo da vrijedi i peto svojstvo koje se često naziva **adicijski teorem** (adicija znači zbrajanje). Može se iskazati riječima: **vjerojatnost zbroja događaja je zbroj vjerojatnosti tih događaja umanjen za vjerojatnost njihova produkta.** Posebno, za **međusobno isključive događaje,** kad je $P(A_1\cdot A_2)=0$, adicijski teorem glasi:

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)\ .$$

Bit definicije vjerojatnosti je da se događaju (skupu pojedinačnih realizacija nekog pokusa) pridružuje broj, a pokazano je i koja su glavna svojstva tog pridruživanja. U matematičkom smislu pridruživanje je funkcija pa se upravo na tome zasniva **matematička definicija vjerojatnosti** kojom su otklonjeni nedostaci klasične definicije, a zadržana sva svojstva vjerojatnosti:

Neka je Ω skup elementarnih događaja nekog pokusa. **Vjerojatnost** je funkcija koja svakom događaju $A\subseteq\Omega$ pridružuje realan broj $P(A)$ i vrijedi:

1° $0\le P(A)\le 1$ za svaki A.

2° $P(\Omega)=1$.

3° $P(A_1+A_2+\ldots)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$ za međusobno isključive događaje $A_1,A_2,\ldots$, tj. za događaje za koje vrijedi $A_i\cdot A_j=\emptyset$ za $i\neq j$.

Može se pokazati da iz ova tri svojstva funkcije, koja je definirana kao vjerojatnost, proizlaze ostala svojstva koja su dokazana za klasičnu definiciju vjerojatnosti. Ovako definirana, vjerojatnost nije ograničena samo na konačne skupove. Međutim, definicija ne kaže kako zadati funkciju P čije bi vrijednosti bile vjerojatnosti događaja u nekom konkretnom problemu. Tako na klasičnu definiciju vjerojatnosti treba gledati kao na jednu mogućnost zadavanja te funkcije.

Vjerojatnost događaja, kao nenegativan broj manji ili jednak jedinici, bit će izražena kao razlomak ili decimalni broj ne veći od jedinice, a često i kao postotak. Na primjer, za vjerojatnost događaja da na kocki padne broj pet reći će se da je jednaka $\frac{1}{6}$, ili 0.17 (zaokruženo), ili 17%.

Primjer 1.3. Bacaju se dvije idealne kocke. Odredimo vjerojatnost ovih događaja:

a) Na obje kocke pao je broj 4.

b) Na kockama su brojevi 2 i 3.

c) Na kockama su međusobno različiti brojevi.

d) Zbroj brojeva na kockama iznosi 10.

www.element.hr

e) Ili je na obje kocke broj 4 ili je zbroj brojeva jednak 10.

f) Produkt brojeva na kockama iznosi 14 .

Rješenje: Prije svega treba odrediti $k(\Omega)$, tj. broj elemenata skupa elementarnih događaja. Skup svih mogućih realizacija bacanja dviju kocaka može se napisati na sljedeći način:

$$\Omega = \{(x,y), x = 1,2,\dots,6, y = 1,2,\dots,6\},$$

jer su realizacije uređeni parovi brojeva od 1 do 6. Broj tih parova je broj varijacija drugog razreda od šest elemenata. Dakle, $k(\Omega) = 6^2 = 36$.

a) Označimo sa A događaj da je na obje kocke pao broj 4. Taj događaj realizira samo jedan elementarni događaj $\{(4,4)\}$, pa je

$$P(A) = \frac{1}{36}.$$

b) Ovaj događaj, označimo ga sa B, može se, kao skup elementarnih događaja, napisati kao $B = \{(2,3),(3,2)\}$, pa je

$$P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

c) Da bi se izračunala vjerojatnost događaja C "na kockama su međusobno različiti brojevi", treba odrediti broj uređenih parova brojeva od 1 do 6 u kojima su ti brojevi međusobno različiti. Jednostavnije je odrediti broj parova u kojima su brojevi međusobno jednaki, a to je broj realizacija događaja $\overline{C}$. Dakle,

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}.$$

d) Lako je vidjeti da je događaj čiju vjerojatnost treba odrediti skup

$$D = \{(4,6),(6,4),(5,5)\},$$

pa je

$$P(D) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

e) Traži se vjerojatnost događaja $A + D$. Prema adicijskom teoremu, budući da se događaji međusobno isključuju, slijedi:

$$P(A+D) = P(A) + P(D) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

f) Kako je $14 = 1 \cdot 14 = 2 \cdot 7$, to znači da se 14 ne može izraziti kao produkt brojeva od 1 do 6, pa je događaj E "produkt brojeva na kockama iznosi 14" nemoguć. Dakle, $P(E) = 0$.

www.element.hr

1.3. Uvjetna vjerojatnost

Primjer 1.4. Pokus čine dva bacanja kocke. Ispišimo kao skupove elementarnih događaja i odredimo vjerojatnost događaja:

A – "u prvom bacanju ishod je broj 2"

B – "zbroj brojeva iz oba bacanja djeljiv je sa 5".

Rješenje: Skup elementarnih događaja Ω u ovom pokusu isti je kao kod bacanja dviju kocaka, dakle, skup uređenih parova brojeva od 1 do 6. Prema tome, $k(\Omega) = 36$.

Događaji A i B se kao skupovi mogu napisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} A &= \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\} \\ B &= \{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2),(4,6),(6,4),(5,5)\}. \end{aligned}$$

Prema definiciji $P(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ i $P(B) = \dfrac{7}{36}$.

Ovaj primjer poslužit će da se uvede još jedan tip problema pri računanju vjerojatnosti. Postavimo ovakav zadatak: Pretpostavimo li da je ishod prvog bacanja kocke broj 2, kolika je vjerojatnost da će nakon drugog bacanja zbroj brojeva iz oba bacanja biti djeljiv sa 5? Događaj čija se vjerojatnost traži nije događaj B jer se za B ne uvjetuje ishod prvog bacanja, što se vidi i iz realizacija koje su u skupu B. Kako je uvjet koji treba biti ispunjen upravo taj da je ishod prvog bacanja broj 2, tj. događaj A, ovaj će se događaj označiti sa $B|A$. Dakle, $B|A$ je događaj koji se realizira ako je zbroj dvaju bacanja kocke djeljiv sa 5, uz uvjet da je ishod prvog bacanja broj 2. Skup elementarnih događaja za računanje vjerojatnosti tog događaja je skup A jer dolaze u obzir samo realizacije u kojima je na prvom mjestu broj 2, a među njima je jedino $(2,3)$ ishod koji realizira događaj B. Prema tome, $P(B|A) = \dfrac{1}{6}$.

Na isti način može se odrediti i vjerojatnost $P(A|B) = \dfrac{1}{7}$ jer je za taj događaj skup elementarnih događaja događaj B u kojem je sedam parova, a samo jedan (opet par $(2,3)$) realizira događaj A. Riječima bi se $A|B$ opisao kao događaj da je pri prvom bacanju ishod broj 2 ako se zna da je zbroj brojeva iz oba bacanja djeljiv sa 5. Vidimo da su događaji $A|B$ i $B|A$ definirani na međusobno različitim skupovima elementarnih događaja, zbog čega su im vjerojatnosti različite, iako ih realizira jedan te isti ishod.

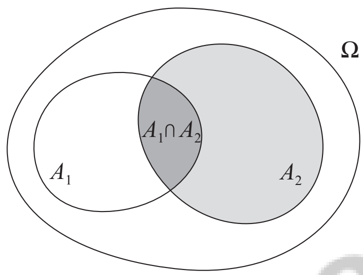
Općenito, oznaka $A_1|A_2$ označuje događaj koji se realizira ako se dogodi događaj A_1 uz uvjet da se dogodio A_2, ili kraće A_1 **uz uvjet** A_2. Vjerojatnost $P(A_1|A_2)$ tog događaja zove se **uvjetna vjerojatnost događaja** A_1 (uz uvjet A_2). Važno je uočiti da se kao prvi navodi događaj o čijoj je vjerojatnosti riječ, a kao drugi, događaj koji je uvjet. Za razliku od uvjetne vjerojatnosti $P(A_1|A_2)$ događaja A_1, za vjerojatnost $P(A_1)$ kaže se da je **apsolutna vjerojatnost događaja** A_1.

www.element.hr

Do izraza za računanje uvjetne vjerojatnosti dolazi se sljedećim razmatranjem:

Neka je zadan konačan skup elementarnih događaja Ω sa $k(\Omega)$ elemenata. Događaj $A_1 \subset \Omega$ realizira $k(A_1)$ elementarnih događaja, a događaj A_2, $k(A_2)$ elementarnih događaja. Za događaj $A_1|A_2$ skup elementarnih događaja je skup A_2, a u njemu je $k(A_1 \cap A_2)$ elementarnih događaja koji realiziraju A_1 (sl. 1). Prema tome,

$$P(A_1|A_2) = \frac{k(A_1 \cap A_2)}{k(A_2)} = \frac{\dfrac{k(A_1 \cap A_2)}{k(\Omega)}}{\dfrac{k(A_2)}{k(\Omega)}} = \frac{P(A_1 \cdot A_2)}{P(A_2)}.$$



Slika 1.

Naravno, treba biti ispunjen uvjet da je $P(A_2) \neq 0$. Ova je relacija važna jer iz nje proizlazi relacija za računanje vjerojatnosti produkta dvaju događaja, tzv. **multiplikacijski teorem:**

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_2) \cdot P(A_1|A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)\ .$$

Ova zadnja jednakost dobije se uvažavajući da je $P(A_1 \cdot A_2) = P(A_2 \cdot A_1)$. Multiplikacijscki teorem (multiplikacija ili množenje) iskazuje da je **vjerojatnost produkta događaja produkt vjerojatnosti jednog i uvjetne vjerojatnosti drugog događaja uz uvjet da se prvi dogodio.**

Uvjetna i apsolutna vjerojatnost događaja općenito se razlikuju, što se vidi i u primjeru 1.4 gdje je $P(A|B) \neq P(A)$ i $P(B|A) \neq P(B)$. Da to nije tako za sve događaje, možemo se uvjeriti ako u vezi s istim primjerom definiramo događaj:

C – "u drugom bacanju ishod je parni broj".

Lako se odredi da je $P(C) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$. Da bi se izračunalo $P(C|A)$, može se upotrijebiti relacija za određivanje uvjetne vjerojatnosti. Kako je

$$C \cap A = \{(2,2),(2,4),(2,6)\},$$

dobije se

$$P(C|A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

www.element.hr

To znači da je $P(C|A) = P(C)$. Očito je odnos događaja A i C drugačiji nego događaja A i B. Uočimo da je $C|A$ oznaka događaja da je u drugom bacanju ishod paran broj ako je u prvom bacanju ishod broj 2. Razumljivo, vjerojatnost da će u drugom bacanju pasti parni broj uvijek je jednaka $\frac{1}{2}$, bez obzira na to koji je ishod prvog bacanja. To znači da realizacija događaja A ne utječe na vjerojatnost događaja C.

Općenito, kaže se da su **događaji A_1 i A_2 međusobno nezavisni** ako je $P(A_1|A_2)=P(A_1)$, što znači da **realizacija jednog događaja nema utjecaja na vjerojatnost drugog**.

Iz multiplikacijskog teorema proizlazi da je za međusobno nezavisne događaje

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2). \qquad (*)$$

Kako vrijedi i obratno, tj. iz $P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$ slijedi $P(A_1|A_2) = P(A_1)$, može se kao definicija nezavisnosti dvaju događaja uzeti i relacija (*).

Primjer 1.5. U pošiljci od 120 proizvoda 10 je neispravnih. Kupci kupuju jedan po jedan proizvod izabran nasumce. Odredimo vjerojatnost:

a) da će drugi kupac kupiti neispravan, ako je prvi također kupio neispravan proizvod

b) da će se prvo prodati neispravan, a zatim ispravan proizvod

c) da će se prvo prodati dva ispravna, a zatim jedan neispravan proizvod.

Rješenje: Da bismo odgovorili na sva tri pitanja, uvest ćemo ovakve oznake događaja:

N_i – "i-ti kupac kupi neispravan proizvod"

I_i – "i-ti kupac kupi ispravan proizvod".

a) Događaj čija se vjerojatnost traži sada je označen sa $N_2|N_1$. Vjerojatnost tog događaja može se odrediti jednostavnim "prebrojavanjem" proizvoda koji su preostali na izbor drugom kupcu. Uvjet je N_1, tj. da je prvi kupac kupio neispravan proizvod pa je među preostalih 119 proizvoda još 9 neispravnih. Dakle,

$$P(N_2|N_1) = \frac{9}{119}.$$

b) Oznaka za taj događaj je $N_1 \cdot I_2$ (treba se dogoditi da prvi kupac kupi neispravan i da drugi kupi ispravan proizvod). Prema relaciji za vjerojatnost produkta lako se odredi:

$$P(N_1 \cdot I_2) = P(N_1) \cdot P(I_2|N_1) = \frac{10}{120} \cdot \frac{110}{119}.$$

c) Ovo je događaj $I_1 \cdot I_2 \cdot N_3$ čija se vjerojatnost može odrediti na isti način, tj. množenjem vjerojatnosti prvog s uvjetnim vjerojatnostima drugih dvaju događaja uz odgovarajuće uvjete:

$$P(I_1 \cdot I_2 \cdot N_3) = \frac{110}{120} \cdot \frac{109}{119} \cdot \frac{10}{118}.$$

www.element.hr

Iako je jasno kako se odredila ta vjerojatnost, treba napomenuti da je zapravo riječ o proširenju relacije za vjerojatnost produkta dvaju događaja na tri događaja koja se lako izvede:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) &= P((A_1 \cdot A_2) \cdot A_3) = P(A_1 \cdot A_2) \cdot P(A_3|(A_1 \cdot A_2)) \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|(A_1 \cdot A_2)). \end{aligned}$$

1.4. Formula potpune vjerojatnosti i Bayesova formula

Neka je zadan skup elementarnih događaja Ω i n događaja (njegovih podskupova) $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $A_i \neq \emptyset$ $i = 1, 2, \ldots, n$. Kaže se da skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ čine **potpun skup događaja** ako njihova unija čini skup Ω, a usto su svaka dva skupa međusobno disjunktna. Smisao ovih uvjeta je da se pri obavljenom pokusu realizira bar jedan od njih, a svaka dva međusobno se isključuju. Dakle, dva uvjeta koja zadovoljava potpun skup događaja su:

1° $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$.

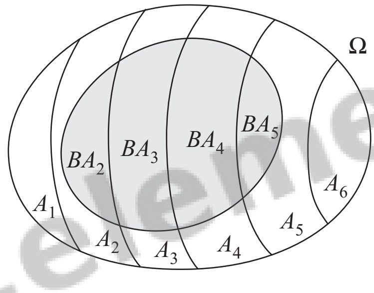
2° $A_i \cdot A_j = \emptyset$, za svaki $i \neq j$.

Iz ovih uvjeta i adicijskog teorema proizlazi da za potpun skup događaja vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(\Omega) = 1.$$

Neka je zadan i neki događaj $B \subset \Omega$ (sl. 2). Taj se događaj realizira "zajedno" s bar jednim od događaja A_i, tj. kao $B \cdot A_i$ za bar jedan i. Budući da je $B \cdot A_i \subset B$, kaže se da je B **posljedica** nekog od mogućih uzroka (događaja) $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dakle, može se pisati:

$$B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B + \ldots + A_n \cdot B.$$



Slika 2.

www.element.hr

Budući da se i događaji $A_i \cdot B$ za $i = 1, \ldots, n$ međusobno isključuju, slijedi:

$$P(B) = P(A_1 \cdot B) + P(A_2 \cdot B) + \ldots + P(A_n \cdot B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cdot B).$$

Prema multiplikacijskom teoremu $P(A_i \cdot B) = P(A_i) \cdot P(B|A_i)$, pa za vjerojatnost događaja B vrijedi tzv. **formula potpune vjerojatnosti** :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i).$$

Primjer 1.6. U situaciji opisanoj u primjeru 1.5 izračunajmo vjerojatnost da će drugi kupac kupiti neispravan proizvod.

Rješenje: Traži se $P(N_2)$. Treba uzeti u obzir da izbor drugog neispravnog proizvoda može nastupiti kao posljedica jednog od dva događaja: I_1 "prvi kupac je kupio ispravan proizvod" ili N_1 "prvi kupac je kupio neispravan proizvod". Očito je da ta dva događaja čine potpun skup događaja (međusobno se isključuju i sigurno se realizira jedan od njih), a jednostavno je i provjeriti da je

$$P(I_1) + P(N_1) = \frac{110}{120} + \frac{10}{120} = 1.$$

Uvjetne vjerojatnosti lako je odrediti, pa je prema formuli potpune vjerojatnosti

$$P(N_2) = P(I_1) \cdot P(N_2|I_1) + P(N_1) \cdot P(N_2|N_1) = \frac{110}{120} \cdot \frac{10}{119} + \frac{10}{120} \cdot \frac{9}{119}.$$

Kao što je navedeno, događaj B posljedica je nekog od događaja $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Pretpostavimo li da se dogodio događaj B, može se postaviti pitanje kolika je vjerojatnost da se dogodio i događaj A_i, tj. da je B posljedica upravo događaja A_i. To znači da treba odrediti $P(A_i|B)$, što omogućuje već izvedena formula za uvjetnu vjerojatnost i primjena multiplikacijskog teorema:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)}.$$

Uvrštavanjem formule potpune vjerojatnosti za $P(B)$ dobije se **Bayesova formula**:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}.$$

Primjer 1.7. Od studenata upisanih u prvu godinu studija, 50% je upisano na studij rudarstva, 34% na studij geologije, a ostali su upisani na studij naftnog rudarstva. Drugu godinu studija redovno upiše 30% studenata rudarstva, 60% studenata geologije i 70% studenata naftnog rudarstva.

www.element.hr