1. Vjerojatnost

Temeljni pojmovi koje želimo opisati u ovom poglavlju su **algebra događaja** i **vjerojatnost**.

Najjednostavnije je pojam događaja dovesti u vezu s **stohastičkim pokusom**. Tako nazivamo svaki pokus čiji ishod nije unaprijed određen. Taj ishod ovisi o nekim nepredvidivim okolnostima i stoga je slučajan. Novčić bačen uvis pada na jednu od svoje dvije strane, na koju — unaprijed ne možemo znati. Vrijeme ispravnog rada nekog uređaja ne može se unaprijed predvidjeti.

Ishod pokusa zovemo **elementarni događaj**. Njih u nekom pokusu može biti konačno, ali i beskonačno mnogo. Kocka će pasti na jednu od šest svojih strana, a biranje na sreću jedne točke unutar, recimo, jediničnog kruga ima kao mogući ishod beskonačno mnogo elementarnih događaja.

Pri svakom se pokusu mogu ostvariti ili ne različiti događaji. Kocka može, na primjer, pasti na paran ili na neparan broj. Hoće li se dogoditi neki događaj možemo predvidjeti pridružujući mu određenu *vjerojatnost*. Što je događaj izvjesniji, njegova će vjerojatnost biti bliža jedinici. Malo vjerojatni događaji imat će vjerojatnost blisku nuli.

Račun s događajima i vjerojatnostima mora se pokoravati izvjesnim zakonima koje ćemo upoznati u ovom poglavlju.

1.1. Algebra događaja

Elementarne ćemo događaje označavati s ω. Skup svih elementarnih događaja označavamo s Ω. Skup Ω i sam je događaj, on se ostvaruje pri svakom ishodu pokusa. Nazivamo ga stoga **sigurni događaj**. Njegova je suprotnost **nemoguć događaj**, koji se pri realizaciji pokusa nikad ne može ostvariti. Označavamo ga simbolom $\emptyset$. Različite događaje vezane uz neki pokus označavat ćemo velikim slovima latinične abecede: A, B, $C \ldots$. Oni se sastoje od izvjesnog broja elementarnih događaja. To su dakle podskupovi od Ω.

Primjer 1.1. Bacamo jednu kocku kojoj su strane označene brojevima od 1 do 6. Odredimo elementarne događaje i skup Ω.

▷ Elementarni su događaji brojevi na koje kocka može pasti:

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 2, \ldots, \quad \omega_6 = 6.$$

Skup svih elementarnih događaja je

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

U pokusu koji ima samo konačno mnogo ishoda događaj je bilo koji podskup od Ω. Evo nekoliko događaja vezanih uz ovaj pokus:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{pao je parni broj}\} = \{2, 4, 6\}, \\ B &= \{\text{pao je broj veći od } 2\} = \{3, 4, 5, 6\}, \\ C &= \{\text{pao je parni broj manji od } 5\} = \{2, 4\} \end{aligned}$$

i slično. Različitih događaja postoji $2^6 = 64$, jer toliko skup Ω ima podskupova. Među njima su nemoguć dogadaja $\emptyset$, 6 jednočlanih (elementarnih) događaja, 15 događaja od po dva elemenentarna, 20 događaja s tri elementarna itd. ◁

Primjer 1.2. Novčić je bačen tri puta. U svakom bacanju bilježimo je li se pojavilo pismo (P) ili glava (G). Odredimo Ω, elementarne događaje te nekoliko događaja vezanih uz ovaj pokus.

▷ Elementarnih događaja ima osam. To su

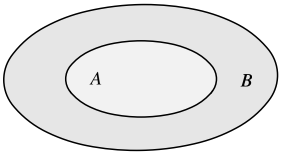
$$\begin{aligned} &\omega_1 = \text{GGG}, \quad &\omega_2 = \text{GGP}, \quad &\omega_3 = \text{GPG}, \quad &\omega_4 = \text{PGG}, \\ &\omega_5 = \text{GPP}, \quad &\omega_6 = \text{PGP}, \quad &\omega_7 = \text{PPG}, \quad &\omega_8 = \text{PPP}, \end{aligned}$$

(poredak nabrajanja nije važan). Ovdje smo, kratkoće radi, s GGP označili uređenu trojku $(\text{G}, \text{G}, \text{P})$ i slično za ostale elementarne događaje. Siguran događaj sastoji se od gornjih osam elementarnih. Evo nekoliko događaja vezanih uz ovaj pokus (ukupan broj događaja je $2^8 = 256$):

$$\begin{aligned} A &= \{\text{pismo se pojavilo jednom}\} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \\ B &= \{\text{pismo se pojavilo u drugom bacanju}\} = \{\omega_3, \omega_5, \omega_7, \omega_8\}, \\ C &= \{\text{pojavilo se barem jedno pismo i barem} \\ &\qquad \text{jedna glava}\} = \{\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_7\}, \\ D &= \{\text{pismo se pojavilo dvaput za redom}\} = \{\omega_5, \omega_7, \omega_8\}. \ ◁ \end{aligned}$$

Uspoređivanje događaja

Kažemo da događaj A **povlači** događaj B ako iz realizacije događaja A slijedi realizacija događaja B. To znači da B sadrži sve elementarne događaje koji ulaze u događaj A. Pišemo $A \subset B$, u skladu s zapisom iz teorije skupova. Koristimo također i zapis $A \implies B$. Govorimo još: A je specijalni slučaj događaja B, B slijedi iz A, A je sadržan u B, A je dovoljan uvjet za B, B je nuždan uvjet za A.



Sl. 1.1. Događaj A povlači događaj B

Primjer 1.3. Bacamo dvije kocke. Označimo događaje

$$A = \{\text{oba broja veća su od } 4\},$$
$$B = \{\text{zbroj brojeva na kockama veći je od } 8\}.$$

$\triangleright$ Vrijedi $A \implies B$, jer je zbroj brojeva koji su veći od 4 sigurno veći od 8. Obrat nije ispunjen, jer zbroj brojeva može biti veći od 8 i kad jedna kocka padne na, recimo, 3, a druga na 6. Tad se ostvario B, ali se nije ostvario A. $\triangleleft$

Primjer 1.4. Bacamo dvije kocke. Označimo događaje:

$$A = \{\text{zbroj brojeva na kockama veći je od } 8\},$$
$$B = \{\text{oba broja veća su od } 2\}.$$

$\triangleright$ Sad vrijedi $A \implies B$. Naime, zbroj brojeva ne može biti veći od 8 ako oba broja nisu veća od 2, jer inače najveći zbroj iznosi $2 + 6 = 8$. Vezu ovih događaja možemo izraziti još ovako:

• Da bi zbroj brojeva bio veći od 8, oba broja nužno moraju biti veća od 2 (B je nuždan uvjet za A).

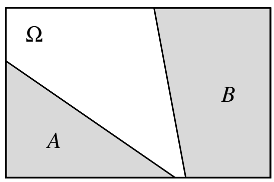
• Želimo li da oba broja na kocki budu veća od 2, dovoljno je da njihov zbroj bude veći od 8 (A je dovoljan uvjet za B). $\triangleleft$

* * *

Ukoliko vrijedi $A \subset B$ i $B \subset A$, onda kažemo da su A i B **ekvivalentni** ili **jednaki** i pišemo $A = B$. Ekvivalentni događaji sastoje se od istih elementarnih događaja.

Suprotnost ovoj situaciji je ona u kojoj A i B nemaju zajedničkih elementarnih događaja.

Događaji A i B su **disjunktni**, ako se istovremeno ne mogu ostvariti i jedan i drugi[1]. Kažemo još da se A i B **međusobno isključuju**. Tako na primjer, pri bacanju kocke su događaji $A = \{\text{pao je paran broj}\}$ i $B = \{\text{pao je broj } 3\}$ disjunktni.



Sl. 1.2. Disjunktni događaji

[1] Nije nužno da se ostvari neki od ova dva događaja, moguće je dakle da se ne ostvari niti jedan od njih

Primjer 1.5. Novčić bacamo četiri puta. Istaknimo sljedeće događaje:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{pojavila su se točno tri pisma}\}, \\ B &= \{\text{pojavile su se najviše dvije glave}\}, \\ C &= \{\text{pojavila se točno jedna glava}\}, \\ D &= \{\text{ostvario se niz PGGP}\}. \end{aligned}$$

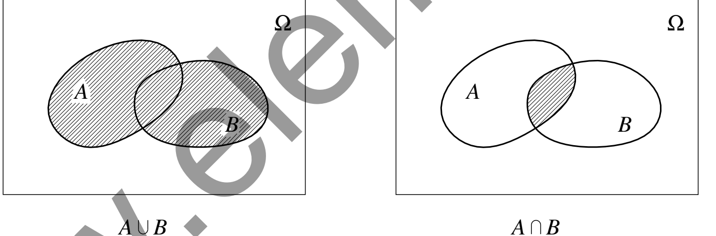
koji od ovih događaja povlače neki drugi, koji su ekvivalentni, a koji se međusobno isključuju?

Operacije s događajima

Neka su A, B događaji. Pomoću njih možemo načiniti nove događaje:

Unija i presjek događaja

Događaj koji se ostvaruje ako se ostvario *barem jedan* od događaja A, B naziva se **unija** ili **zbroj** (**suma**) događaja i označava s $A \cup B$, $A + B$, A ili B.
Događaj koji se ostvaruje ako su se ostvarila *oba* događaja A i B naziva se **presjek** ili **umnožak** (**produkt**) događaja i označava s $A \cap B$, AB, A i B.



$A \cup B$ $A \cap B$

Sl. 1.3. Unija i presjek dvaju događaja

Primjer 1.6. Bacamo jednu kocku. Istaknimo događaje

$$\begin{aligned} A &= \{\text{pao je parni broj}\}, \\ B &= \{\text{pao je broj veći od } 2\}. \end{aligned}$$

Onda je

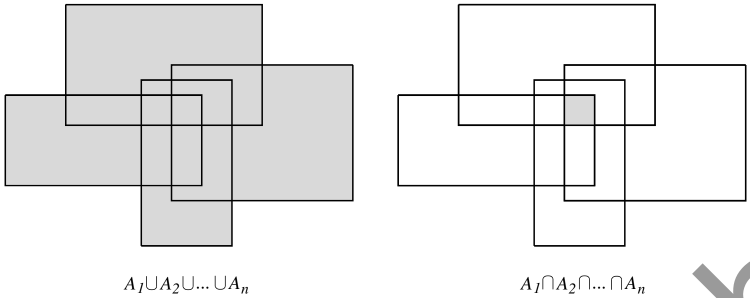
$$\begin{aligned} A \cup B &= \{\text{pao je parni broj ili broj veći od } 2\} \\ &= \{\text{pao je broj veći od } 1\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}, \\ A \cap B &= \{\text{pao je parni broj veći od } 2\} = \{4, 6\}. \end{aligned}$$

* * *

Operacije unije i presjeka mogu se definirati i za nekoliko događaja. Unija n događaja je događaj

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

koji se ostvaruje ako se ostvario barem jedan od događaja $A_1, \ldots A_n$.



Sl. 1.4. Unija (lijevo) i presjek (desno) više događaja

Presjek n događaja je događaj

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

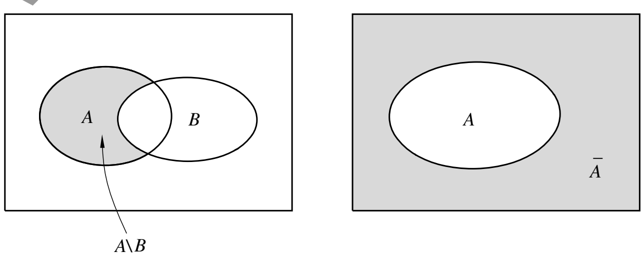
koji se ostvario ako se ostvario svaki od događaja $A_1, \ldots, A_n$.

$* * *$

Razlika događaja. Komplement događaja

Događaj koji se ostvaruje ako se ostvari događaj A, a da se ne ostvari događaj B, nazivamo **razlika događaja** A i B i označavamo s $A \setminus B$, $A - B$. Događaj $\Omega \setminus A$ nazivamo **komplementom** ili **suprotnim događajem** događaja A. On se ostvaruje ako i samo ako se A nije ostvario. Označavamo ga s $\overline{A}$ ili s A^c.

Sl. 1.5. Razlika dvaju događaja (lijevo) i komplement događaja (desno)



Uvjerite se da vrijedi $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, $\overline{\overline{A}} = A$.

$* * *$

Primjer 1.7. Što se može zaključiti o događajima A, B, C za koje vrijedi

1. $ABC = A$; **2.** $A + B = A$; **3.** $A + B + C = A$;
4. $A + B = \overline{A}$; **5.** $A + B = AB$; **6.** $AB = \overline{A}$?

▷ (Skiciraj gornje situacije Euler–Vennovim dijagramima).
1. $A \subseteq B$ i $A \subseteq C$ **2.** $B \subseteq A$
3. $B \subseteq A$ i $C \subseteq A$ **4.** $A = \emptyset$, $B = \Omega$
5. $A = B$ **6.** $A = \Omega$, $B = \emptyset$.

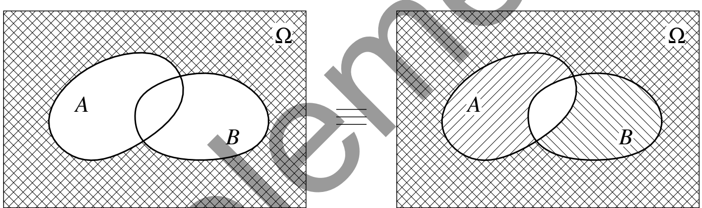
De Morganovi zakoni

Veza između operacija komplementiranja, unije i presjeka iskazana je u sljedećim formulama:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \tag{1.1}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{1.2}$$

Te formule nazivamo **de Morganovi zakoni**.



$\overline{A \cup B}$ $\bar{A} \cap \bar{B}$

Sl. 1.6. De Morganovi zakoni

Dokažimo (1.1):

$$\omega \in \overline{A \cup B} \iff \omega \notin A \cup B \iff \omega \notin A \text{ i } \omega \notin B$$
$$\iff \omega \in \overline{A} \text{ i } \omega \in \overline{B} \iff \omega \in \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Drugu formulu možemo pokazati na sličan način. Međutim, korisno je vidjeti da ona slijedi iz prve formule. Naime, kako za svaki događaj vrijedi $\overline{\overline{A}} = A$, možemo računati ovako

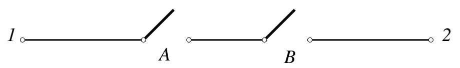
$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \text{ po (1.1) } = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B$$

te je

$$\overline{A \cap B} = \overline{\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Primjer 1.8. De Morganove zakone možemo ilustrirati koristeći se jednostavnim modelima serijskog i paralelnog spoja.

1. Serijski spoj. Neka u serijskom spoju dviju sklopki događaj A označava da je prva sklopka isključena, a događaj B da je isključena druga sklopka.



Veza između točaka 1 i 2 neće postojati ako se ostvari barem jedan od događaja A ili B:

$$\{\text{ne postoji veza}\} = A \cup B.$$

Veza između tih točaka postojat će ako se nije ostvario niti događaj A, niti događaj B (nema prekida niti na jednoj sklopki):

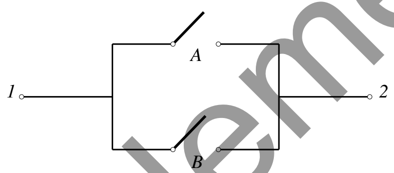
$$\{\text{postoji veza}\} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Ova su dva događaja komplementarna. Zato vrijedi

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Dobili smo prvu de Morganovu formulu.

2. Paralelni spoj. Neka su dvije sklopke spojene u paralelnom spoju:



Onda vrijedi:

$$\{\text{ne postoji veza}\} = A \cap B,$$
$$\{\text{postoji veza}\} = \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}. \quad \triangleleft$$

* * *

De Morganovi zakoni poopćavaju se na uniju i presjek n događaja:

$$\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_n,$$
$$\overline{A_1 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A}_1 \cup \cdots \cup \overline{A}_n.$$

Ilustrirajte ove formule pomoću serijskog i paralelnog spoja n sklopki.

Algebra događaja

Dosadašnji pristup događajima i operacijama zasnivao se na intuiciji. Tako smo, na primjer, prešutno podrazumjevali da su presjek i unija dvaju događaja ponovo događaji. U strogo definiranoj matematičkoj teoriji ovi pojmovi moraju biti vrlo precizno definirani. To je nužno da bi se izbjegli mogući paradoksi unutar same teorije. Tako na primjer, potpuno je jasno da su događaji podskupovi skupa Ω. Međutim, obratna tvrdnja: svaki podskup od Ω je događaj, nije uvijek istinita! Općenito, postojat će situacije kad događaji neće biti svi podskupovi od Ω.

Da izbjegnemo moguće paradokse, događaje ćemo definirati kao elemente algebre događaja:

Algebra događaja

Algebra događaja je svaka familija $\mathscr{F}$ podskupova od Ω na kojoj su definirane **binarna operacija zbrajanja** $+ : \mathscr{F} \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ i **unarna operacija komplementiranja** sa svojstvima

1) $\Omega \in \mathscr{F}$, $\emptyset \in \mathscr{F}$,
2) $A \in \mathscr{F} \implies \overline{A} \in \mathscr{F}$,
3) $A, B \in \mathscr{F} \implies A + B \in \mathscr{F}$.

Elemente algebre $\mathscr{F}$ zovemo **događaji**.

Primijetimo da je bilo dovoljno zahtijevati samo $\Omega \in \mathscr{F}$, jer je $\emptyset = \overline{\Omega}$ pa prema svojstvu **2)** on također pripada algebri $\mathscr{F}$.

Što je s umnoškom događaja? Ako su A i B događaji, onda $\overline{A}$ i $\overline{B}$ pripadaju algebri $\mathscr{F}$, pa toj algebri pripada i njihov zbroj $\overline{A} + \overline{B}$. Konačno je

$$A \cdot B = \overline{\overline{A} + \overline{B}} \in \mathscr{F}.$$

Dakle, umnožak događaja ponovo je događaj.

Isto vrijedi i za **razliku** dvaju događaja, jer za $A, B \in \mathscr{F}$ vrijedi

$$A \setminus B = A \cdot \overline{B} \in \mathscr{F}.$$

Booleova algebra

U mnogim se primjenama koristi struktura sastavljena od familije $\mathscr{F}$ dvije binarne operacije $+$ i $\cdot$, unarne operacije komplementiranja koja zadovoljava sljedećih devet svojstava:

1)	$A + B = B + A$	$A \cdot B = B \cdot A$
2)	$(A + B) + C = A + (B + C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
3)	$\emptyset + A = A$	$\Omega \cdot A = A$
4)	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$
5)	$(\forall A \in \mathscr{F})(\exists \overline{A} \in \mathscr{F})\ A + \overline{A} = \Omega,\ A \cdot \overline{A} = \emptyset,$	

gdje su Ω i $\emptyset$ dva istaknuta elementa. Takvu familiju nazivamo **Booleova algebra**.

Operacije $+$ i $\cdot$ mogu biti definirane na različite načine. Ako su to operacije unije i presjeka, a elementi od $\mathscr{F}$ podskupovi, zaključujemo da je algebra događaja primjer Booleove algebre.

Primjer 1.9. Pokaži da u svakoj Booleovoj algebri vrijede relacije

1. $A + AB = A$,
2. $\overline{\overline{A}\,\overline{B}} = A + B$,
3. $(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B}) = \emptyset$,
4. $A + AB + BC + \overline{A}C = A + C$,
5. $\overline{A}B + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B} = \overline{AB}$.

$\triangleright$

1. $A + AB = A$ jer je $AB \subseteq A$, ili
$A + AB = AA + AB = A(A + B) = A$, jer je $A \subseteq A + B$, ili
$A + AB = (A + A)(A + B) = A(A + B) = A$.

2. Komplementiranjem relacije $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

3. $(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B}) = (A\overline{A}+B)(A\overline{A}+\overline{B}) = B\overline{B} = \emptyset$.

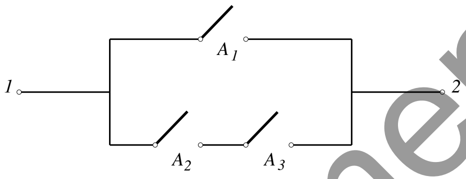
4. $A+AB+BC+\overline{A}C = A+BC+\overline{A}C+AC = A+BC+(\overline{A}+A)C = A+BC+C = A+C$.

5. $\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B} = \overline{A}B+\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B} = \overline{A}(B+\overline{B})+(A+\overline{A})\overline{B} = \overline{A}+\overline{B} = \overline{AB}$. ◁

Primjer 1.10. Uređaj je prikazan shemom na slici. Neka događaj A_i označava prekid na dijelu i, $i = 1, 2, 3$. Odredi izraz za događaj

$$A = \{\text{uređaj je prestao s radom}\},$$

kao i za događaj $\overline{A}$.



Sl. 1.7.

▷ Uređaj prestaje s radom ako se ostvari događaj A_1 i barem jedan od događaja A_2, A_3. Dakle,

$$A = A_1(A_2 + A_3)$$

i po de Morganovim formulama

$$\overline{A} = \overline{A_1(A_2+A_3)} = \overline{A}_1 + \overline{A_2+A_3} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3. \quad ◁$$

1.2. Vjerojatnost

Vjerojatnost

Vjerojatnost je preslikavanje $\boldsymbol{P} : \mathscr{F} \to [0,1]$ definirano na algebri događaja $\mathscr{F}$, koje ima svojstva

1) $\boldsymbol{P}(\Omega) = 1$, $\boldsymbol{P}(\emptyset) = 0$ (**normiranost**),

2) ako je $A \subset B$, onda vrijedi $\boldsymbol{P}(A) \leqslant \boldsymbol{P}(B)$ (**monotonost**),

3) ako su A i B disjunktni događaji, onda je $\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B)$ (**aditivnost**).

Broj $\boldsymbol{P}(A)$ nazivamo **vjerojatnost događaja** A.

Svojstva vjerojatnosti

Izvedimo neka dodatna svojstva vjerojatnosti.

Neka je A po volji odabran događaj, a $\overline{A}$ njegov komplement. Onda vrijedi $A \cup \overline{A} = \Omega$ i pritom su A i $\overline{A}$ disjunktni. Zato, po svojstvima normiranosti i aditivnosti vrijedi

$$1 = \boldsymbol{P}(\Omega) = \boldsymbol{P}(A \cup \overline{A}) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(\overline{A}),$$

te je $\boldsymbol{P}(\overline{A}) = 1 - \boldsymbol{P}(A)$. Time smo pokazali:

Vjerojatnost komplementa

Za svaki događaj A vrijedi $\boldsymbol{P}(\overline{A}) = 1 - \boldsymbol{P}(A)$.

* * *

Pokažimo sad kako se računa vjerojatnost unije u slučaju kad A i B nisu disjunktni. Presjek dvaju događaja ovdje ćemo pisati kao umnožak, dakle bez znaka $\cap$.

Vjerojatnost unije

Za bilo koja dva događaja A i B vrijedi

$$\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(AB).$$

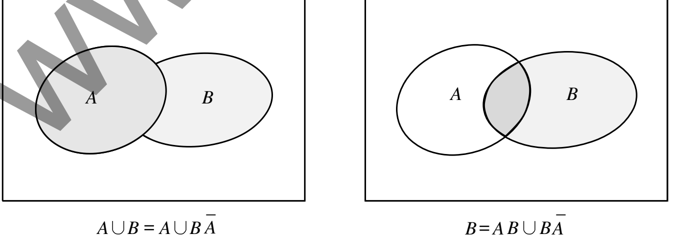
Da dokažemo ovo svojstvo, događaj $A \cup B$ prikazat ćemo kao uniju dvaju disjunktnih događaja:

$$A \cup B = A \cup (B\overline{A})$$

(vidi sliku 1.8). Slično tome, B možemo rastaviti ovako

$$B = AB \cup B\overline{A}$$

i ponovo su događaji s desna disjunktni.



$A \cup B = A \cup B\overline{A}$ $\qquad$ $B = AB \cup B\overline{A}$

Sl. 1.8. Skup $A \cup B$ može se rastaviti na uniju disjunktnih skupova (lijevo). Slično vrijedi i za skup B (desno)

Po svojstvu aditivnosti vjerojatnosti slijedi:

$$\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B\overline{A}),$$
$$\boldsymbol{P}(B) = \boldsymbol{P}(AB) + \boldsymbol{P}(B\overline{A}).$$

Oduzimanjem dobivamo traženu formulu:

$$\boldsymbol{P}(A \cup B) - \boldsymbol{P}(B) = \boldsymbol{P}(A) - \boldsymbol{P}(AB).$$

Primjer 1.11. Neka su A i B događaji, $\boldsymbol{P}(A) = 0.4$, $\boldsymbol{P}(B) = 0.5$, $\boldsymbol{P}(AB) = 0.2$. Izračunaj $\boldsymbol{P}(A+B)$, $\boldsymbol{P}(\overline{A})$, $\boldsymbol{P}(\overline{B})$, $\boldsymbol{P}(\overline{A}\,\overline{B})$, $\boldsymbol{P}(\overline{A}+\overline{B})$, $\boldsymbol{P}(A\overline{B})$, $\boldsymbol{P}(\overline{A}B)$.

▷

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}(A+B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(AB) = 0.7\\
&\boldsymbol{P}(\overline{A}) = 1 - \boldsymbol{P}(A) = 0.6\\
&\boldsymbol{P}(\overline{B}) = 1 - \boldsymbol{P}(B) = 0.5\\
&\boldsymbol{P}(\overline{A}\,\overline{B}) = \boldsymbol{P}(\overline{A+B}) = 1 - \boldsymbol{P}(A+B) = 0.3\\
&\boldsymbol{P}(\overline{A}+\overline{B}) = \boldsymbol{P}(\overline{AB}) = 1 - \boldsymbol{P}(AB) = 0.8\\
&\boldsymbol{P}(A\overline{B}) = \boldsymbol{P}(A) - \boldsymbol{P}(AB) = 0.2\\
&\boldsymbol{P}(\overline{A}B) = \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(AB) = 0.3. \quad \triangleleft
\end{aligned}$$

Konačni vjerojatnosni prostor

Vjerojatnosni prostor Ω, koji posjeduje samo konačno mnogo elementarnih događaja nazivamo **konačni vjerojatnosni prostor**. Označimo njegove elemente, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$. Događaj u ovakvu prostoru je *svaki* podskup od Ω. Vjerojatnost bilo kojeg događaja moći ćemo odrediti ako znamo vjerojatnosti elementarnih događaja, tj. ako poznajemo brojeve

$$\begin{aligned}
p_1 &= \boldsymbol{P}(\{\omega_1\}),\\
&\ \vdots\\
p_N &= \boldsymbol{P}(\{\omega_N\}).
\end{aligned}$$

Ovi brojevi imaju svojstvo

$$p_1 > 0, \ldots, p_N > 0, \quad p_1 + \ldots + p_N = 1.$$

Zaista, kako je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$, a elementarni događaji su međusobno disjunktni, to je $1 = \boldsymbol{P}(\Omega) = \boldsymbol{P}(\{\omega_1\}) + \ldots + \boldsymbol{P}(\{\omega_N\})$.

Neka je $A \in \mathscr{F}$ bilo koji događaj. On se sastoji od nekoliko elementarnih događaja:

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_M}\}.$$

Vjerojatnost događaja A računamo tako da zbrojimo vjerojatnosti tih elementarnih događaja

$$\boldsymbol{P}(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_M}.$$