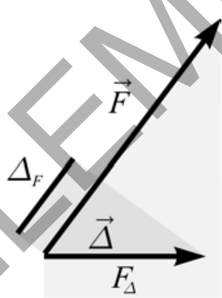
1. Opći teoremi i energijske metode

1.1. Rad sile

Rad sile jednak je skalarnom produktu sile i pomaka hvatišta sile:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta} = F\Delta\cos\left(\vec{F},\vec{\Delta}\right). \tag{1.1}$$



Sl. 1.1

Prema tome, rad sile jednak je produktu iznosa sile i projekcije pomaka na pravac djelovanja sile *(sl. 1.1)*:

$$W = F\Delta_F\,, \quad \Delta_F = \Delta\cos\left(\vec{F},\vec{\Delta}\right) \tag{1.2}$$

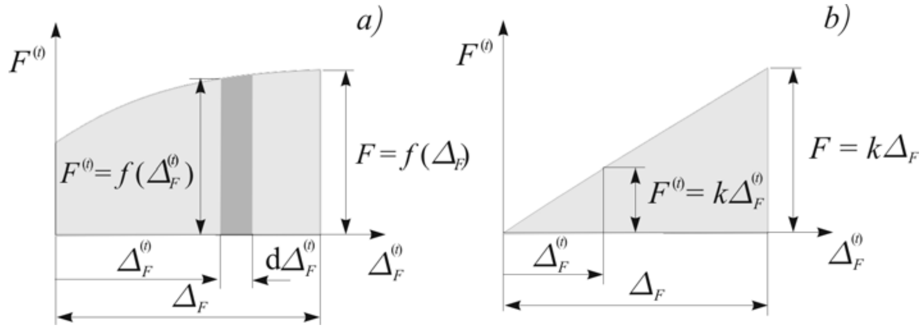
Ili: rad sile jednak je produktu iznosa pomaka i projekcije sile na pravac pomaka:

$$W = \Delta F_\Delta\,, \quad F_\Delta = F\cos\left(\vec{\Delta},\vec{F}\right). \tag{1.3}$$

Rad sile može biti pozitivan, negativan ili jednak nuli. Ako je kut između pravca djelovanja sile i pomaka oštar, rad je pozitivan; ako je kut tup, rad je negativan, a ako je kut pravi, rad je jednak nuli.

Sila se može mijenjati tijekom vremena, pa se može prikazati kao funkcija pripadajućeg pomaka, u vremenu:

$$F^{(t)} = f(\Delta_F^{(t)}). \tag{1.4}$$



Sl. 1.2

U tom je slučaju diferencijal rada *(sl. 1.2a)*

$$\mathrm{d}W = F^{(t)}\mathrm{d}\Delta_F^{(t)} . \tag{1.5}$$

Rad je određen integralom

$$W = \int_0^{\Delta_F} F^{(t)}\mathrm{d}\Delta_F^{(t)} , \tag{1.6}$$

tj. ploštinom omeđenom krivuljom $F^{(t)}$.

Ako postoji linearna ovisnost između sile i pomaka *(sl. 1.2b)*,

$$F^{(t)} = k\Delta_F^{(t)}, \quad k = \text{konst.},$$

bit će

$$W = k\int_0^{\Delta_F} \Delta_F^{(t)}\mathrm{d}\Delta_F^{(t)} = k\frac{\Delta_F^2}{2},$$

tj.

$$W = \frac{1}{2}F\Delta_F ; \quad W = \frac{1}{2}\Delta F_\Delta . \tag{1.7}$$

1.2. Poopćena sila i poopćeni pomak

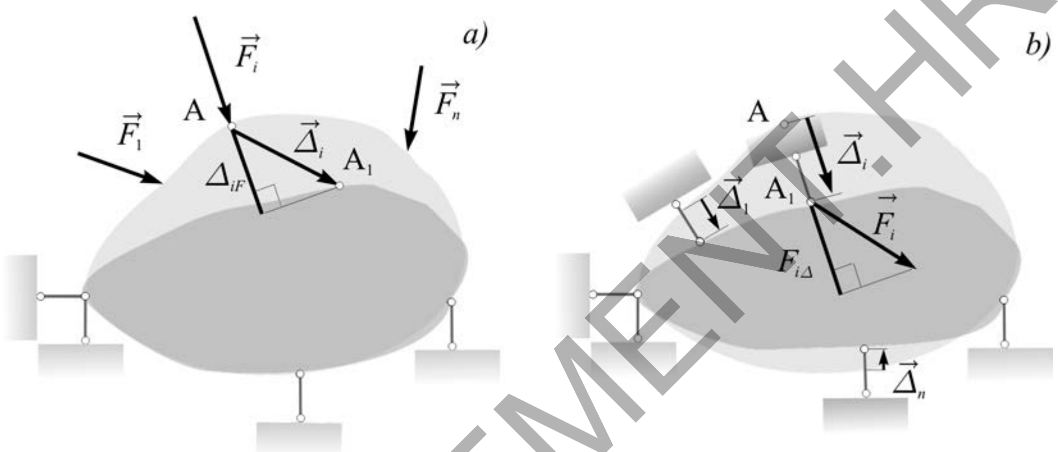
Imajući na umu definiciju rada kao skalarnog produkta dvaju vektora, može se uvesti pojam poopćene sile i poopćenog pomaka.

Neka je zadano deformabilno tijelo u stanju ravnoteže na koje djeluje sustav sila $\vec{F}_i$, $i = 1,2,...,n$ *(sl. 1.3a)*. Tijelo će se deformirati, točka A prelazi u A_1, tj. dobiva pomak $\vec{\Delta}_i$, pri čemu je Δ_{iF} projekcija toga pomaka na pravac djelovanja sile.

Imajući na umu definiciju rada (1.2), pod poopćenom silom Q_i razumijeva se iznos sile $\vec{F}_i$, $Q_i = F_i$, a pod poopćenim pomakom q_i projekcija pomaka $\vec{\Delta}_i$ na pravac sile, $q_i = \Delta_{iF}$. Poopćeni pomak q_i naziva se *pripadnim poopćenim pomakom* poopćene sile Q_i. Pozitivan je ako je kao vektor usmjeren u smjeru poopćene sile Q_i kao vektora, u suprotnom je negativan.

Neka je, pak, zadano deformabilno tijelo u stanju ravnoteže koje vezano s *n* veza koje dobivaju pomake $\vec{\Delta}_i$, $i = 1,2,...,n$ *(sl. 1.3b)*. Pri pomaku *i*-te veze, točka A pomiče se u točku A_1. Pri tome se javlja reakcija veze $\vec{F}_i$ zbog pomaka veze $\vec{\Delta}_i$, gdje je $F_{i\Delta}$ projekcija sile (reakcije) na pravac pomaka.

Imajući na umu definiciju rada (1.3), pod poopćenim pomakom q_i razumijeva se iznos pomaka $\vec{\Delta}_i$, $q_i = \Delta_i$. Pod poopćenom silom (reakcijom) Q_i razumijeva se projekcija sile (reakcije) $\vec{F}_i$ na pravac pomaka, $Q_i = F_{i\Delta}$. Poopćena sila Q_i *pripadna je poopćena sila* poopćenog pomaka q_i. Pozitivna je ako je kao vektor usmjerena u smjeru poopćenog pomaka q_i kao vektora, u suprotnom je negativna.



Sl. 1.3

Poopćena sila može biti također sprega sila momenta $\vec{M}$. U tom slučaju poopćeni pomak jest kutni pomak. Poopćena sila može biti i raspodijeljena sila te raspodijeljeni moment.

Na primjer, za jednoliko raspodijeljenu silu $\vec{q}_z$ duž osi *x* ravnog štapa, duljine *L*, rad glasi

$$W = \int_0^L q_z w \,\mathrm{d}x = q_z A_w .$$

Prema tome, pod poopćenom silom u ovom slučaju razumijeva se iznos raspodijeljene sile $\vec{q}_z$, $Q = q_z$, a pod pripadnim poopćenim pomakom ploština koja je određena progibom štapa $w = w(x)$ i osi *x*, $q = A_w$.

1.3. Zakon o očuvanju energije

Pri statičkom djelovanju vanjskih sila na elastično tijelo pretpostavlja se da se sav rad vanjskih sila pretvara u potencijalnu energiju deformiranosti *U*:

$$W = U . \tag{1.8}$$

Drugi vidovi energije, kao na primjer toplinska energija, zanemaruju se.

1.4. Rad vanjskih sila

Pomaci nastali pri statičkom djelovanju sila mogu biti linearno ovisni o silama. Nužan uvjet da je konstrukcija *linearno-elastična* jest da je materijal od kojeg je konstrukcija izrađena linearno-elastičan, te vrijedi Hookeov zakon. Na primjer, konzola jednolikog poprečnog presjeka izrađena je od linearno-elastičnog materijala i opterećena silom $\vec{F}$ na svom kraju *(sl.1.4a)*. Pomak na mjestu djelovanja sile (za male pomake) iznosi

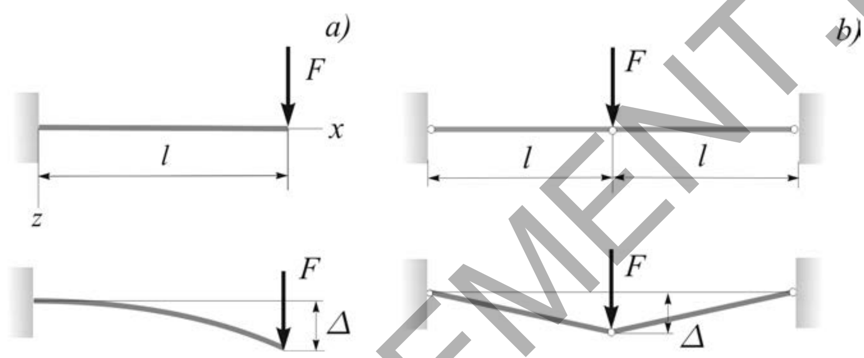
$$\Delta = \frac{l^3}{3EI} F \qquad (\Delta / l < 1/50)$$

gdje je EI krutost u odnosu na savijanje, E modul elastičnosti, I drugi moment ploštine u odnosu na glavnu težišnu os (moment tromosti ploštine) a l duljina konzole. Prema tome, može se napisati

$$F = k\Delta\,, \quad k = \frac{3EI}{l^3}\,.$$

Rad iznosi

$$W = \frac{1}{2} F \Delta = k \frac{\Delta^2}{2}\,.$$



Sl.1.4

Ovisnost pomaka o silama može biti i nelinearna. Materijal od kojeg je izrađena konstrukcija u tom slučaju je *nelinearno-elastičan*.

Materijal konstrukcije može biti linearno-elastičan, a da se konstrukcija pri opterećenju ne ponaša linearno-elastično.

Na primjer, dva zglobno vezana štapa izrađena od linearno-elastičnog materijala, vezana međusobno i za zidove zglobno, opterećena su u zglobu silom $\vec{F}$ *(sl. 1.4b)*.

Iznosi sila u štapovima određeni su izrazom

$$F_1 = F_2 = \frac{F}{2\sin\varphi} \approx \frac{F}{2\varphi}$$

gdje je φ mali kut koji nastaje pri zakretu štapova oko zglobova u zidu, pri djelovanju sile $\vec{F}$.

Budući da se za iznos pomaka na mjestu djelovanja sile može napisati

$$\Delta = l \tan\varphi \approx l\varphi\,,$$

bit će

$$F_1 \approx \frac{l}{2\Delta} F\,. \qquad \text{(a)}$$

Iznos sile u štapu određen je za linearno-elastično tijelo izrazom

$$F_1 = EA\frac{\Delta l}{l}$$

gdje je EA krutost štapa u odnosu na rastezanje, A ploština poprečnog presjeka, a Δl produljenje štapa, pri čemu je

$$\Delta l = \varDelta \sin\varphi \approx \varDelta \cdot \varphi = \frac{\varDelta^2}{l},$$

pa je

$$F_1 = EA\frac{\varDelta^2}{l^2}. \tag{b}$$

Izjednačenjem izraza (a) i (b), dobiva se

$$F = k\varDelta^3, \quad k = \frac{2EA}{l^3}.$$

Rad iznosi

$$W = \int_0^{\varDelta} F\,\mathrm{d}\varDelta = k\frac{\varDelta^4}{4}.$$

Za linearno-elastičnu konstrukciju može se rad prikazati s pomoću poopćenih sila i pomaka:

$$W = \frac{1}{2}Q_i q_i\,; \quad W = \frac{1}{2}q_i Q_i\,. \tag{1.9}$$

Za n sila i pomaka, izraz za rad može se napisati u obliku

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i q_i\,; \quad W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i Q_i \tag{1.10}$$

gdje je Q_i i-ta poopćena sila, a q_i pripadni poopćeni pomak poopćene sile Q_i. Ili: q_i i-ti poopćeni pomak, a Q_i pripadna poopćena sila poopćenog pomaka q_i; n broj sila koje djeluju na tijelo odnosno broj pomaka.

1.5. Koeficijenti podatnosti. Matrica podatnosti

Za linearno-elastično tijelo može se primijeniti *metoda superpozicije*. Ako na tijelo djeluje sustav sila $\vec{F}_i, i = 1, 2, ..., n$, može se ukupni pomak hvatišta sile $\vec{F}_i$ u smjeru te sile odrediti tako da se odrede pripadni poopćeni pomaci u smjeru te sile zbog djelovanja svake pojedinačne sile. Ukupni pripadni poopćeni pomak dobiva se zbrajanjem komponentnih pomaka.

Prema tome, pripadni poopćeni pomak poopćene sile $Q_i = F_i$ dobiva se kao zbroj projekcija:

$$q_i = q_{i1} + q_{i2} + \cdots + q_{ii} + \cdots + q_{in} \quad (i = 1, 2, ...n) \tag{1.11}$$

gdje je q_{ij} pripadni poopćeni pomak poopćene sile Q_i zbog poopćene sile Q_j. Ako je zbroj projekcija q_i pozitivan, poopćeni pomak q_i kao vektor usmjeren je u smjeru poopćene sile Q_i kao vektora.

Poopćeni pomak q_{ij} može se definirati kao

$$q_{ij} = f_{ij}Q_j \tag{1.12}$$

gdje je f_{ij} pripadni poopćeni pomak poopćene sile Q_i zbog jedinične poopćene sile Q_j, $Q_j = 1$; pripadni poopćeni pomak f_{ij} naziva se *koeficijentom podatnosti*.

Po definiciji, koeficijent podatnosti f_{ii} uvijek je pozitivan,

$$f_{ii} > 0\,, \tag{1.13}$$

dok koeficijent f_{ij} može biti pozitivan, negativan i jednak nuli.

Općenito, vrijedi:

$$\begin{aligned}
q_1 &= f_{11}Q_1 + f_{12}Q_2 + \cdots + f_{1i}Q_i + \cdots + f_{1n}Q_n\,,\\
q_2 &= f_{21}Q_1 + f_{22}Q_2 + \cdots + f_{2i}Q_i + \cdots + f_{2n}Q_n\,,\\
&\vdots\\
q_i &= f_{i1}Q_1 + f_{i2}Q_2 + \cdots + f_{ii}Q_i + \cdots + f_{in}Q_n\,,\\
&\vdots\\
q_n &= f_{n1}Q_1 + f_{n2}Q_2 + \cdots + f_{ni}Q_i + \cdots + f_{nn}Q_n\,.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Ili, u matričnom zapisu:

$$\mathbf{q} = \mathbf{fQ} \tag{1.15}$$

gdje je $\mathbf{q}$ vektor poopćenih pomaka:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \ldots & q_i & \ldots & q_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}; \tag{1.16}$$

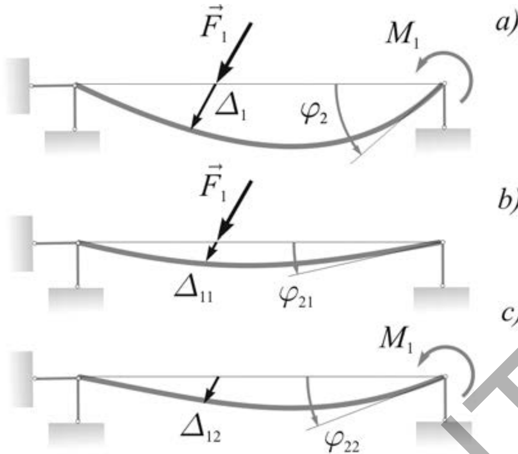
$\mathbf{f}$ matrica podatnosti:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1i} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2i} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & \cdots & & \cdots & \\ f_{i1} & f_{i2} & \cdots & f_{ii} & \cdots & f_{in} \\ \vdots & & \cdots & & \cdots & \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{ni} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}; \tag{1.17}$$

$\mathbf{Q}$ vektor poopćenih sila:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & \ldots & Q_i & \ldots & Q_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{1.18}$$

Na primjer, neka su zadana sila $\vec{F}_1$ i spreg sila momenta M_2 koji djeluju na linearno-elastičan ravninski sustav, na primjer jednostavan nosač *(sl. 1.5a)*. Neka najprije djeluje sila $\vec{F}_1$ *(sl. 1.5b)*, a zatim moment M_2 *(sl. 1.5c)*, s pripadnim pomacima $\vec{\Delta}_1$ i φ_2



Sl. 1.5

Imajući na umu princip superpozicije vrijedi:

$$q_1 = q_{11} + q_{12} = f_{11}Q_1 + f_{12}Q_2\,,$$

$$q_2 = q_{21} + q_{22} = f_{21}Q_1 + f_{22}Q_2\,,$$

gdje je $Q_1 = F_1$, $Q_2 = M_2$; $q_1 = \Delta_1$, $q_2 = \varphi_2$. $q_{11} = \Delta_{11}, q_{12} = \Delta_{12}$, $q_{22} = \varphi_{22}, q_{21} = \varphi_{21}$.

1.6. Koeficijenti krutosti. Matrica krutosti

Pripadna poopćena sila poopćenog pomaka q_i može se definirati kao zbroj projekcija:

$$Q_i = Q_{i1} + Q_{i2} + \cdots + Q_{ii} + \cdots + Q_{in} \quad (i = 1, 2, ...n) \tag{1.19}$$

gdje je Q_{ij} pripadna poopćena sila poopćenog pomaka q_i zbog poopćenog pomaka q_j; ako je zbroj projekcija Q_i pozitivan, poopćena sila Q_i kao vektor usmjerena je u smjeru poopćenog pomaka q_i kao vektora.

Poopćena sila Q_{ij} može se prikazati u obliku

$$Q_{ij} = k_{ij} q_j \tag{1.20}$$

gdje je k_{ij} pripadna poopćena sila poopćenog pomaka q_i zbog jediničnog poopćenog pomaka q_j, $q_j = 1$. Pripadna poopćena sila k_{ij} naziva se *koeficijentom krutosti*.

Po definiciji, *koeficijent krutosti* k_{ii} *uvijek je pozitivan*:

$$k_{ii} > 0\,; \tag{1.21}$$

koeficijent k_{ij} *može biti pozitivan, negativan ili jednak nuli*.

Općenito, može se napisati:

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= k_{11}q_1 + k_{12}q_2 + \cdots + k_{1i}q_i + \cdots + k_{1n}q_n\,,\\
Q_2 &= k_{21}q_1 + k_{22}q_2 + \cdots + k_{2i}q_i + \cdots + k_{2n}q_n\,,\\
&\vdots\\
Q_i &= k_{i1}q_1 + k_{i2}q_2 + \cdots + k_{ii}q_i + \cdots + k_{in}q_n\,,\\
&\vdots\\
Q_n &= k_{n1}q_1 + k_{n2}q_2 + \cdots + k_{ni}q_i + \cdots + k_{nn}q_n\,.
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

Ili, u matričnom zapisu

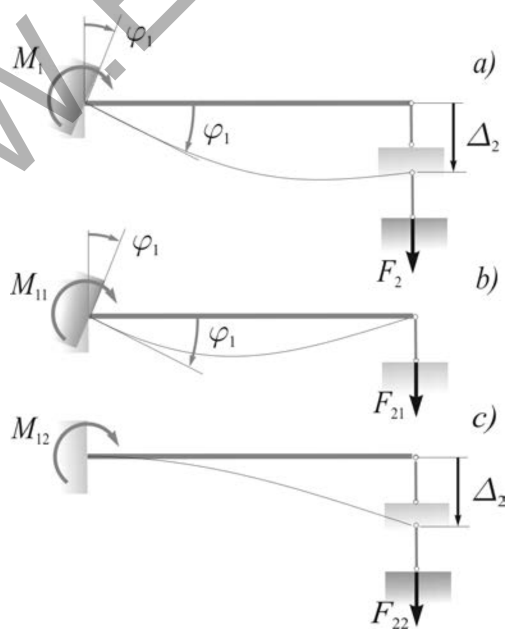
$$\mathbf{Q} = \mathbf{kq} \tag{1.23}$$

gdje je $\mathbf{k}$ matrica krutosti:

$$
\mathbf{k} = \begin{bmatrix}
k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1i} & \cdots & k_{1n}\\
k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2i} & \cdots & k_{2n}\\
\vdots & & \cdots & & \cdots & \\
k_{i1} & k_{i2} & \cdots & k_{ii} & \cdots & k_{in}\\
\vdots & & \cdots & & \cdots & \\
k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{ni} & \cdots & k_{nn}
\end{bmatrix}
\tag{1.24}
$$

pri čemu vrijedi:

$$\mathbf{k} = \mathbf{f}^{-1}\,. \tag{1.25}$$



Sl. 1.6

Na primjer, neka je zadana deformacija, određena poopćenim pomacima φ_1 i $\vec{\Delta}_2$ *(sl. 1.6a).*

Neka je najprije zadana deformacija određena pomakom φ_1 *(sl. 1.6b),* a zatim deformacija određena pomakom $\vec{\Delta}_2$ *(sl. 1.6c)*. Tada je:

$$Q_1 = Q_{11} + Q_{12} = k_{11}q_1 + k_{12}q_2 \,,$$

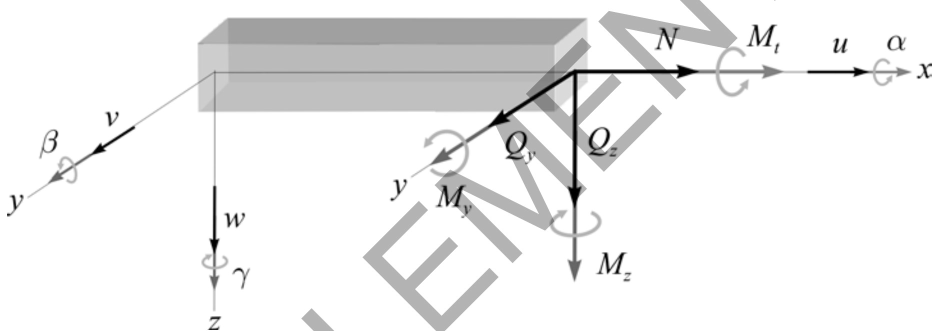
$$Q_2 = Q_{21} + Q_{22} = k_{21}q_1 + k_{22}q_2 \,,$$

gdje je $q_1 = \varphi_1$, $q_2 = \Delta_2$, $Q_1 = M_1$, $Q_2 = F_2$; $Q_{11} = M_{11}$, $Q_{12} = M_{12}$, $Q_{21} = F_{21}$ $Q_{22} = F_{22}$.

Za razliku od matrica podatnosti, matrica krutosti može se primijeniti i na nelinearne sustave.

1.7. Potencijalna energija deformiranosti. Rad unutarnjih sila

U poprečnom presjeku štapa djeluje šest komponenata unutarnjih sila: uzdužna sila $\vec{N}$, poprečne sile $\vec{Q}_y$ i $\vec{Q}_z$, momenti savijanja $\vec{M}_y$ i $\vec{M}_z$ te moment uvijanja $\vec{M}_t$ *(sl. 1.7).*



Sl. 1.7

Ako se komponente unutarnjih sila s pripadnim pomacima $\vec{u}$, $\vec{w}$ i $\vec{v}$, $\vec{\beta}$ i $\vec{\gamma}$, te $\vec{\alpha}$, shvate kao poopćene sile i poopćeni pomaci, rad tih sila bit će međusobno neovisan, jer je rad jednih komponenata na pomacima drugih komponenata jednak nuli; na primjer, rad sile $\vec{Q}_y$ na pomaku $\vec{w}$, pripadnom sili $\vec{Q}_z$, bit će jednak nuli, jer su vektori $\vec{Q}_y$ i $\vec{w}$ međusobno okomiti; rad momenta $\vec{M}_y$ na pomaku $\vec{\gamma}$, pripadnom momentu $\vec{M}_z$, bit će također jednak nuli, jer je vektor $\vec{M}_y$ okomit na usmjerenu veličinu $\vec{\gamma}$, itd.

Za diferencijalni element štapa, imajući na umu izraz (1.8), vrijedi:

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}U \,. \qquad (1.26)$$

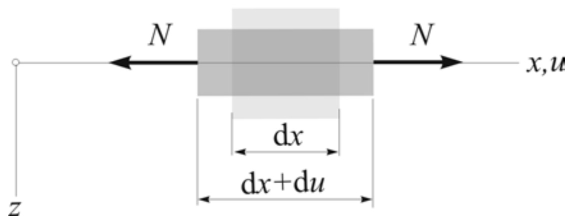
Za rad linearno-elastičnog tijela vrijedi izraz (1.9).

1.7.1. Rastezanje štapa.

Za diferencijalni element štapa opterećen na rastezanje/sabijanje može se napisati *(sl. 1.8)*

$$\mathrm{d}U^N = \frac{1}{2} N \mathrm{d}u \,,$$

gdje je *N* uzdužna sila, a *u* uzdužni pomak.



Sl. 1.8

Budući da je

$$\mathrm{d}u = \frac{N}{EA}\mathrm{d}x$$

poznata ovisnost, bit će

$$\mathrm{d}U^N = \frac{N^2}{2EA}\mathrm{d}x\,, \tag{1.27}$$

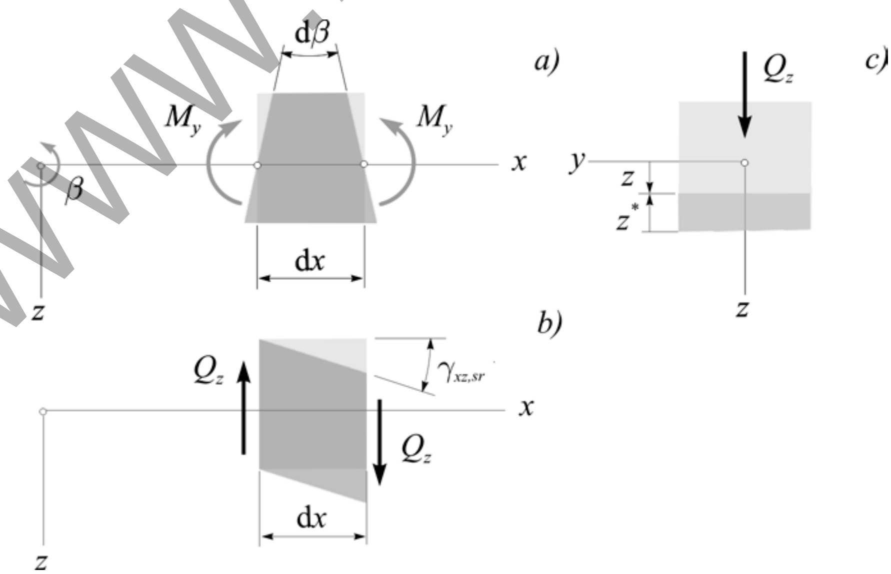
gdje je *EA* krutost u odnosu na rastezanje.

1.7.2. Savijanje štapa u *xz*-ravnini.

Potencijalna energija deformiranosti zbog momenta savijanja *u xz*-ravnini glasi ***(****sl. 1.9a****)***

$$\mathrm{d}U^{M_y} = \frac{1}{2}M_y\mathrm{d}\beta$$

gdje je M_y moment savijanja u odnosu na os *y*, a β kutni pomak u odnosu na os *y*, gdje su osi *y* i *z* glavne težišne osi.



Sl. 1.9

Budući da je

$$\mathrm{d}\beta = \frac{M_y}{EI_y}\mathrm{d}x$$

poznata ovisnost, bit će

$$\mathrm{d}U^{\vec{M}_y} = \frac{M_y^2}{2EI_y}\mathrm{d}x \,. \tag{1.28}$$

Zbog poprečne sile može se napisati *(sl. 1.9b)*:

$$\mathrm{d}U^{Q_z} = \frac{1}{2}\int_A \left(\tau_{xz}\mathrm{d}A\right)\left(\gamma_{xz}\mathrm{d}x\right), \tag{1.29}$$

gdje je

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b_z}$$

tangencijalno naprezanje u odnosu na os *z*,

$$S_y^* = \int_{A^*} z\mathrm{d}A^*$$

moment odsječenog dijela ploštine poprečnog presjeka u odnosu na os *y*, b_z širina poprečnog presjeka na mjestu odsječenog dijela, γ_{xz} kutna deformacija uz pripadno tangencijalno naprezanje, pri čemu je *(sl. 1.9c)*

$$\mathrm{d}A^* = b_z\mathrm{d}z^*, \quad \mathrm{d}z^* = -\mathrm{d}z \,.$$

Imajući na umu Hookeov zakon,

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G},$$

gdje je *G* modul smicanja, dobiva se

$$\mathrm{d}U^{\vec{Q}_z} = \frac{Q_z^2\mathrm{d}x}{2GI_y^2}\int_A \left(\frac{S_y^*}{b_z}\right)^2 \mathrm{d}A \,.$$

Ili:

$$\mathrm{d}U^{Q_z} = \frac{\kappa_z Q_z^2}{2GA}\mathrm{d}x \tag{1.30}$$

gdje je

$$\kappa_z = \frac{A}{I_y^2}\int_A \left(\frac{S_y^*}{b_z}\right)^2 \mathrm{d}A \tag{1.31}$$

faktor smicanja za savijanje u xz-ravnini; *GA* krutost u odnosu na smicanje.

Može se uvesti takozvana *reducirana* ili *smična ploština* poprečnog presjeka

$$A_z = \frac{A}{\kappa_z} \tag{1.32}$$

pa se može napisati:

$$\mathrm{d}U^{\vec{Q}_z} = \frac{Q_z^2}{2GA_z}\mathrm{d}x\,, \tag{1.33}$$

gdje je GA_z srednja krutost u odnosu na smicanje u *xz*-ravnini.

Također, može se uvesti *srednje tangencijalno naprezanje* $\tau_{xz,sr}$ te *srednja kutna deformacija u xz-ravnini* $\gamma_{xz,sr}$:

$$\tau_{xz,sr} = \frac{Q_z}{A_z} = G\gamma_{xz,sr}\,. \tag{1.34}$$

Uvrštenjem u izraz za energiju (1.29) dobiva se

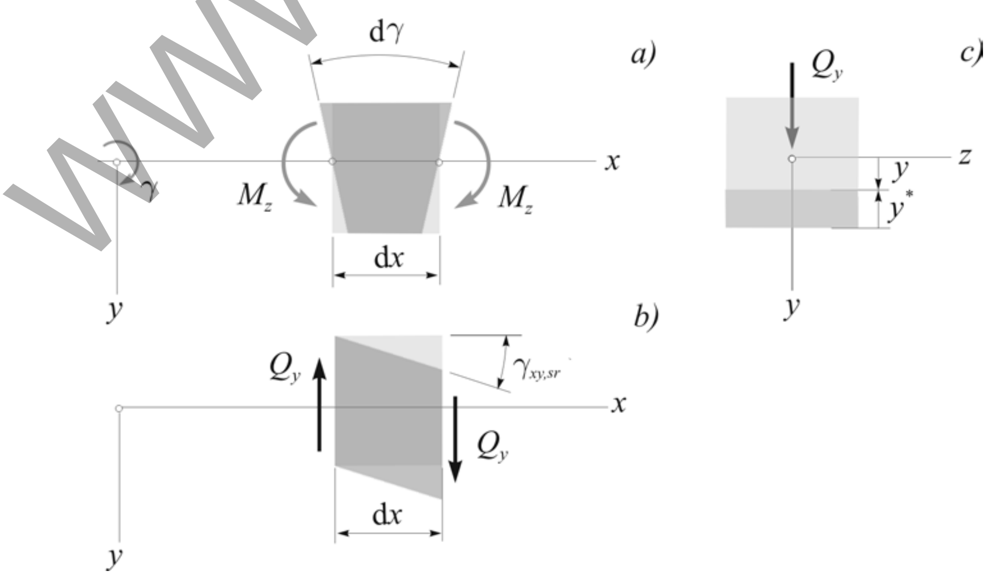
$$\mathrm{d}U^{Q_z} = \frac{\mathrm{d}x}{2G}\tau_{xz,sr}^2 A_z = \frac{\mathrm{d}x}{2G}\cdot\frac{Q_z^2}{A_z^2}A_z = \frac{\kappa_z Q_z^2}{2GA}\mathrm{d}x\,.$$

1.7.3. Savijanje štapa u *xy*-ravnini.

Za savijanje u *xy*-ravnini može se napisati ***(****sl. 1.10a)*

$$\mathrm{d}U^{M_z} = \frac{1}{2}M_z\mathrm{d}\gamma$$

gdje je M_z moment savijanja u odnosu na os *z*, a γ kutni pomak u odnosu na *z*.



Sl. 1.10

U tom slučaju je

$$\mathrm{d}\gamma = \frac{M_z}{EI_z}\mathrm{d}x\,,$$

odnosno

$$\mathrm{d}U^{M_z} = \frac{M_z^2}{2EI_z}\mathrm{d}x\,. \tag{1.35}$$

Zbog poprečne sile može se napisati *(sl. 1.10b)*

$$\mathrm{d}U^{Q_y} = \frac{1}{2}\int_A \left(\tau_{xy}\mathrm{d}A\right)\left(\gamma_{xy}\mathrm{d}x\right), \tag{1.36}$$

gdje je

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^*}{I_z b_y}$$

tangencijalno naprezanje u odnosu na os *z*,

$$S_z^* = \int_{A^*} y\,\mathrm{d}A^*\,,$$

moment odsječenog dijela ploštine poprečnog presjeka u odnosu na os *z*, b_y širina poprečnog presjeka na mjestu odsječenog dijela i γ_{xy} kutna deformacija uz pripadno tangencijalno naprezanje, pri čemu je *(sl. 1.10c)*

$$\mathrm{d}A^* = b_y \mathrm{d}y^*\,, \quad \mathrm{d}y^* = -\mathrm{d}y$$

Hookov zakon u ovom slučaju glasi

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}\,,$$

pa je

$$\mathrm{d}U^{Q_y} = \frac{Q_y^2\mathrm{d}x}{2GI_z^2}\int_A \left(\frac{S_z^*}{b_y}\right)^2 \mathrm{d}A$$

Ili:

$$\mathrm{d}U^{Q_y} = \frac{\kappa_y Q_y^2}{2GA}\mathrm{d}x \tag{1.37}$$

gdje je

$$\kappa_y = \frac{A}{I_z^2}\int_A \left(\frac{S_z^*}{b_y}\right)^2 \mathrm{d}A \tag{1.38}$$

faktor smicanja za savijanje u xy-ravnini.

Za *reduciranu* ili *smičnu ploštinu* poprečnog presjeka u *xy*-ravnini može se napisati

$$A_y = \frac{A}{\kappa_y} \tag{1.39}$$

pa je

$$\mathrm{d}U^{\vec{Q}_z} = \frac{Q_y^2}{2GA_y}\mathrm{d}x\,, \tag{1.40}$$

gdje je GA_y srednja krutost u odnosu na smicanje u *xy*-ravnini.

Za srednje tangencijalno naprezanje $\tau_{xy,sr}$ *i srednju kutnu deformaciju* $\gamma_{xy,sr}$ može se napisati:

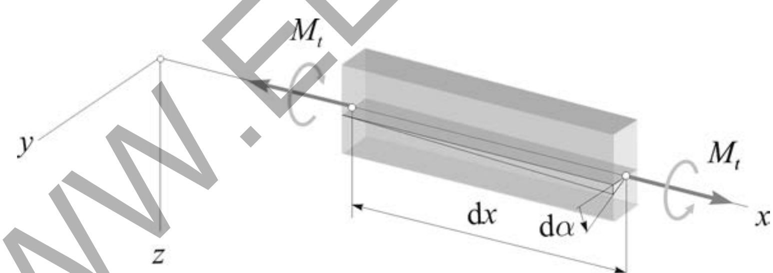
$$\tau_{xy,sr} = \frac{Q_y}{A_{ry}} = G\gamma_{xy,sr}\,. \tag{1.41}$$

1.7.4. Uvijanje štapa.

Zbog momenta uvijanja može se napisati *(sl. 1.11)*:

$$\mathrm{d}U^{M_t} = \frac{1}{2}M_t\mathrm{d}\alpha$$

gdje je M_t moment uvijanja, a α kutni pomak u odnosu na os *x*.



Sl. 1.11

Budući da je

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{M_t}{GI_t}\mathrm{d}x$$

poznata relacija, bit će

$$\mathrm{d}U^{M_t} = \frac{M_t^2}{2GI_t}\mathrm{d}x\,, \tag{1.42}$$

gdje je GI_t krutost u odnosu na uvijanje.

1.7.5. Opći slučaj opterećenja štapa

Ukupna potencijalna energija deformiranosti diferencijalnog elementa štapa može se prikazati u obliku

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}U^{M_y} + \mathrm{d}U^{Q_z} + \mathrm{d}U^{N} + \mathrm{d}U^{M_z} + \mathrm{d}U^{Q_y} + \mathrm{d}U^{M_t}$$

odnosno

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{2}\left(\frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{\kappa_z Q_z^2}{GA} + \frac{N^2}{EA} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{\kappa_y Q_y^2}{GA} + \frac{M_t^2}{GI_t}\right)\mathrm{d}x \,. \tag{1.43}$$

Ili:

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{2}\left(\frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{Q_z^2}{GA_z} + \frac{N^2}{EA} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{Q_y^2}{GA_y} + \frac{M_t^2}{GI_t}\right)\mathrm{d}x \,. \tag{1.44}$$

Ukupna potencijalna energija deformiranosti štapa bit će

$$U = \int_0^l \mathrm{d}U \,. \tag{1.45}$$

Ukupna potencijalna energija sustava k štapova bit će

$$U = \sum_{m=1}^{k}\int_0^{l_m} \mathrm{d}U \,. \tag{1.46}$$

Potencijalna energija deformiranosti može se izraziti i s pomoću komponenata pomaka:

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{2}\left(K_y^2 EI_y + \gamma_{xz,sr}^2 GA_z + \varepsilon_x^2 EA + K_z^2 EI_z + \gamma_{xy,sr}^2 GA_y + \theta^2 GI_t\right)\mathrm{d}x$$

gdje je

$$K_y = \frac{M_y}{EI_y} = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}, \quad K_z = \frac{M_z}{EI_z} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}, \quad \varepsilon_x = \frac{N}{EA}, \quad \theta = \frac{M_t}{GI_t} = -\frac{d\alpha}{dx}.$$

Proizlazi:

1. Potencijalna energija deformiranosti uvijek je pozitivna veličina.

2. Pri određivanju potencijalne energije deformiranosti ne vrijedi princip neovisnosti djelovanja sila (princip superpozicije).

Na primjer, neka na štap krutosti *EA* i duljine *l* djeluju dvije sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ duž istog pravca *(sl. 1.12)*. Energija štapa opterećenog na rastezanje bit će

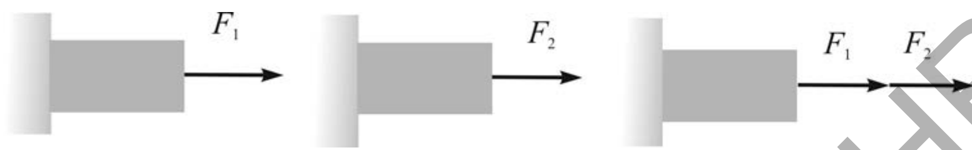
$$U = \frac{N^2 l}{2EA} = \frac{\left(F_1 + F_2\right)^2 l}{2EA} = \frac{F_1^2 l}{2EA} + \frac{F_2^2 l}{2EA} + \frac{F_1 F_2 l}{EA}.$$

Neka na štap djeluje sila $\vec{F}_1$ pa sila $\vec{F}_2$. Energija pri djelovanju sile $\vec{F}_1$ bit će

$$U_1 = \frac{F_1^{\,2}}{2EA},$$

a pri djelovanju sile $\vec{F}_2$

$$U_2 = \frac{F_2^{\,2}}{2EA}.$$



Sl. 1.12

Očito vrijedi:

$$U \neq U_1 + U_2 .$$

3. Potencijalna energija deformiranosti pri djelovanju više sila ne ovisi o redoslijedu djelovanja sila na tijelo.

Komponente unutarnjih sila u izrazima (1.43) – (1.46) linearno su ovisne o poopćenim silama, pa se potencijalna energija deformiranosti može izraziti kao kvadratna funkcija poopćenih sila:

$$U = U\left(Q_1, Q_2, ..., Q_n\right). \tag{1.47}$$

Isto vrijedi i za komponente pomaka u izrazu (1.47); potencijalna energija deformiranosti može se izraziti kao kvadratna funkcija poopćenih pomaka:

$$U = U\left(q_1, q_2, ..., q_n\right). \tag{1.48}$$

1.8. Clapeyronov teorem

Imajući na umu zakon o očuvanju energije može se napisati:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i q_i = U ; \qquad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i Q_i = U ; \tag{1.49}$$

ili

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i q_i = 2U ; \quad \sum_{i=1}^{n} q_i Q_i = 2U . \tag{1.50}$$

Izraz (1.50) predstavlja Clapeyronov teorem, koji glasi

U linearno-elastičnom sustavu rad vanjskih poopćenih sila na pripadnim poopćenim pomacima zbog statičkog djelovanja tih sila jednak je dvostrukoj potencijalnoj energiji deformiranosti sustava.

Ili: *U linearno-elastičnom sustavu rad na poopćenim pomacima pripadnih vanjskih poopćenih sila zbog statičkog djelovanja tih sila jednak je dvostrukoj potencijalnoj energiji deformiranosti sustava.*