1.1. Pregled najvažnijih izraza i pojmova

Diskretno bezmemorijsko izvorište

Izvorište – X

$$X = \{x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n\} \rightarrow [p(x_i)] = [p(X)] = [p(x_1) \ \ldots \ p(x_i) \ \ldots \ p(x_n)]$$

X – diskretna slučajna varijabla koja poprima vrijednosti iz skupa $\{x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$

$p(x_i)$ – vjerojatnosti pojavljivanja vrijednosti x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Poruka

Slijed simbola, iz konačnog skupa X, koje izvorište generira. Primjerice: $x_1 x_2 \ldots x_k$

Količina informacije koju svojom pojavom donosi simbol x_i

$$I(x_i) = -\log_2 p(x_i) \text{ [bit/simbol]}$$

Količina informacije poruke $x_1 x_2 \ldots x_k$

$$I(x_1 x_2 \ldots x_k) = -\log_2 p(x_1) \cdot p(x_2) \cdot \ldots \cdot p(x_k) \text{ [bit/ poruka]}$$

Entropija diskretne slučajne varijable X

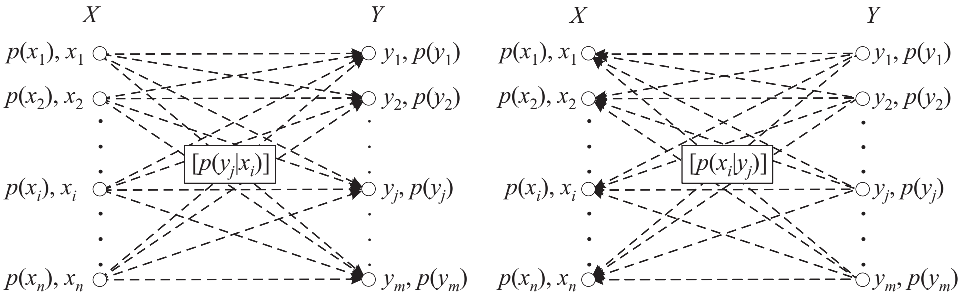
$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \log_2 p(x_i) \quad \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right]$$

Svojstva entropije

- $H(X) \geqslant 0$
- $H(X) \leqslant \log_2 n$
- $p(x_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, \ldots, n \rightarrow H(X) = \log_2 n$
- $H(X) = 0 \Longleftrightarrow \exists i | p(x_i) = 1$
- $H(XY) = H(X) + H(Y)$, X i Y nezavisne

Napomena: Primarni naglasak u Zbirci dan je na binarne digitalne sustave. Iz tog razloga u pregledu najvažnijih izraza i pojmova entropija, kao i sve druge informacijske mjere, računaju se koristeći logaritam po bazi 2.

Diskretni komunikacijski kanal



Slika 1.1. Diskretni komunikacijski kanal i matrice uvjetnih vjerojatnosti prijelaza (pogled sa strane izvorišta – $[p(y_j|x_i)]$ i pogled sa strane odredišta – $[p(x_i|y_j)]$)

$$[p(x_i)] = [p(X)] = [p(x_1) \;\; p(x_2) \;\; \dots \;\; p(x_n)]$$

$$[p(y_j)] = [p(Y)] = [p(y_1) \;\; p(y_2) \;\; \dots \;\; p(y_m)]$$

$$[p(y_j|x_i)] = [p(Y|X)] = \begin{bmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) & \cdots & p(y_m|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) & \cdots & p(y_m|x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(y_1|x_n) & p(y_2|x_n) & \cdots & p(y_m|x_n) \end{bmatrix}$$

$$[p(x_i|y_j)] = [p(X|Y)] = \begin{bmatrix} p(x_1|y_1) & p(x_1|y_2) & \cdots & p(x_1|y_m) \\ p(x_2|y_1) & p(x_2|y_2) & \cdots & p(x_2|y_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(x_n|y_1) & p(x_n|y_2) & \cdots & p(x_n|y_m) \end{bmatrix}$$

Potpunost skupova simbola na ulazu i izlazu komunikacijskog kanala

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(y_j) = 1$$

Odnos vjerojatnosti pojavljivanja ulaznog i izlaznog skupa simbola te matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza kanala

$$[p(y_j)] = [p(x_i)][p(y_j|x_i)]$$

$$[p(x_i)]^T = [p(x_i|y_j)][p(y_j)]^T$$

Napomena:

- Notacija $[A][B]$ označava matrično množenje matrica (ili vektora) A i B, dok notacija $[AB]$ označava množenje korespondentnih elemenata matrica (ili vektora) A i B. Također, kod zapisivanja $[p(x_i)] \equiv [p(X)]$ ili $[p(y_j)] \equiv [p(Y)]$, odnosno $[p(y_j|x_i)] \equiv [p(Y|X)]$, itd.
- Notacija $[A]^T$ predstavlja transponiranu matricu.

Matrica združenih vjerojatnosti

$$[p(x_i,y_j)] = [p(x_i)p(y_j|x_i)] = [p(x_i|y_j)p(y_j)]$$

Također, ako su $[p(X)]$ i $[p(Y)]$ dijagonalne matrice tj.:

$$[p(X)]_d = \begin{bmatrix} p(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(x_2) & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & p(x_n) \end{bmatrix}$$

$$[p(Y)]_d = \begin{bmatrix} p(y_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(y_2) & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & p(y_m) \end{bmatrix}$$

tada je

$$[p(X,Y)] = [p(X)]_d[p(Y|X)] = [p(X|Y)][p(Y)]_d$$

Vjerojatnost pojave simbola

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j), \quad i = 1,\dots,n$$

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i,y_j), \quad j = 1,\dots,m$$

Prijelaz iz apriorne u aposteriornu vjerojatnost pojave x_i [1]

$$p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i,y_j)}{p(y_j)} = \frac{p(x_i,y_j)}{\sum_{i=1}^{n} p(x_i,y_j)} = \frac{p(x_i)p(y_j|x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(x_i)(y_j|x_i)}$$

Izračun vjerojatnosti na ulazu i izlazu iz matričnog zapisa

$$[p(x_i,y_i)] = \begin{bmatrix} p(x_1,y_1) & p(x_1,y_2) & \cdots & p(x_1,y_m) \\ p(x_2,y_1) & p(x_2,y_2) & \cdots & p(x_2,y_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underbrace{p(x_n,y_1)}_{\sum = p(y_1)} & \underbrace{p(x_n,y_2)}_{\sum = p(y_2)} & \cdots & \underbrace{p(x_n,y_m)}_{\sum = p(y_m)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} \sum = p(x_1) \\ \} \sum = p(x_2) \\ \\ \} \sum = p(x_n) \end{matrix}$$

Slika 1.2. Grafički prikaz izračuna na ulazu i izlazu iz matičnog zapisa

[1] Vrijedi $\forall x_i,\ y_j,\ i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m$.

Informacijske mjere

Entropija na ulazu sustava

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \log_2 p(x_i) \quad \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right]$$

Entropija na izlazu sustava

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{m} p(y_j) \log_2 p(y_j) \quad \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right]$$

Združena entropija (entropija para slučajnih varijabli)

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j) \log_2 p(x_i,y_j) \quad \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right]$$

Entropija šuma (irelevantnost)

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j) \log_2 p(y_j|x_i) \quad \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right]$$

Ekvivokacija (mnogoznačnost)

$$H(X|Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j) \log_2 p(x_i|y_j) \quad \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right]$$

Relativna entropija

$$D(p||q) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \log_2 \frac{p(x_i)}{q(x_i)} \quad \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right]$$

$p(x_i)$ i $q(x_i)$ – dvije razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable X

Vrijedi $D(p||q) \neq D(q||p)$

Srednji uzajamni sadržaj informacije (transinformacija)

$$I(X;Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j) \log_2 \frac{p(x_i,y_j)}{p(x_i)p(y_j)} \quad \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right]$$

Vrijedi $I(X;Y) = I(Y;X)$

Međusobni odnosi među entropijama u sustavu

$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$

$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$

$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$

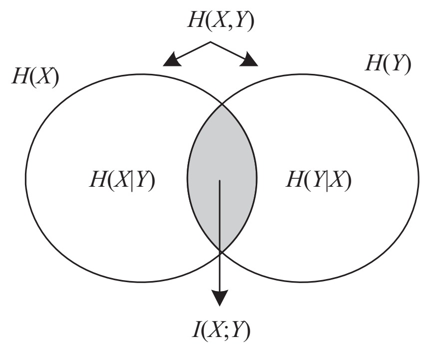
$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$

$H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y)$

$I(X;X) = H(X) \rightarrow$ vlastiti sadržaj informacije slučajne varijable X

$I(X;Y) \geqslant 0$

$H(X|Y) \leqslant H(X)$



Slika 1.3. Prikaz odnosa entropija u sustavu

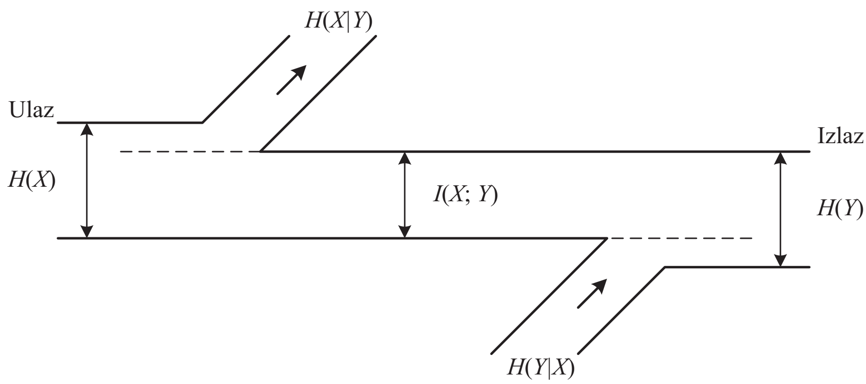
Kapacitet diskretnog komunikacijskog kanala

$$C = \max_{\{p(x_i)\}} I(X;Y) = \max_{\{p(x_i)\}} (H(Y) - H(Y|X)) \quad \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right]$$

Kapacitet binarnog simetričnog kanala

$$C = 1 + p_g \log_2 p_g + (1 - p_g)\log_2(1 - p_g) \quad \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right]$$

p_g – vjerojatnost pogrešnog prijenosa simbola



Slika 1.4. Informacijske mjere u komunikacijskom sustavu

Diskretno izvorište s memorijom

Diskretni slučajni proces je matematički model koji opisuje, u vjerojatnosnom smislu, dinamičko ponašanje nekog sustava u vremenu.

Za diskretni slučajni proces, X, s vrijednostima u diskretnom skupu S (tzv. skup stanja), kažemo da je Markovljev ako za svako t_n, $n \in \mathbf{N}_0$, vrijedi sljedeće:

$$p(X_{t_{n+1}}=x_{n+1} \,|\, X_{t_n}=x_n,\ X_{t_{n-1}}=x_{n-1},\ \dots,\ X_{t_0}=x_0)=p(X_{t_{n+1}}=x_{n+1} \,|X_{t_n}=x_n)$$

Drukčije rečeno, uvjetna vjerojatnost prijelaza iz trenutačnog stanja x_n u neko buduće stanje x_{n+1} **jedino ovisi** o trenutačnom stanju i nikako ne ovisi o načinu na koji je trenutačno stanje dosegnuto.

Ako Markovljev proces zadovoljava sljedeće uvjete:

i) Promatrani sustav može se opisati konačnim brojem stanja n. Također, sustav može biti samo u jednom stanju u nekom vremenskom trenutku.

ii) Matrica uvjetnih prijelaza $[p(x_j|x_i)]$, $i, j = 1, \dots, n$, dana je za sve moguće prijelaze sustava. Također, uvjetne vjerojatnosti prijelaza ne mijenjaju se u vremenu.

iii) Polazno stanje sustava je poznato.

tada se on naziva *Markovljev lanac prvog reda s konačnim brojem stanja* (engl. *finite-state first-order Markov chain*). Markovljevi lanci koriste se za analizu mnogih procesa pa tako i izvorišta s memorijom.

Za Markovljev lanac kažemo da je *ergodičan* ako: (i) iz bilo kojeg stanja u lancu možemo doći, u konačnom broju koraka (ne nužno u jednom), do bilo kojeg drugog stanja; (ii) u vremenu gledano (kad $t \to \infty$) sustav teži graničnoj (stacionarnoj) razdiobi vjerojatnosti neovisno o polaznom stanju sustava.

Napomena: U zadacima se uvijek razmatra *vremenski diskretan ergodičan Markovljev lanac prvog reda*.

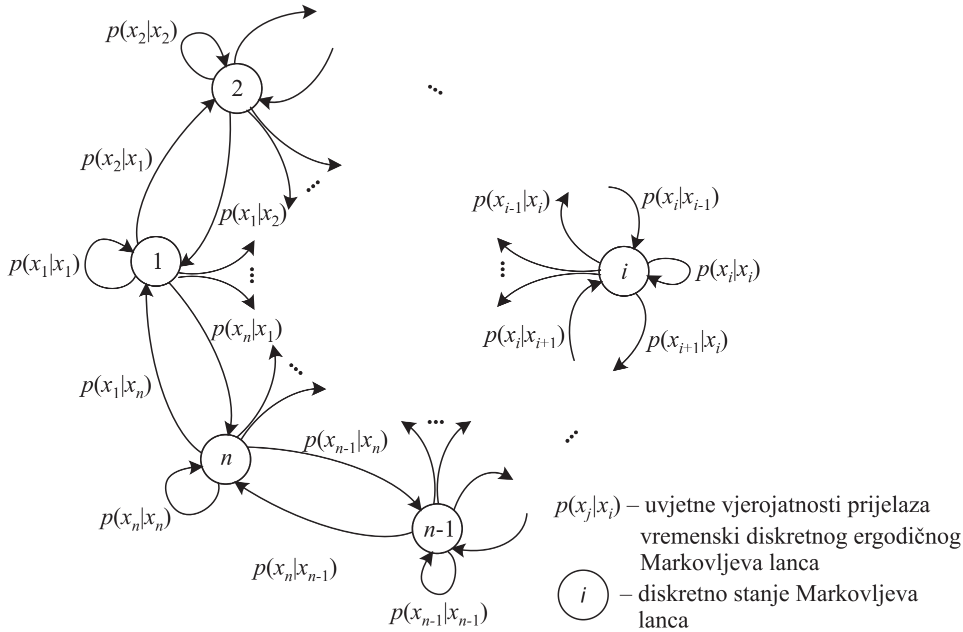
Prikaz:

- **matrica uvjetnih prijelaza vremenski diskretnog ergodičnog Markovljeva lanca** – $[p(x_j|x_i)]$

$$[p(x_j|x_i)] =$$

$$\begin{bmatrix}
p(x_1|x_1) & p(x_2|x_1) & \cdots & & & \cdots & & p(x_n|x_1) \\
p(x_1|x_2) & p(x_2|x_2) & & & \cdots & & & p(x_n|x_2) \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & \cdots & & p(x_{i-1}|x_i) & p(x_i|x_i) & p(x_{i+1}|x_i) & \cdots & \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
p(x_1|x_{n-1}) & p(x_2|x_{n-1}) & & & \cdots & & p(x_{n-1}|x_{n-1}) & p(x_n|x_{n-1}) \\
p(x_1|x_n) & p(x_2|x_n) & \cdots & & & \cdots & p(x_{n-1}|x_n) & p(x_n|x_n)
\end{bmatrix}$$

- **dijagram stanja (vremenski diskretan ergodičan Markovljev lanac)**



Slika 1.5. Dijagram stanja vremenski diskretnog Markovljeva lanca

Stacionarne vjerojatnosti vremenski diskretnog ergodičnog Markovljeva lanca

Stacionarne vjerojatnosti stanja (engl. *steady-state probabilities*) vremenski diskretnog ergodičnog Markovljeva lanca određujemo iz sljedeća dva uvjeta:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

$$[p(x_i)_{i=1,\ldots,n}] = [p(x_1) \cdots p(x_n)][p(x_j|x_i)]$$

Vlastiti sadržaj informacije za slučaj ovisnosti među simbolima

$$H'(X) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, x_j) \log_2 p(x_j|x_i) \quad \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right]$$

Vlastiti sadržaj informacije za slučaj neovisnosti među simbolima

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \log_2 p(x_i) \quad \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right]$$

Preporučena literatura

U cilju produbljenja znanja te lakšeg razumijevanja pojmova i izraza danih u ovom poglavlju čitatelju se preporuča korištenje nekog od sljedećih udžbenika s popisa literature: [1], [2], [3], [4], [5], [7] [10], [12], [13], [14], [15] i [28].

1.2. Riješeni zadaci

ZADATAK 1.1.

Komunikacijskim kanalom prenose se četiri poruke generirane iz skupa od četiri simbola $X = \{x_1, \ldots, x_4\}$. Omjer vjerojatnosti njihovog pojavljivanja je $p(x_1) : p(x_2) : p(x_3) : p(x_4) = 1 : 2 : 2 : 5$. Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza u kanalu je:

$$[p(y_j|x_i)] = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

i) Odredite entropiju ulaznog i izlaznog skupa simbola.

ii) Odredite entropiju šuma i transinformaciju u kanalu.

Rješenje

i) Prema uvjetu zadatka vrijedi:

$$p(x_1) : p(x_2) : p(x_3) : p(x_4) = 1 : 2 : 2 : 5$$

Simboli koji se pojavljuju na izlazu iz izvorišta moraju sačinjavati potpuni vjerojatnosni skup. Zato vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{4} p(x_i) = 1$$

Iz toga izravno slijedi:

$$\begin{aligned} p(x_1) &= 0{,}1 \\ p(x_2) &= p(x_3) = 0{,}2 \\ p(x_4) &= 0{,}5 \\ [p(x_i)] &= [\,0{,}1 \quad 0{,}2 \quad 0{,}2 \quad 0{,}5\,], \quad i = 1, \ldots, 4 \end{aligned}$$

Matrica združenih vjerojatnosti računa se prema poznatom izrazu:

$$[p(x_i, y_j)] = [p(x_i)p(y_j|x_i)] = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}05 \\ 0{,}02 & 0{,}04 & 0{,}1 & 0{,}04 \\ 0{,}02 & 0{,}1 & 0{,}04 & 0{,}04 \\ 0{,}25 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

Iz nje dobivamo vektor vjerojatnosti pojavljivanja simbola na izlazu:

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{4} p(x_i, y_j), \quad j = 1, \ldots, 4$$

$$[p(y_j)] = [\,0{,}3 \quad 0{,}21 \quad 0{,}26 \quad 0{,}23\,]\,, \quad j = 1, \ldots, 4$$

Naposljetku se računaju entropije:

$$\boxed{H(X) = -\sum_{i=1}^{4} p(x_i)\log_2 p(x_i) = 1{,}761\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}}$$

$$\boxed{H(Y) = -\sum_{j=1}^{4} p(y_j)\log_2 p(y_j) = 1{,}9869\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}}$$

ii) Iz matrice združenih vjerojatnosti proračunava se odgovarajuća entropija.

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p(x_i, y_j)\log_2 p(x_i, y_j) = 3{,}5219\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

Nakon što smo izračunali entropiju $H(X,Y)$ prema sljedećim izrazima dobivamo transinformaciju, odnosno entropiju šuma:

$$\boxed{I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = 0{,}226\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}}$$

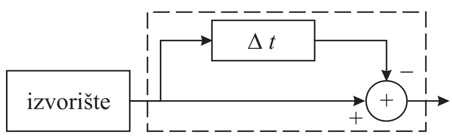
$$\boxed{H(Y|X) = H(X,Y) - H(X) = 1{,}761\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}}$$

ZADATAK 1.2.

Diskretno izvorište generira simbole iz skupa simbola $X = \{4, 5, 6\}$. Statističke veze između dvaju uzastopnih simbola koje generira izvorište dane su preko matrice združenih vjerojatnosti – $[p(x_i, x_j)]$.

$$[p(x_i, x_j)] = \begin{bmatrix} 0{,}1172 & 0{,}1172 & 0{,}1563 \\ 0{,}0713 & 0{,}2138 & 0{,}0713 \\ 0{,}2023 & 0{,}0253 & 0{,}0253 \end{bmatrix}$$

Na izvorište je priključen sklop (Slika 1.6) koji na izlazu daje razliku između dvaju uzastopnih simbola generiranih na izvorištu.



Slika 1.6. Izvorište + diferencijalni sklop

Odredite entropiju skupa simbola na izlazu sklopa sa slike.

Rješenje

Na izlazu sklopa sa slike pojavljuje se razlika dvaju uzastopnih simbola generiranih na izvorištu. Broj mogućih ishoda je 5, i to: $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$. Uzimajući sve moguće kombinacije simbola iz skupa X dobivamo sljedeće vjerojatnosti za pojedini događaj (x_i, x_j):

Tablica 1.1. Vjerojatnost pojavljivanja parova simbola

(x_i, x_j)	$p(x_i, x_j)$	$x_i - x_j$
4, 4	0,1172	0
4, 5	0,1172	−1
4, 6	0,1563	−2
5, 4	0,0713	1
5, 5	0,2138	0
5, 6	0,0713	−1
6, 4	0,2023	2
6, 5	0,0253	1
6, 6	0,0253	0

Definirajmo diskretnu slučajnu varijablu Y koja određuje vjerojatnosti pojavljivanja pojedinih razlika na izlazu diferencijalnog sklopa, tj.

$$Y \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0{,}1563 & 0{,}1172+0{,}0713 & 0{,}1172+0{,}2138+0{,}0253 & 0{,}0713+0{,}0253 & 0{,}2023 \end{pmatrix}$$

$$Y \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0{,}1563 & 0{,}1885 & 0{,}3563 & 0{,}0966 & 0{,}2023 \end{pmatrix}$$

Odnosno u vektorskom obliku:

$$[p(y_j)] = [\,0{,}1563 \quad 0{,}1885 \quad 0{,}3563 \quad 0{,}0966 \quad 0{,}2023\,], \quad j = 1, \ldots, 5$$

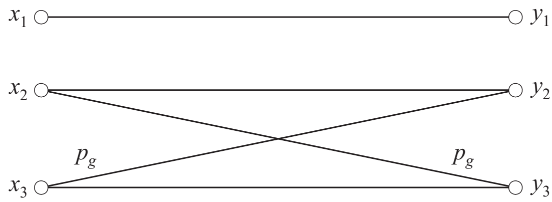
Entropija $H(Y)$ određuje se prema poznatom izrazu:

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{5} p(y_j) \log_2 p(y_j)$$

$$\boxed{H(Y) = 2{,}195 \ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}}$$

ZADATAK 1.3. [4]

Diskretni komunikacijski kanal predočen je na slici (Slika 1.7):



Slika 1.7. Diskretni komunikacijski kanal

Vjerojatnosti pojavljivanja simbola x_i definirane su kao $p(x_i) = p_i$, $i = 1, 2, 3$. Koji uvjet mora biti ispunjen (uz $\sum_i p(x_i) = 1$) tako da vrijedi: $H(X) = H(Y)$?

Napomena: $p_g =$ konst. $\neq 0$ i $\neq 1$!

Rješenje

Iz slike kanala možemo dobiti matricu vjerojatnosti prijelaza kanala, a zatim i matricu združenih vjerojatnosti:

$$[p(y_j|x_i)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p_g & p_g \\ 0 & p_g & 1-p_g \end{bmatrix};$$

$$[p(x_i, y_i)] = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2(1-p_g) & p_2 p_g \\ 0 & p_3 p_g & p_3(1-p_g) \end{bmatrix}$$

Iz matrice združenih vjerojatnosti slijedi:

$$[p(y_j)] = [\,p_1 \quad p_2 + p_g(p_3 - p_2) \quad p_3 + p_g(p_2 - p_3)\,], \quad j = 1, 2, 3$$

Iz uvjeta zadatka, $H(X) = H(Y)$, dobivamo:

$$\begin{aligned} &p_1 \log_2 p_1 + p_2 \log_2 p_2 + p_3 \log_2 p_3 \\ &\quad = p_1 \log_2 p_1 + (p_2 + p_g(p_3 - p_2)) \log_2(p_2 + p_g(p_3 - p_2)) \\ &\qquad + (p_3 + p_g(p_2 - p_3)) \log_2(p_3 + p_g(p_2 - p_3)) \end{aligned}$$

Iz čega slijedi:

$$
\begin{aligned}
&p_2 = p_2 + p_g(p_3 - p_2)\\
&p_2 = p_3\\
&\text{ili}\\
&p_2 = p_3 + p_g(p_2 - p_3)\\
&p_2(1 - p_g) = p_3(1 - p_g)\\
&p_2 = p_3
\end{aligned}
$$

Isto se dobije iz:

$$
\begin{aligned}
&p_3 = p_3 + p_g(p_3 - p_2)\\
&p_2 = p_3\\
&\text{ili}\\
&p_3 = p_2 + p_g(p_3 - p_2)\\
&p_3(1 - p_g) = p_2(1 - p_g)\\
&p_2 = p_3
\end{aligned}
$$

Dakle, da bi za dani kanal vrijedilo $H(X) = H(Y)$, mora biti:

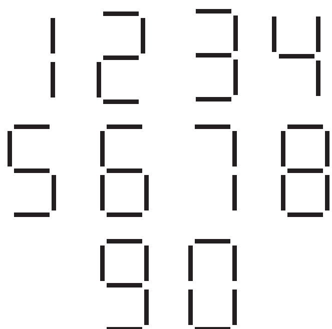
$$\boxed{p_2 = p_3}$$

ZADATAK 1.4. [4]

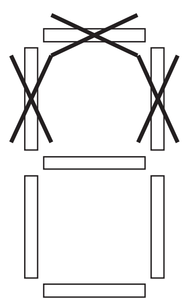
Digitalni sklop za prikaz simbola (7-segmentni indikator) prikazuje simbole u formatu kao na slici (Slika 1.8). Svi simboli (0 – 9) pojavljuju se na indikatoru sklopa s jednakom vjerojatnošću pojavljivanja. Zbog kvara na uređaju otkazale su gornje tri oznake (Slika 1.9).

i) Izračunajte entropiju po jednom prikazu na 7-segmentnom indikatoru prije kvara.

ii) Izračunajte entropiju po jednom prikazu na 7-segmentnom indikatoru nakon kvara.



Slika 1.8. Digitalni sklop za prikaz simbola



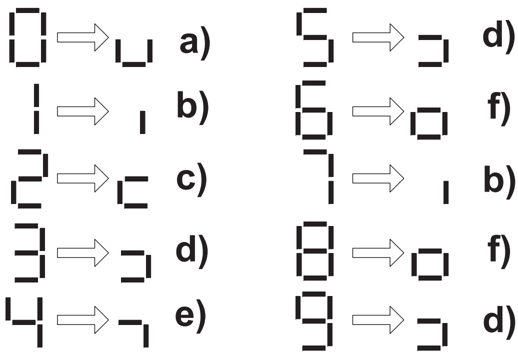
Slika 1.9. Kvar

Rješenje

i) Entropiju prije kvara dobivamo prema poznatom izrazu:

$$H(X) = \log_2 10 = 3{,}3219 \text{ bit/simbol}.$$

ii) Nakon kvara 7-segmentnog indikatora, početni simboli prelaze u (novi simboli označeni su slovima od "a" do "f"):



Slika 1.10. Pojedini simboli nakon kvara

Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza je:

$$[p(y_j|x_i)] = \begin{array}{c} \\ 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Iz nje dobivamo $[p(x_i, y_j)]$, a potom vektor izlaznih vjerojatnosti:

$$[p(y_j)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix}$$

Entropija jednog prikaza na pokazniku nakon kvara je:

$$\boxed{H(Y) = -\sum_{i=1}^{6} p(y_j)\log_2(y_j) = 2{,}4464 \text{ bit/simbol}}$$

Napomena: Također, može se uočiti da se cijeli sustav mogao promatrati kao diskretni komunikacijski kanal.