
1

1. UVOD U TEORIJU ELASTIČNOSTI

1.1 Uvod	1-1
1.2 Naprezanje i deformacija. Modul elastičnosti	1-2
Mikroskopski opis elastičnosti	1-2
Elastičnost - makroskopski prikaz	1-3
1.3 Istezanje - naprezanje na vlak	1-4
Anizotropnost materijala	1-8
Poissonov broj (omjer)	1-9
1.4 Tlačno naprezanje - naprezanje na tlak	1-9
Veza između Youngovog i volumnog modula elastičnosti	1-10
1.5 Smicanje - torzijsko naprezanje (smik)	1-12
1.6 Veze između modula elastičnosti	1-13
1.7 Energija pri elastičnom naprezanju	1-14
Dodaci poglavlju 1	
DP1.1 Torzija žice i torzijska konstanta	1-16
Pregled 1. poglavlja	
Novi fizikalni pojmovi	1-18
Nove relacije (formule)	1-18
Pitanja	1-18

www.element.hr

www.element.hr

1. UVOD U TEORIJU ELASTIČNOSTI

1.1 Uvod

Čvrsta tijela pri djelovanju sile (na prvi pogled) ne mijenjaju svoj oblik. Pažljivo proučavanje i mjerenje pokazuje međutim, da (uvijek) postoji *deformacija*, odnosno promjena oblika tijela zbog djelovanja sile. Ako je ta deformacija mala u odnosu na dimenzije tijela, govorimo o čvrstom ili, ponekad, krutom tijelu i problem djelovanja sile na kruto tijelo rješavamo pomoću jednadžbi gibanja (2. Newtonov aksiom). Nas će ovdje zanimati deformacije krutog tijela, koliko god one bile male, nastale zbog djelovanja vanjskih sila.

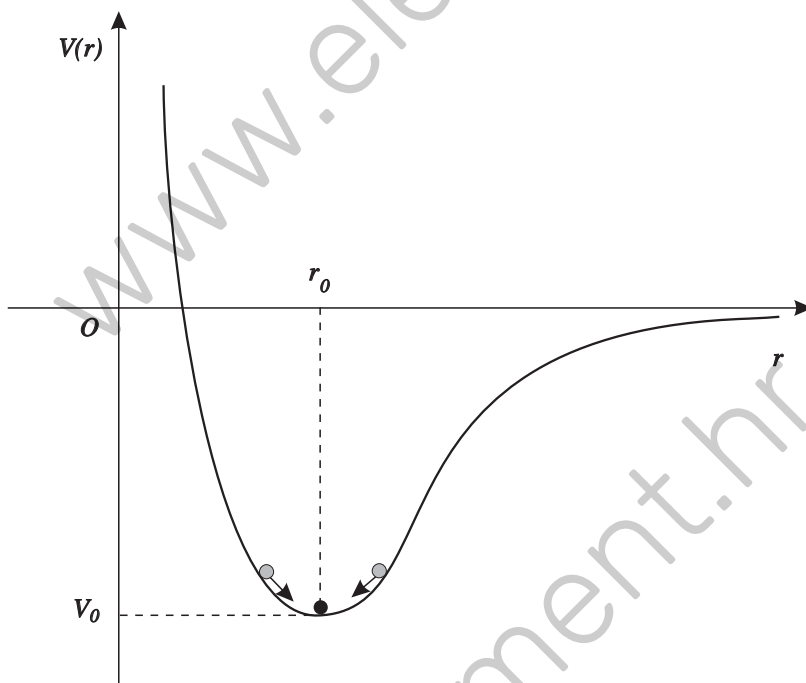
Za potpuno razumijevanje deformacije, nužno je istražiti mikroskopsku strukturu tvari. S druge strane, pojave deformacije mogu se dobro opisati preko makroskopskih veličina (modula elastičnosti i relativnih deformacija) bez ulaženja u mikroskopsku pozadinu tog ponašanja, a to je i pristup koji ćemo ovdje slijediti.

Ta situacija može podsjetiti na opis toplinskih pojava koje proučava termodinamika, odnosno kinetičko-molekularna teorija topline. Termodinamika dobro opisuje procese prelaženja topline te rad toplinskih strojeva i toplinskih pumpi, koristeći za opis promatranog toplinskog sustava tlak p i temperaturu T . Tlak i temperatura su parametri o kojima saznajemo iz očitavanja njihovih vrijednosti s barometra i termometra, bez ulaženja u stvarnu fizikalnu suštinu i porijeklo tih parametara. Međutim, za potpuno razumijevanje tlaka i temperature moramo otići na mikroskopsku razinu i tamo, pomoću molekularno kinetičke teorije opisati njihovo "pravo" porijeklo. Time termodinamika postaje tzv. *efektivna teorija* fundamentalne teorije koju zovemo *kinetičko-molekularna teorija*.

U ovom ćemo poglavlju opisati pojave deformacije materijala (krutih tijela i tekućina) koje nestaju kada nestaje i uzrok koji ih je izazvao. Materijale koji imaju to svojstvo zovemo *elastičnim materijalima*, a područje istraživanja je *teorija elastičnosti*. Područje teorije elastičnosti je golemo i po sadržaju i po važnosti za fiziku materijala, kao i za tehnologiju materijala. Mi ćemo ovdje tek skicirati pojedine osnovne aspekte teorije elastičnosti pa ćemo opisati elastične deformacije nastale zbog naprezanja (1) na vlak - tzv. *vlačno naprezanje*, (2) na tlak - *tlačno naprezanje* i (3) na smik (*smicanje i torzija*).

1.2 Naprezanje i deformacija. Modul elastičnosti

Mikroskopski opis elastičnosti Na početku razmatranja teorije elastičnosti pogledat ćemo ipak mikroskopsku razinu koja određuje makroskopsku elastičnost. Na slici 1.1 prikazana je potencijalna energija molekule/atoma u kristalnoj rešetci elastičnog tijela. Ta potencijalna energija rezultat je međudjelovanja atoma sa svim svojim susjedima, a prikazana krivulja određena je empirijski. Krivulja ima minimum u točki $r = r_0$ ("dubok" V_0). To je stabilni položaj atoma u kristalu. Pomak čestice iz položaja ravnoteže uzrokuje sile koje djeluju prema ravnotežnom položaju. Oblik (matematički zapis) te sile moguće je dobiti iz funkcije $V(r)$. S obzirom na to da je oblik krivulje takav da daje stabilni minimum, onda možemo razviti funkciju $V(r)$ u Taylorov red u okolini minimuma $r = r_0$.



Slika 1.1 - Potencijalna energija atoma u kristalu

$$V(r) \simeq V(r_0) + \frac{1}{1!} \left. \frac{dV}{dr} \right|_{r=r_0} (r - r_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2V}{dr^2} \right|_{r=r_0} (r - r_0)^2 + \dots \quad (1-1)$$

No kako potencijal ima minimum za $r = r_0$, onda je $dV/dr = 0$ za $r = r_0$ pa ostaje

$$\begin{aligned} V(r) &= V(r_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2V}{dr^2} \right|_{r=r_0} (r^2 - 2rr_0 + r_0^2) + \dots \\ &= V(r_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dr^2} \cdot r^2 - \frac{d^2V}{dr^2} r_0 r + \dots \\ &= k_1 + k_2 r + k_3 r^2. \end{aligned} \quad (1-2)$$

Iz tog izraza možemo naći silu

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\nabla V(r) = -\hat{r} \frac{d}{dr} V(r) \\ &= -\hat{r} k_2 - \hat{r} (2k_3)r,\end{aligned}\quad (1-3a)$$

odnosno, dio sile ovisan o r je

$$\vec{F} = -\hat{r}kr, \quad (1-3b)$$

gdje je k pozitivna konstanta. Dakle, u okolini minimuma potencijala djeluje *harmonijska sila*, tj. sila koja linearno ovisi o pomaku iz položaja ravnoteže i koja daje harmonijsko titranje, a odgovara elastičnoj sili opruge. Ta sila vraća tijelo (atom, molekulu) u položaj ravnoteže. Konstanta k ovisi o mikroskopskim parametrima materijala: o konstanti kristalne rešetke, o naboju atoma, o njihovom prostornom rasporedu, o građi atomskog elektronskog oblaka, itd. Makroskopski efekt - učinak elastičnosti je kolektivni efekt (mikroskopske) harmonijske sile koja se javlja pri deformaciji (pomaku atoma iz položaja $r = r_0$ u kristalnoj rešetki). Još potpuniji opis zahtijevao bi primjenu rafiniranih metoda kvantne mehanike. Zato se dalje priklanjamo makroskopskom opisu elastičnosti!

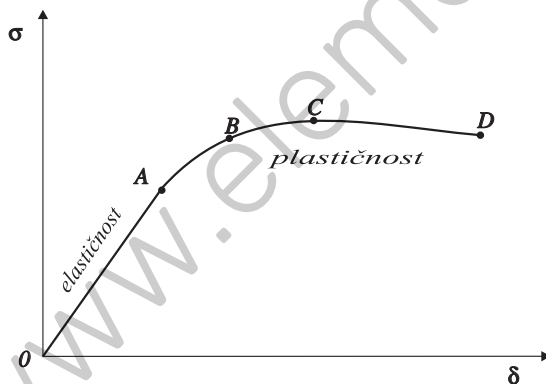
Elastičnost - makroskopski prikaz Ako definiramo fizikalnu veličinu *naprezanje* σ kao iznos sile F podijeljen površinom S , odnosno

$$\sigma \equiv \frac{F}{S}, \quad (1-4)$$

onda na osnovi pokusa možemo opisati ovisnost (unutarnjeg) naprezanja o deformaciji prema slici 1.2. Deformacija δ je u stvari *relativna deformacija*, tj. omjer promijenjene dimenzije i "originalne" dimenzije, odnosno

$$\delta = \frac{\text{"promjena"}}{\text{"original"}} \quad (1-5a)$$

Ovdje u biti govorimo o dva naprezanja - o naprezanju koje nastaje zbog djelovanja vanjske sile i o naprezanju koje nastaje u materijalu kao reakcija na djelovanje vanjske sile. U ravnoteži su ta dva naprezanja po iznosu jednaka pa ne radimo razliku između njih. Tako ovisnost naprezanja (unutarnjeg) o deformaciji moramo shvatiti tako da deformaciju shvatimo kao posljedicu vanjskog naprezanja, a (unutarnje) naprezanje, prikazano na ordinati grafa na slici 1.2, posljedica je deformacije nastale vanjskim naprezanjem.



Slika 1.2 - Ovisnost naprezanja σ o (relativnoj) deformaciji δ (vidi napomenu u tekstu)

Na slici 1.2 vidimo nekoliko područja krivulje koja opisuje ovisnost naprezanja o deformaciji. U području *elastičnosti* OA naprezanje (materijala) σ je *linearno proporcionalno* relativnoj deformaciji δ

$$\begin{aligned} \text{naprezanje} &\propto \text{relativna deformacija} & \text{tj.} \\ \sigma &\propto \delta. \end{aligned} \quad (1-5b)$$

To je područje koje će nas najviše zanimati, a teorija elastičnosti vrlo ga dobro opisuje. Područje krivulje AB također je područje elastičnosti, ali ne (nužno) i linearne proporcionalnosti između naprezanja i deformacije. Točku B možemo smatrati granicom elastičnosti, nakon koje dolazi područje *plastičnosti*, odnosno pri deformaciji koja daje naprezanje preko točke B deformacija je stalna (pa i unutarne naprezanje), tj. tijelo ostaje trajno deformirano. Granica elastičnosti za različite materijale dana je u tablici 1.2.

Dalja deformacija vodi od točke C na krivulji, koja predstavlja granicu popuštanja materijala, do točke D gdje dolazi do kidanja materijala. Vidimo da se između točke C i D naprezanje vrlo malo mijenja s deformacijom. Točka C određuje tzv. *maksimalnu čvrstoću*, odnosno maksimalno naprezanje materijala koje materijal može izdržati (bez popuštanja). (Podaci o maksimalnoj čvrstoći dani su u tablici 1.2.) Većina se čvrstih materijala ponaša prema krivulji sa slike 1.2, a kod metala je područje OA relativno veliko.

Relativnu deformaciju za različite oblike naprezanja ((1)-(3)) označit ćemo već prema karakterističnoj promjeni pri naprezanju, tako da za *vlačno* (1), *tlačno* (2) i *torzijsko* (3) naprezanje imamo:

$$\delta \rightarrow \begin{cases} \delta_L & \text{za (1) tj. } L \rightarrow L + \Delta L \\ \delta_V & \text{za (2) tj. } V \rightarrow V + \Delta V \\ \delta_\phi & \text{za (3) tj. } \phi \rightarrow \phi + \Delta\phi. \end{cases} \quad (1-5c)$$

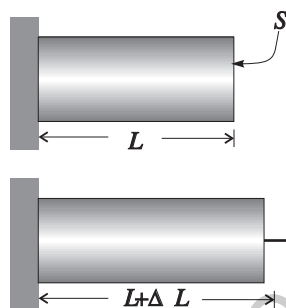
U području linearne veze naprezanja i deformacije možemo tu proporcionalnost napisati kao jednakost, ako uvedemo jednu konstantu proporcionalnosti koja će su sebi sadržavati svojstvo materijala s obzirom na odgovarajuće naprezanje. Tu konstantu zovemo *modul elastičnosti* i pišemo:

$$\text{modul elastičnosti} = \frac{\text{naprezanje}}{\text{rel. deformacija}} = \frac{\sigma}{\delta_i} = \frac{F/S}{\delta_i}, \quad (i = L, V, \phi). \quad (1-6)$$

(Svaka vrsta naprezanja (1) - (3) dobit će "svoj" modul elastičnosti koji će u dobro opisati makroskopska elastična svojstva nekog materijala s obzirom na vrstu naprezanja!)

1.3 Istezanje - naprezanje na vlak

Razmotrimo šipku duljine L i površine presjeka S , načinjenu od elastičnog materijala. Ako je šipka učvršćena na jednom kraju, a na drugom djeluje sila u takvom

Slika 1.3 - Istezanje šipke originalne duljine L i površine presjeka S

smjeru da šipku rasteže, govorimo o *vlačnom naprezanju* ili *naprezanju na vlak* (v. sliku 1.3). Pri tome je naprezanje σ , prema (1-4) sila na jedinicu površine šipke.

Relativna deformacija δ_L je omjer promjene (povećanja) duljine štapa ΔL i duljine štapa L ,

$$\delta_L \equiv \frac{\Delta L}{L}. \quad (1-7)$$

Zanima nas, kao što smo naglasili, područje OA iz slike 1.2, tj. područje linearne elastičnosti za koje je

$$\sigma \propto \delta_L, \quad \text{tj.} \quad \frac{F}{S} \propto \frac{\Delta L}{L}. \quad (1-8a)$$

Deformacija materijala ovisi i o vrsti materijala pa će gornja proporcionalnost postati jednakost ako uvedemo konstantu, tzv. *Youngov† modul elastičnosti* E , koja je karakteristična za pojedini materijal (v. tablicu 1.1). Dakle

$$E = \frac{F/S}{\Delta L/L} \quad (1-8b)$$

Red veličine Youngovog modula elastičnosti je oko $10^9 - 10^{11} \text{ N/m}^2$. Izraz (1-8b) moguće je napisati tako da u njemu prepoznamo *Hookeov‡ zakon*, koji je ranije uveden i opisan u mehanici, a koji će igrati važnu ulogu u teoriji periodičkih gibanja - titranja. Dakle, $F/S = E \cdot \Delta L/L$ ili $F = (ES/L) \cdot \Delta L = k \cdot \Delta L$. Ako formalno zamijenimo produljenje ΔL s pomakom x , dobijemo Hooke-ov zakon $F = kx$. Konstanta k predstavlja karakteristiku materijala i tijela (površina presjeka, duljina, modul elastičnosti itd.). Vrlo su korisni i podaci o granici elastičnosti te o maksimalnoj vlačnoj čvrstoći, prikazani u tablici 1.2.

Primjer 1.1 Čelična šipka duljine 2,00 m i promjera 2,00 cm pričvršćena je s gornje strane. Na nju je obješen teret od 9,50 t. Ako je Youngov modul elastičnosti $E = 200\,000 \text{ MN/m}^2$, koliko će se produljiti šipka? Kolika je relativna deformacija?

† Thomas Young (1773.-1829.) - britanski fizičar, liječnik i egiptolog

‡ Robert Hooke (1635.-1703.) - engleski fizičar i pronalazač

Materijal	$E/10^9 \text{ Nm}^{-2}$	$G/10^9 \text{ Nm}^{-2}$	$B/10^9 \text{ Nm}^{-2}$
aluminij	70	25	70
bakar	125	45	140
beton	20	12	
čelik	200	40	140
drvo			
duž vlakna	10		
⊥ na vlakna	1		
kost	15	80	
kvarcna nit	73	31	
mramor	50		70
staklo	58	28	37
željezo	100	40	90

Tablica 1.1 - Moduli elastičnosti: E - Youngov modul elastičnosti, G - modul smicanja i volumni modul elastičnosti B

Materijal	Granica elast. $/10^8 \text{ Nm}^{-2}$	Maksimalna vlačna čvrstoća $/10^8 \text{ Nm}^{-2}$	Maksimalna čvrstoća smicanja $/10^8 \text{ Nm}^{-2}$
aluminij	1,4	1,4	1,4
bakar	1,6	4,1	
čelik	2,4	4,8	3,8
drvo			
duž vlakna	0,2	0,69	0,04
mesing	3,5	4,5	
željezo	1,7	3,2	2,7

Tablica 1.2 - Elastična svojstva različitih materijala

Materijal	Al	Beton	Guma	Kvarcna nit	Čelik	Ag
Poissonov omjer	0,33	0,1	0,46	0,17	0,25	0,37

Tablica 1.3 - Poissonovi omjeri za razne materijale

RJEŠENJE Naprezanje σ je F/S , odnosno

$$\sigma = mg/S = \frac{9500 \cdot 9,81}{10^{-4} \cdot \pi} \text{ N/m}^2$$

Tekućina	Volumni modul rastezanja $B/10^9 \text{ Nm}^{-2}$
benzen	1,0
etilni alk.	0,9
glicerin	3,9
petrolej	1,3
ulje	1,8
voda	2,3
živa	26,2

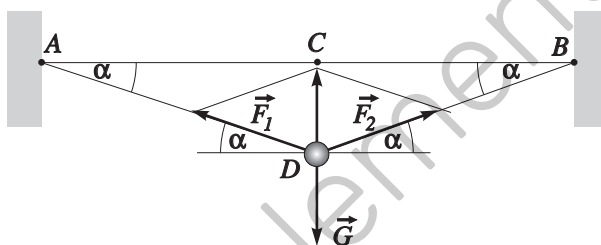
Tablica 1.4 - Volumni moduli elastičnosti
 B tekućina (na 20^0 C)

pa je produljenje jednako

$$\Delta L = \frac{L}{E} \cdot \sigma = 2,97 \text{ mm.}$$

Relativna deformacija je $\Delta L/L = 1,48 \times 10^{-3}$.

Primjer 1.2 Čelična žica promjera $d = 1 \text{ mm}$ razapeta je u horizontalnom smjeru između dvije čvrste točke A i B (v. sliku 1.4) koje su udaljene $L = L_{AB} = 4 \text{ m}$. Za koliko će se spustiti središnja točka (između A i B) ako se na žicu objesi predmet mase $m = 3 \text{ kg}$? (Napomena: zanemarimo težinu žice. Valja se sjetiti da debela žica (primjerice lanac) zauzima posve određen oblik ("oblik lančanice") ako se uzme u obzir masa. Funkcija koja opisuje taj oblik je funkcija hiperbolnog kosinusa (v. DH: Fizika I, str. 3-58).)



Slika 1.4 - Uz primjer 1.2

RJEŠENJE Težina G obješenog tijela uravnotežena je dvjema (po iznosu) jednakim silama \vec{F}_1 i \vec{F}_2 koje se zbog elastičnosti javljaju u dijelovima žice. Horizontalne komponente tih sila međusobno se dokidaju ($F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \alpha = 0$), a zbroj vertikalnih komponenti je po iznosu jednak težini, odnosno

$$F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \alpha = (F_1 + F_2) \sin \alpha = 2F_1 \sin \alpha = G. \quad (1)$$

Sila \vec{F}_1 (npr.) nateže žicu duljine $L/2 = \overline{AC}$ i produljuje ju u duljinu \overline{AD} . Dakle, prema definiciji Youngovog modula elastičnosti imamo, uz $\cos \alpha = \overline{AC}/\overline{AD}$

$$\frac{F_1}{S} = E \cdot \frac{\overline{AD} - \overline{AC}}{\overline{AC}} = E \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \quad (2)$$

pa uz jednadžbu (1) imamo:

$$G = 2SE \sin \alpha \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} = 2SE(\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha). \quad (3)$$

Gornja jednadžba (za nepoznati kut α) vodi na jednadžbu četvrtog stupnja (u $\sin \alpha$) pa je rješavamo numerički, uz oznaku $\gamma \equiv G/2SE = 9,36786 \times 10^{-5}$. Jednostavnim uzastopnim pokušajima lociranja nultočke funkcije $f(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha - \gamma$ pomoću džepnog računala, dobićemo rezultat $\alpha_0 = 0,005720556 = 3^{\circ}16'39,49''$. Iz tog rezultata dobićemo da se žica za $h = \overline{CD}$ spustila u srednjem dijelu, odnosno

$$h = \frac{L}{2} \operatorname{tg} \alpha = 11,45 \text{ cm.}$$

Zadatak 1.1 Bakrena žica duljine $L = 10,00 \text{ m}$ pričvršćena je na jednom kraju, a na drugom je opterećena silom od $200,00 \text{ N}$ pa se zato produljila za $\Delta L = 0,40 \text{ cm}$. Kolika je relativna kontrakcija ("stisnuće") žice δ_x , a koliki je bio početni polumjer žice?

RJEŠENJE: $\delta_x = -0,00016$; $r_0 = 1,129 \text{ mm}$

Zadatak 1.2 Čelična žica duljine 50 m slobodno vertikalno visi pričvršćena na jednom (gornjem) kraju. Za koliko se žica produljila zbog vlastite težine? Gustoća željeza je 7800 kg/m^3 .

RJEŠENJE: $\delta L = 0,48 \text{ mm}$



Anizotropnost materijala Za neke materijale nije svejedno u kojem smjeru djeluje sila, odnosno materijal ima različita svojstva u različitim smjerovima. Takve materijale koji općenito imaju različita svojstva (optička, toplinska, električna) u različitim smjerovima, zovemo *anizotropnim materijalima*, za razliku od *izotropnih materijala*. Za anizotropne materijale, sa stanovišta naprezanja, veličina σ ovisit će o smjeru djelovanja sile. Primjerice, ako sila djeluje u proizvoljnom smjeru, možemo je rastaviti na normalnu komponentu F_N i na paralelnu komponentu F_P pa možemo definirati odgovarajuća naprezanja

$$\sigma_N = F_N/S = |\vec{F}| \cos \alpha / S \quad \sigma_P = F_P/S = |\vec{F}| \sin \alpha / S. \quad (1-9)$$

Vidimo da u tom najjednostavnijem slučaju naprezanje može imati dvije različite komponente $\sigma = (\sigma_N, \sigma_P)$. Općenito je naprezanje za anizotropne materijale veličina koja ima više komponenata i takva veličina zove se *tenzor*. Njegove komponente stavljamo u odgovarajuću matricu, čija dimenzija ovisi o broju komponenata. Tako su i vektori u stvari *tenzori prvog reda* (s 3^1 komponenti). "Pravi" tenzori imaju

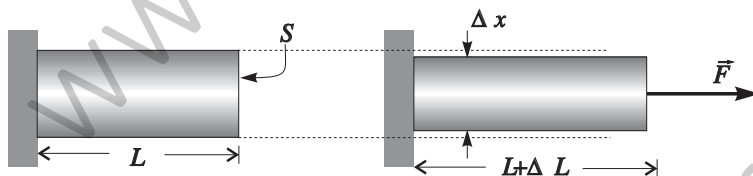
$3^2 = 9$ komponenti ili $3^3 = 27$ komponenti itd. (Skalar je *tenzor nultog reda* s $3^0 = 1$ komponenti!)

Tipični anizotropni materijal je drvo: iz iskustva znamo da će drveni stup bolje “držati” ako ga opteretimo u smjeru njegovih vlakana, a da pri naprežanju drveta okomito na smjer vlakana do izražaja dolazi elastičnost drveta. To je iskazano i u podacima u tablicama 1.1 i 1.2.

Poissonov[†] broj (omjer) Eksperimentalno je utvrđeno, a intuitivno i za očekivati, da se materijal zbog rastezanja u duljinu steže u svim smjerovima okomito na smjer rastezanja. Ako se radi o *longitudinalnom rastezanju*, javlja se, dakle, *lateralno stezanje*. Veličina koja opisuje lateralno stezanje (kontrakciju) zove se *Poissonov broj* i definiran je ovako:

$$\mu = -\frac{\delta_x}{\delta L} = -\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta L}{L}}, \quad (1-10)$$

gdje je δ_x relativna deformacija u *lateralnom smjeru*, odnosno u smjeru okomitom na produljenje ΔL (v. sliku 1.5). Očigledno je μ pozitivna veličina, jer je $\Delta x < 0$.



Slika 1.5 - Vlačno naprežanje i lateralno (poprečno) stezanje (kontrakcija) štapa

U idealnoj je situaciji, odnosno u situaciji kad možemo zamisliti da nema promjene volumena zbog istovremenog produljenja u jednom i stezanja u drugom smjeru, Poissonov broj dan slijedećim razmatranjem: neka je predmet - valjak polumjera r i duljine L , napregnut na vlak (kao na slici 1.5). Njegov je volumen (prije deformacije) jednak $V = r^2\pi L$ pa je $V + dV = r^2\pi L + 2r\pi L dr + r^2\pi dL = V$! Prema tome je

$$dV = 0 \Rightarrow 2r\pi L dr = -r^2\pi dL, \quad (1-11a)$$

što nakon dijeljenja s $r^2\pi L$ daje

$$2\frac{dr}{r} = -\frac{dL}{L} \quad \text{tj.} \quad \mu = \frac{1}{2}. \quad (1-11b)$$

Podaci za Poissonov broj μ za neke materijale dani su u tablici 1.3.

1.4 Tlačno naprežanje - naprežanje na tlak

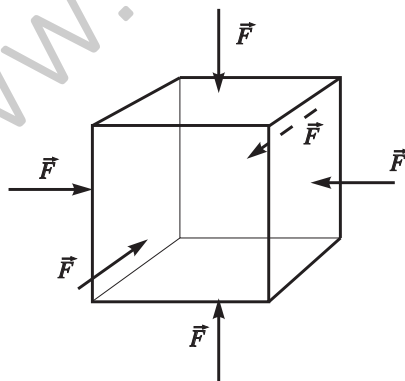
Neka je od materijala koji razmatramo napravljena kocka i neka na stranice sa svih strana (v. sliku 1.6) djeluju jednake sile. (Najjednostavnije je zamisliti predmet

[†] Siméon Denis Poisson (1781.-1840.) - francuski fizičar i matematičar

- kocku u ovom slučaju - koji se nalazi u kompresijskoj komori, odnosno u prostoru u kojem je moguće postići visoki tlak koji predstavlja upravo situaciju sa slike 1.6. Situacija je analogna tlaku na tijelo uronjeno u fluid.) Zbog naprezanja σ doći će do deformacije koja predstavlja promjenu (smanjenje) volumena. Prema jednadžbi (1-1) uvodimo *volumni modul elastičnosti* B koji je, dakle, jednak

$$B = -\frac{\sigma}{\delta_V} = -\frac{F/S}{\Delta V/V}. \quad (1-12)$$

Negativan predznak ispred razlomka javlja se zato što je uobičajeno definirati modul elastičnosti tako da su oni pozitivni, a kako je $\Delta V < 0$ (volumna *kontrakcija* tijela), negativni predznak rezultira u pozitivnom modulu B , čije su vrijednosti za neke materijale dane u tablici 1.1.



Slika 1.6 - Naprezanje na tlak (tlačno naprezanje)

Naprezanje na tlak češće se razmatra kod tekućina (vidi tablicu 1.4) (i plinova), gdje se, međutim, često uvodi i veličina *kompresibilnost* κ , koja je jednaka

$$\kappa \equiv \frac{1}{B} = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p}, \quad (1-13)$$

odnosno kompresibilnost opisuje promjenu volumena (fluida, najčešće) kao posljedicu tlaka kojem je izvrnut fluid. Podaci o volumnom modulu elastičnosti za neke materijale dani su u tablici 1.1.

Veza između Youngovog modula elastičnosti E i volumnog modula elastičnosti B Razmotrimo li promjenu volumena tijela zbog djelovanja naprezanja na tlak, onda možemo ukupno djelovanje (promjenu volumena) prvo rastaviti na tri pojedinačna na taj način da promotrimo kontrakciju jedne stranice - a npr. (modul elastičnosti E) ali i dilataciju (produljenje) drugih dviju stranica - b i c , prema Poissonovom omjeru,

tj. (vidi sliku 1.7 na kojoj je prikazan suprotan efekt: zbog rastezanja jedne stranice l došlo je do kontrakcije drugih dviju)

$$\begin{aligned} V + \Delta V_a &= (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) \\ &= (a + \Delta a) \left(b - b\mu \frac{\Delta a}{a} \right) \left(c - c\mu \frac{\Delta a}{a} \right) \\ &= abc - a \frac{\sigma}{E} bc - acb\mu \frac{\Delta a}{a} - ab\mu c \frac{\Delta a}{a}, \end{aligned} \quad (1-14a)$$

gdje smo zanemarili (vrlo male) umnoške poput $\Delta a \Delta b$ itd. Sređivanjem gornjih izraza dobićemo

$$V + \Delta V_a = V - V \left(\frac{\sigma}{E} - 2\mu \frac{\sigma}{E} \right) = V - V \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu). \quad (1-14b)$$

Zbog kontrakcije u b smjeru, dolazi do “napuhavanja” u a i c smjeru, a isto tako i kod kontrakcije u c smjeru. Ukupna promjena volumena je jednaka

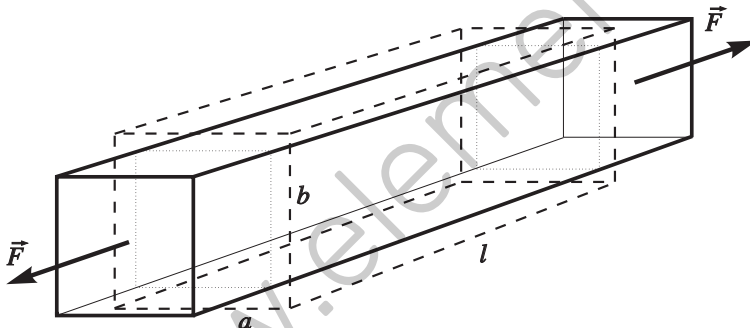
$$\Delta V = \Delta V_a + \Delta V_b + \Delta V_c = -3V \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu), \quad (1-15a)$$

što nakon dijeljenja s $-V$ vodi na izraz

$$-\frac{\Delta V}{V} = \frac{\sigma}{B} = 3 \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu), \quad \text{ili} \quad (1-15b)$$

$$\boxed{E = 3B(1 - 2\mu)}$$

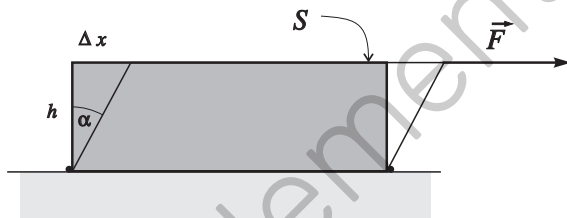
što je tražena veza između Youngovog modula elastičnosti E (1-8b), volumnog modula elastičnosti B (1-12) i Poissonovog omjera (1-10).



Slika 1.7 - Promjena cjelokupnog oblika tijela zbog naprezanja na vlak.

1.5 Smicanje - torzijsko naprezanje (smik)

Naprezanje na smicanje nastaje kada je sila F usmjerena tangencijalno jednoj površini, dok je druga, njoj paralelna površina, učvršćena (v. sliku 1.8).



Slika 1.8 - Smicanje - donja je površina učvršćena

Relativnu deformaciju pri smicanju definiramo kao odnos pomaka gornje stranice (površine S) na koju djeluje sila (paralelno s površinom S) i debljine materijala h , odnosno razmaka između donje i gornje površine. Dakle, (prema (1-5c) uz $\delta_\phi \rightarrow \delta_x$)

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{h} \quad (1-16)$$

pa *modul smicanja* G možemo opisati na slijedeći način

$$G = \frac{\text{napr. na smicanje}}{\text{rel. deformacija}} = \frac{F/S}{\Delta x/h}. \quad (1-17)$$

Veličine modula smicanja za različite materijale dane su u tablici 1.1. Maksimalna čvrstoća materijala s obzirom na smicanje dana je u tablici 1.2. Može se uočiti da je modul torzije G oko tri puta manji od Youngovog modula elastičnosti E , odnosno $G \simeq E/3$.

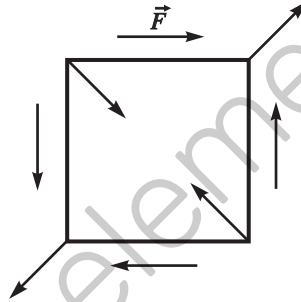
Do smicanja (torzije u užem smislu) dolazi i pri zakretanju valjkastog tijela (okruglog štapa, žice i sl.) kada je jedna baza valjka učvršćena, a par sila djeluje svojim momentima na površinu paralelnu učvršćenoj. I u tom slučaju dolazi do relativnog pomaka slojeva štapa, slojeva paralelnih učvršćenoj bazi. Pri tom se naprezanju javlja unutarnji moment elastičnih sila, koji je po iznosu jednak

$$M = \frac{G\pi R^4}{2L}\phi \equiv D\phi, \quad (1-18)$$

gdje je G modul smicanja, R polumjer valjka (žice, štapa), L visina valjka (duljina žice), a ϕ je kut zakreta (vidi dodatak poglavlju 1. za izvod tog izraza). Konstanta proporcionalnosti između momenta i kuta zakreta zove se konstanta torzije, a simbol D podsjeća na stari (i suštinski pogrešan) naziv "direkcijska sila".

1.6 Veze između modula elastičnosti

Pri naprezanju na smicanje dolazi do promjene oblika tijela, a djelovanje sila prikazano je na slici 1.9.



Slika 1.9 - Ravnoteža sila i momenata i smjerovi naprezanja pri torzijskom naprezanju

Vanjska sila (koja djeluje na gornju površinu i daje torzijsko naprezanje) uzrokuje istovremeno rastezanje tijela duž jedne dijagonale (kvadrata na slici), odnosno stezanje duž druge dijagonale. Promjena oblika tijela - kvadrata stranice L , prikazana je na slici 1.10, iz koje možemo izvesti dilataciju dijagonale duljine $L\sqrt{2}$. Produljenje δL jednako je $L\alpha/\sqrt{2}$, za mali kut $\alpha/2$. Relativna deformacija jednaka je

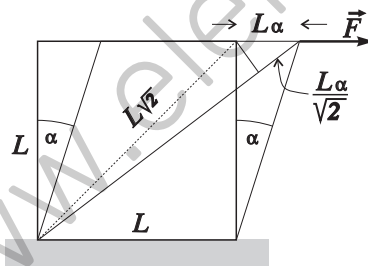
$$\delta L = \frac{\delta L}{L\sqrt{2}} = \frac{\alpha}{2}, \quad (1-19)$$

a ona je, s druge strane, ovako povezana s Poissonovim omjerom (prema (1-14b), ali ovdje sa suprotnim predznakom zbog produljenja u samo jednom smjeru)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta L}{L} &= \frac{\alpha}{2} + \mu \frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma}{E} + \mu \frac{\sigma}{E} \\ &= \frac{\sigma}{E}(1 + \mu) = \frac{\sigma}{2G}, \end{aligned} \quad (1-20)$$

što, uz (1-15b) daje dvije veze između modula elastičnosti

$$\boxed{E = 2G(1 + \mu)} \quad \boxed{G = (1 - 2\mu)3B/[2(1 + \mu)]} \quad (1-21a)$$



Slika 1.10 - Promjena oblika tijela pri torzijskom naprezanju

Sređivanjem gornjeg izraza (eliminacijom Poissonovog omjera), dolazimo do sljedeće veze između Youngovog modula elastičnosti E , volumnog modula elastičnosti B i modula torzije G .

$$\boxed{\frac{1}{E} = \frac{1}{3G} + \frac{1}{9B}} \quad (1-21b)$$

1.7 Energija pri elastičnom naprezanju

Za deformaciju predmeta valja izvršiti rad koji odgovara djelovanju sile koja daje naprezanje na putu koji predstavlja produljenje predmeta, odnosno možemo napisati da je za naprezanje na vlak sila u materijalu jednaka

$$F(\Delta L) = -SE \cdot \frac{\Delta L}{L} \quad (1-22)$$

pa je izvršeni (infinitesimalni) rad jednak

$$dW = F(\Delta L)d(\Delta L), \quad \text{odnosno} \\ W = -\frac{SE}{L} \int_0^{\Delta L} \Delta L d(\Delta L) = -\frac{SE}{L} \int_0^{\sigma L/E} \Delta L d(\Delta L) = -\frac{SE}{2L} (\Delta L)^2, \quad (1-23)$$

a taj je rad (nasuprot elastične sile u materijalu) jednak potencijalnoj energiji (“spremljenoj” u materijalu)

$$E_p = \frac{SE}{2L} (\Delta L)^2 = \frac{\sigma^2}{2E} S \cdot L \quad (1-24)$$

i ako uvedemo gustoću energije \mathcal{E} kao omjer ukupne (potencijalne) energije i volumena, dobićemo

$$\mathcal{E} = \frac{E_p}{V} = \frac{E_p}{L^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2}{E} \right). \quad (1-25)$$

Vidimo da gustoća energije \mathcal{E} ne ovisi o dimenziji predmeta, nego samo o njegovim elastičnim svojstvima!

Primjer 1.3 Dječak ima pračku koja je napravljena od (dviiju) okruglih gumenih traka duljine 25,0 cm, promjera ($2r$) 4,00 mm i Youngovog modula elastičnosti $E = 7,00 \times 10^6 \text{ N/m}^2$. Koliko jako mora rastegnuti gumene trake pračke, ako želi puknuti kamen mase 10,0 g brzinom od 150 km/h? (Zanemarite uzdužnu promjenu dimenzije gume!)

RJEŠENJE Iz definicije Youngovog modula elastičnosti E :

$$E = \frac{\text{naprezanje}}{\text{relativna deformacija}} = \frac{\sigma}{\delta} = \frac{F/S}{\Delta \ell / \ell}$$

dobiva se sila ovisna o udaljenosti (primjerice x)

$$F = \frac{ES}{\ell} \Delta \ell \rightarrow F(x) = \frac{ES}{\ell} x.$$

$F(x)$ je sila kojom djeluje jedna gumena traka kada se produlji od ℓ za x . Pri rastezanju pračke izvrši se rad (jedna traka)

$$W_1 = \int F(x) dx = \frac{ES}{2\ell} (\Delta x)^2,$$

a za dvije trake $W_2 = (ES/\ell)(\Delta x)^2$. Taj se rad prvo pretvori u potencijalnu energiju rastegnutih gumenih traka, a ta se potencijalna energija pretvori u kinetičku energiju kamena:

$$W_2 = E_p = \frac{ES}{\ell} (\Delta x)^2 = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{pa je}$$
$$\Delta x = v \sqrt{\frac{m\ell}{2ES}} = 15,7 \text{ cm.}$$

