1. Linearna algebra s matričnim računom

1.1. Matrice

1.1.1. Definicija matrice i tipovi matrica

DEFINICIJA 1.1.

Matrica A formata (reda) (m,n) ili $m \cdot n$ je pravokutna shema elemenata $a_{i,j}$ koji su poredani u m redaka i n stupaca.

Matricu A pisat ćemo eksplicite na sljedeći način:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{i,j}], \quad \begin{pmatrix} i \in \{1,2,\dots,m\} \\ j \in \{1,2,\dots,n\} \end{pmatrix}.$$

Skup *svih* matrica označavat ćemo s $\mathcal{M}$.

Što su elementi matrice A? Elementi matrice A općenito pripadaju nekom skupu. U ovom udžbeniku elemente matrice uzimat ćemo u pravilu iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$, to jest uzimat ćemo da su $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ za sve uređene parove (i,j). Prvi indeks (i) označava redak u kojem se razmatrani element nalazi, a drugi indeks (j) stupac u kojem se razmatrani element nalazi.

PRIMJER 1.1.

Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & \sqrt{2} \\ \pi & 0 & 1 & 0,1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -\sqrt[3]{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Čemu je jednak element na mjestu ili poziciji $(1,2)$, a čemu element na poziciji $(2,1)$?

Rješenje. Očito je na presjeku prvog retka i drugog stupca 0, to jest $a_{12} = 0$, a na presjeku drugog retka i prvog stupca π, to jest $a_{21} = \pi$.

Budući da je pozicija u matrici *svakog* elementa matrice *jednoznačno* određena pripadnošću razmatranog elementa određenom retku i određenom stupcu matrice, matrica se može definirati kao funkcija koja uređenom paru prirodnih brojeva pridružuje realni broj. Dakle, matrica je funkcija

$$A : \{1,2,\dots,m\} \times \{1,2,\dots,n\} \to \mathbb{R},$$

pri čemu vrijednost funkcije A na mjestu (i,j) označavamo s

$$A(i,j) = a_{i,j} \in \mathbb{R}.$$

Naravno, ako za elemente matrice odaberemo elemente nekog drugog skupa $\mathcal{A}$ a ne realne brojeve, onda je riječ o funkciji

$$A : \{1,2,\ldots,m\} \times \{1,2,\ldots,n\} \to \mathcal{A},$$

pri čemu je sada

$$A(i,j) = a_{i,j} \in \mathcal{A}.$$

Uobičajeno je da se matrice označavaju velikim slovima, a njeni elementi malim slovima latinice. Pri eksplicitnom se ispisu elementi matrice stavljaju u jedan od sljedećih parova zagrada:

$$\|\ \|, \quad [\ ] \quad \text{ili} \quad (\ ).$$

Oznaku $\|\ \|$ u ovom udžbeniku koristit ćemo u druge svrhe i, u pravilu, koristit ćemo se oznakom $[\ ]$.

Format matrice pokazuje koliko matrica ima elemenata $(m{\cdot}n)$ i na koji način su ti elementi poredani (u m redaka i n stupaca).

Skup svih matrica formata $m \cdot n$ označavat ćemo s $\mathcal{M}_{m,n}$ ili, jednostavno, s $\mathcal{M}_{mn}$.

PRIMJER 1.2.

Kojeg je formata matrica A iz primjera 1.1?

Rješenje. Budući da matrica A ima 3 retka i 5 stupaca, njen format je $(3,5)$. Dakle, možemo pisati da je $A \in \mathcal{M}_{3,5}$.

PRIMJER 1.3.

Koliko matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \\ \pi & -2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{2}{5} & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

imaju elemenata? U čemu je bitna razlika između navedenih dviju matrica?

Rješenje. I matrica A i matrica B imaju po 6 elemenata, ali oni su drugačije poredani. Tako je $A \in \mathcal{M}_{3,2}$, a $B \in \mathcal{M}_{2,3}$. Dakle, premda navedene matrice imaju jednak broj elemenata, one su različitog formata.

Općenito je broj redaka različit od broja stupaca, to jest općenito je $m \neq n$. Takve matrice zovemo *pravokutnim* matricama. Ako je $m = n$, matrica A je *kvadratna*. U posljednjem slučaju govorit ćemo da je matrica A reda n ili n-tog reda.

Skup svih matrica reda n označavat ćemo oznakom $\mathcal{M}_n$.

Glavna dijagonala kvadratne matrice $A \in \mathcal{M}_n$ sastavljena je od elemenata $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, a *sporedna dijagonala* matrice $A \in \mathcal{M}_n$ od elemenata $a_{n1}, a_{n-1,2}, \ldots, a_{1n}$.

Simetrična matrica je kvadratna matrica kod koje su elementi, simetrično raspoređeni s obzirom na glavnu dijagonalu, jednaki. Dakle, za simetričnu matricu vrijedi

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{za } \textit{sve} \text{ uređene parove indeksa } (i,j).$$

PRIMJER 1.4.

Pokažimo da je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & \pi & 0 & 5 \\ 3 & 0 & \frac{1}{2} & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

simetrična matrica.

Rješenje. Najprije uočimo da je riječ o kvadratnoj matrici. Doista, $A \in \mathcal{M}_4$, to jest riječ je o matrici četvrtog reda. Također uočimo da je

$$\begin{aligned} &a_{12} = a_{21} = 2, \quad a_{13} = a_{31} = 3, \quad a_{14} = a_{41} = 4, \\ &a_{23} = a_{32} = 0, \quad a_{24} = a_{42} = 5, \quad a_{34} = a_{43} = 6, \end{aligned}$$

to jest

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{za } \textit{sve} \quad i,j \in \{1,2,3,4\},$$

a to upravo i znači da je matrica A simetrična matrica četvrtog reda.

Uočimo da na glavnoj dijagonali simetrične matrice mogu biti bilo koji realni brojevi.

Antisimetrična (*kososimetrična*) matrica je kvadratna matrica za koju vrijedi:

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \text{za sve} \quad (i,j). \tag{1.1}$$

PRIMJER 1.5.

Pokažimo da je matrica

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

antisimetrična matrica.

Rješenje. Ponovo najprije uočimo da je riječ o kvadratnoj matrici. Doista, $B \in \mathcal{M}_3$, to jest riječ je o matrici trećeg reda. Također uočimo da je

$$b_{12} = -b_{21} = 1, \quad b_{13} = -b_{31} = 2, \quad b_{23} = -b_{32} = 3, \quad b_{11} = b_{22} = b_{33} = 0,$$

to jest

$$b_{ij} = -b_{ji} \quad \text{za } sve \quad i,j \in \{1,2,3,4\},$$

a to upravo i znači da je matrica B antisimetrična matrica trećeg reda. Uočimo da su svi dijagonalni elementi matrice B jednaki 0.

PROPOZICIJA 1.1.

Na glavnoj dijagonali antisimetrična matrica ima sve elemente jednake nuli.

Dokaz. Doista, budući da za antisimetričnu matricu vrijedi

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \text{za sve} \quad (i,j),$$

to za elemente na glavnoj dijagonali $(j = i)$ vrijedi jednakost

$$a_{ii} = -a_{ii} \quad \text{za sve} \quad i,$$

a to znači da je $2a_{ii} = 0$ za sve i, to jest $a_{ii} = 0$ za sve i, što je i trebalo dokazati. ■

Netom dokazana propozicija upućuje nas da pri provjeri je li kvadratna matrica antisimetrična ili ne, najprije moramo provjeriti jesu li svi dijagonalni elementi jednaki 0, a tek ako utvrdimo da jesu, razmatramo je li ispunjena jednakost (1.1) . Naravno, ima mnoštvo (kvadratnih) matrica koje na glavnoj dijagonali imaju same 0, ali nisu antisimetrične. Dakle, propozicijom 1.1 izrečen je nužan ali ne i dovoljan uvjet da bi neka matrica bila antisimetrična.

Dijagonalna matrica je kvadratna matrica za koju je $a_{ij} = 0$ čim je $i \neq j$, to jest kod nje su *svi* nedijagonalni elementi jednaki 0.

PRIMJER 1.6.

Matrica

$$D = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

je dijagonalna matrica četvrtog reda.

Uočimo da nisu nužno svi elementi glavne dijagonale kod dijagonalne matrice različiti od 0.

Skalarna matrica je dijagonalna matrica za koju je

$$a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = s,$$

to jest skalarnu matricu karakteriziraju sljedeće dvije činjenice:

(1) svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki su 0 i

(2) svi su elementi na glavnoj dijagonali jednaki.

PRIMJER 1.7.

Matrica

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

je skalarna matrica četvrtog reda.

Jedinična matrica (koristit ćemo oznaku: I) je skalarna matrica s jedinicama na glavnoj dijagonali, to jest za nju vrijedi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad i = j \\ 0 & \text{za} \quad i \neq j \end{cases}.$$

PRIMJER 1.8.

Matrica

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

je jedinična matrica četvrtog reda.

Napomenimo da ako iz konteksta nije jasno o jediničnoj matrici kojeg reda je riječ, to ćemo istaknuti. Naime, i matrica drugog reda

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i matrica trećeg

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jesu jedinične matrice (i zato koristimo istu oznaku), ali prva matrica je jedinična matrica drugog reda, a druga trećeg reda.

Nul-matrica (oznaka: O) je matrica koja ima sve elemente jednake 0. Uočimo da je svaka kvadratna nul-matrica skalarna.

PRIMJER 1.9.

Matrica $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ je nul-matrica formata $(6, 2)$.

Premda ćemo s O označavati nul-matricu bez obzira na njen format, iz konteksta će uvijek biti jasno na koju nul-matricu se misli.

Gornja trokutasta matrica je kvadratna matrica oblika

$$G = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

to jest za gornju trokutastu matricu vrijedi

$$a_{ij} = 0 \ \text{ čim je } \ i > j.$$

Donja trokutasta matrica je matrica oblika

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

to jest za nju vrijedi da je

$$a_{ij} = 0 \ \text{ čim je } \ j > i.$$

Pod pojmom *vektor-redak* podrazumijevat ćemo matricu koja ima samo jedan redak, a pod pojmom *vektor-stupac* matricu koja ima samo jedan stupac.

PRIMJER 1.10.

Matrica

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

je vektor-stupac. Riječ je o vektoru koji ima 6 elemenata (komponenata); reći ćemo da je matrica (ili, jednostavno, vektor) 6-komponentni vektor.

PRIMJER 1.11.

Matrica

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

je vektor-redak koji ima 6 elemenata (komponenata).

Trag kvadratne matrice A reda n jednak je zbroju dijagonalnih elemenata te matrice, to jest trag kvadratne matrice A n-tog reda je funkcija $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$ što se definira na skupu svih kvadratnih matrica $\mathcal{M}_n$ na sljedeći način:

$$\mathrm{Tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1.1.2. Jednakost matrica i uređaj u skupu $\mathcal{M}_{mn}$

Matrice $A, B \in \mathcal{M}_{mn}$ jesu *jednake* ako i samo ako su im svi korespondentni elementi jednaki, to jest one su jednake ako i samo ako su:

(1) istog formata (dakle, obje moraju biti iz skupa $\mathcal{M}_{mn}$) i

(2) ako su im svi korespondentni elementi jednaki (to jest, $a_{ij} = b_{ij}$ za sve uređene parove indeksa (i, j)).

Izrekom "*ako i samo ako*" (može se reći i *nužno i dovoljno je* ili *onda i samo onda*) iskazuju se dvije tvrdnje: prva tvrdnja (*nužnost*) jest da ako su matrice A i B jednake, onda moraju vrijediti (1) i (2), a druga tvrdnja (*dovoljnost*) jest da ako vrijede (1) i (2), matrice A i B jesu jednake. Koristeći se znakom ekvivalencije, simbolički jednakost dviju matrica možemo zapisati ovako:

$$A = B \iff [A, B \in \mathcal{M}_{mn} \;\text{ i }\; a_{ij} = b_{ij} \;\text{ za sve } (i, j)].$$

PRIMJER 1.12.

Matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} \\ -3 & \pi \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} \\ -3 & \pi \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

su različitog formata ($A \in \mathcal{M}_{3,2}$, $B \in \mathcal{M}_{4,2}$), pa nisu jednake.

PRIMJER 1.13.

Matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0,5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} \sin\frac{3\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{3} \\ \cos 0 & \sin\pi \end{bmatrix}$$

su jednake, jer je riječ o matricama istog reda $(A, B \in \mathcal{M}_2)$ i svi korespondentni elementi su im jednaki budući da je

$$\sin\frac{3\pi}{2} = -1, \quad \cos\frac{\pi}{3} = 0,5, \quad \cos 0 = 1, \quad \sin\pi = 0.$$

U skup $\mathcal{M}_{mn}$ svih matrica formata (m,n) uvodi se *uređaj* na sljedeći način:

$$A \leqslant B \iff [A, B \in \mathcal{M}_{mn} \text{ i } a_{ij} \leqslant b_{ij} \text{ za sve } (i,j)].$$

to jest matrica A je "*manja ili jednaka*" matrici B ako za sve korespondentne elemente matrica A i B vrijedi

$$a_{ij} \leqslant b_{ij},$$

gdje je $\leqslant$ uobičajena oznaka za manje ili jednako u skupu $\mathbb{R}$. Dakle, uređaj u skupu $\mathcal{M}_{mn}$ definiramo pomoću uređaja u skupu $\mathbb{R}$. S ovako definiranom relacijom $\leqslant$ skup $\mathcal{M}_{mn}$ je *parcijalno* (*djelomično*) *uređen skup*, to jest za $(\mathcal{M}_{mn}, \leqslant)$ vrijedi:

(1) $A \leqslant A$ za sve $A \in \mathcal{M}_{mn}$ (*refleksivnost relacije* $\leqslant$),

(2) $A \leqslant B$ i $B \leqslant C \implies A \leqslant C$ za sve $A, B, C \in \mathcal{M}_{mn}$ (*tranzitivnost relacije* $\leqslant$),

(3) $A \leqslant B$ i $B \leqslant A \implies A = B$ za sve $A, B \in \mathcal{M}_{mn}$ (*antisimetričnost relacije* $\leqslant$).

Dokaz da relacija $\leqslant$ ima u skupu $\mathcal{M}_{mn}$ svojstva (1)-(3) temelji se na činjenici da ta svojstva relacija $\leqslant$ ima u skupu $\mathbb{R}$. Predlažemo čitatelju da dokaze navedenih svojstava provede za vježbu.

PRIMJER 1.14.

Matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

su različitog formata ($A \in \mathcal{M}_2$, $B \in \mathcal{M}_3$), pa nisu usporedive.

Naravno, nužan uvjet koji moraju zadovoljavati matrice A i B da bi bile usporedive pomoću uređaja $\leqslant$ jest da su istog formata, to jest da pripadaju istom skupu $\mathcal{M}_{mn}$.

NAPOMENA 1.1.

$(\mathcal{M}_{mn}, \leqslant)$ nije potpuno uređen skup, jer bilo koje dvije matrice iz skupa $\mathcal{M}_{mn}$ ne moraju biti usporedive. Doista, za matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ne vrijedi ni $A \leqslant B$ ni $B \leqslant A$.

Zadaci 1.1.

1. Postoje li realni brojevi a i b za koje bi matrica

$$A = \begin{bmatrix} a+2b & 3a-b & -a \\ 2b & a & -b \\ -ab & a-2b & 2a \end{bmatrix}$$

bila simetrična? Ako postoje, odredite ih i napišite matricu A.

2. Ispišite sve elemente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \pi & 5 & -1 \\ . & 0 & \pi & 5 \\ . & . & 0 & \pi \\ . & . & . & 0 \end{bmatrix}$$

tako da ona bude antisimetrična.

3. Ispitajte koje su od sljedećih matrica simetrične:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$; **b)** $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$;

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$; **d)** $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Zašto?

4. Ispitajte koje su od sljedećih matrica antisimetrične:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$; **b)** $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; **c)** $C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & \pi \\ 2 & 0 & 7 \\ \pi & -7 & 0 \end{bmatrix}$;

d) $D = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$; **e)** $E = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$; **f)** $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Zašto?

5. Postoje li realni brojevi a i b za koje su matrice:

a) $A = \begin{bmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a & b & a \end{bmatrix}$; **b)** $B = \begin{bmatrix} a & -b & a \\ b & -a & b \\ a & -b & a \end{bmatrix}$; **c)** $C = \begin{bmatrix} a^2 & ab & a \\ 1 & a & b \\ a & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) simetrične, (2) antisimetrične? Ako postoje, odredite ih.

6. Ispišite sve elemente matrice A tako da ona bude simetrična ako je:

a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ . & 9 & 7 & 5 \\ . & . & 0 & 1 \\ . & . & . & 8 \end{bmatrix}$; **b)** $A=\begin{bmatrix} \sqrt[3]{3} & \sqrt{3} & 3 \\ . & 1 & . \\ . & -2 & \pi \end{bmatrix}$; **c)** $A=\begin{bmatrix} 1,23 & -23 \\ . & 5,87 \end{bmatrix}$.

7. Ispišite sve elemente matrice A tako da ona bude antisimetrična ako je:

a) $A=\begin{bmatrix} . & 3 & 5 & . \\ . & . & 7 & . \\ . & . & . & 1 \\ 7 & 5 & . & . \end{bmatrix}$; **b)** $A=\begin{bmatrix} . & \sqrt{3} & 3 \\ . & . & . \\ . & -2 & . \end{bmatrix}$; **c)** $A=\begin{bmatrix} . & -\sqrt{2} \\ . & . \end{bmatrix}$.

8. Odredite trag sljedećih matrica:

a) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; **b)** $B=\begin{bmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 1 & -2 & 33 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$; **c)** $A=\begin{bmatrix} 22 & 93 & 19 \\ -1 & 33 & -3 \\ -3 & -1 & -9 \end{bmatrix}$.

9. Odredite parametre a i b takve da matrica D bude dijagonalna ako je:

a) $D=\begin{bmatrix} a & a+b & a-b \\ b & 2+a & b^2 \\ 3b & b^3 & 23 \end{bmatrix}$; **b)** $D=\begin{bmatrix} 1 & 2a+3b & a-3 & b-2 \\ 8-ab-b & 2 & 0 & b^2-4 \\ 0 & a-b-1 & 3 & a^2-9 \\ 0 & 0 & ab-6 & 4 \end{bmatrix}$.

Odredite trag navedenim matricama.

10. Za koje su realne brojeve a i b sljedeće matrice jednake:

$$A=\begin{bmatrix} a+b & a & a-b \\ ab & b & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & b & b \end{bmatrix}?$$

11. Odredimo sve brojeve $a, b \in \mathbb{R}$ takve da je $A \leqslant B$ ako je

$$A=\begin{bmatrix} a+b & a-b \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

12. Postoje li realni brojevi a i b za koje bi matrice:

a) $A_1=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ i $A_2=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$;

b) $B_1=\begin{bmatrix} a+b^2 & 1 & a-b \\ a+b & 2 & ab \\ a & 3 & a \end{bmatrix}$ i $B_2=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$;

c) $C_1=\begin{bmatrix} a^2 & ab & a \\ 1 & a & b \\ a & 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $C_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

bile jednake? Ako postoje, odredite ih.

13. Odredite za koji $a \in \mathbb{R}$ su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

neusporedive.

14. Odredite realne brojeve a i b takve da za matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2a-b & a+3b \\ a+b & a-b \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

vrijedi:

a) $A \leqslant B$; **b)** $B \leqslant A$; **c)** $A = B$.

15. Postoje li realni brojevi a i b takvi da za matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 3b \\ b & -a \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$$

vrijedi:

a) $A \leqslant B$; **b)** $B \leqslant A$; **c)** $A = B$?

1.2. Operacije s matricama

1.2.1. Zbrajanje matrica

DEFINICIJA 1.2.

Za proizvoljne matrice $A, B \in \mathcal{M}_{mn}$ definira se *zbroj* tih dviju matrica, oznaka $A + B$, kao matrica čiji elementi predstavljaju zbroj korespondentnih elemenata matrica A i B, to jest

$$A + B \stackrel{\text{def}}{=} [a_{ij} + b_{ij}] .$$

Uočimo da premda i za zbroj matrica A i B i za zbroj njihovih elemenata a_{ij} i b_{ij} (koji su iz skupa $\mathbb{R}$) koristimo istu oznaku: $+$, tu se radi o dvije binarne operacije definirane na različitim skupovima. Pri tome jednu definiramo aksiomatski (onu u skupu $\mathbb{R}$), a drugu (onu u skupu $\mathcal{M}_{mn}$) pomoću prve.

NAPOMENA 1.2.

Uočimo da iz definicije 1.17 slijedi da je $(\mathcal{M}_{mn},+)$ *grupoid* (skup koji je zatvoren s obzirom na razmatranu binarnu operaciju), to jest za proizvoljne $A, B \in \mathcal{M}_{mn}$ slijedi da je i $A + B \in \mathcal{M}_{mn}$.

PRIMJER 1.15.

Zadane su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -3 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Odredimo matricu $A + B$.

Rješenje. Uočimo da je i $A \in \mathcal{M}_{23}$ i $B \in \mathcal{M}_{23}$, pa je definirana matrica $A + B$ i za nju vrijedi da je iz $\mathcal{M}_{23}$. Koristeći se definicijom zbrajanja matrica nalazimo da je

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -4 & -3 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+7 & 5+(-4) & 4+(-3) \\ -2+(-2) & 0+(-1) & -1+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Svojstva operacije zbrajanja u skupu $\mathcal{M}_{mn}$

Za zbrajanje matrica vrijede sljedeći zakoni:

$(\mathcal{A}_1)$ $A + B = B + A$ za sve $A,\ B \in \mathcal{M}_{mn}$ (*zakon komutacije za* $+$),

$(\mathcal{A}_2)$ $(A + B) + C = A + (B + C)$ za sve $A, B, C \in \mathcal{M}_{mn}$ *zakon asocijacije za* $+$).

Dokaz da vrijedi zakon komutacije za zbrajanje matrica:

Neka su $A,\ B \in \mathcal{M}_{mn}$ proizvoljne matrice i neka je $A = [a_{ij}]$, a $B = [b_{ij}]$. Tada prema definiciji zbrajanja matrica slijedi da je

$$A + B \overset{\text{def.}}{=} [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] \overset{\text{def.}}{=} B + A.$$

(Uočimo da smo primijenili zakon komutacije za zbrajanje realnih brojeva.) Budući da navedeno vrijedi za proizvoljne matrice $A, B \in \mathcal{M}_{mn}$, to znači da u skupu $\mathcal{M}_{mn}$ vrijedi zakon komutacije za zbrajanje matrica.

Dokaz da vrijedi zakon asocijacije za zbrajanje matrica:

Neka su $A, B, C \in \mathcal{M}_{mn}$ proizvoljne matrice i neka je $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, a $C = [c_{ij}]$. Tada prema definiciji zbrajanja matrica slijedi da je

$$\begin{aligned}(A+B)+C &\overset{\text{def.}}{=} [a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}] = [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}] = [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})] \\ &\overset{\text{def.}}{=} [a_{ij}]+[b_{ij}+c_{ij}] \overset{\text{def.}}{=} A+(B+C)\,.\end{aligned}$$

(Sada smo primijenili asocijativnosti zbrajanja za realne brojeve.) Budući da navedeno vrijedi za proizvoljne matrice $A, B, C \in \mathcal{M}_{mn}$, to znači da u skupu $\mathcal{M}_{mn}$ vrijedi zakon asocijacije za zbrajanje matrica.

1.2.2. Množenje matrice sa skalarom

DEFINICIJA 1.3.

Za proizvoljnu matricu $A \in \mathcal{M}_{mn}$ i proizvoljni skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ definira se umnožak te matrice A i skalara α, oznaka αA, kao matrica čiji elementi predstavljaju umnožak skalara α i korespondentnih elemenata matrice A, to jest

$$\alpha A \overset{\text{def.}}{=} [\alpha a_{ij}]\,.$$

Dakle, ponovo jednu binarnu operaciju (ovaj put to je *množenje matrice sa skalarom*) definiranu na skupu $\mathbb{R} \times \mathcal{M}_{mn}$, definiramo pomoću binarne operacije (množenje realnih brojeva) definirane na drugom skupu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, budući da je iz konteksta jasno o kojoj binarnoj operaciji je riječ, koristimo se identičnom oznakom.

PRIMJER 1.16.

Ako je $\alpha = -2$, a $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$, izračunajmo αA.

Rješenje.

$$\begin{aligned}(-2)\,A = (-2)\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (-2)(-1) & (-2)\cdot 2 & (-2)\cdot 0 \\ (-2)\cdot 3 & (-2)(-2) & (-2)(-4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -6 & 4 & 8 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

NAPOMENA 1.3.

Ako je $\alpha = -1$, pišemo $(-1)A = -A$, to jest matrica A suprotna je matrici $-A$ (s obzirom na binarnu operaciju zbrajanje).

Lako se pokaže da je $A+(-A)=O$. Doista,

$$A+(-A)=[a_{ij}]+[-a_{ij}]=[a_{ij}+(-a_{ij})]=[0].$$

Na osnovi prethodnoga zaključujemo da nul-matrica O ima ulogu *neutralnog elementa* za zbrajanje matrica.

Budući da osim svojstava (A_1) i (A_2) vrijede i sljedeća svojstva:

$(\mathcal{A}_3)$ $(\forall A \in \mathcal{M}_{mn})(\exists! X \in \mathcal{M}_{mn})(A+X=X+A=O)$
(riječima: za bilo koju matricu A postoji jedna jedina matrica X sa svojstvom $A+X=X+A=O$; uočimo da je matrica X ustvari suprotna matrica matrice A, to jest $X=-A$ i, očito, za svaku matricu postoji jedna jedina matrica koja je njoj suprotna, što podrazumijeva da različite matrice imaju različite suprotne matrice),

$(\mathcal{A}_4)$ $(\exists! Y \in \mathcal{M}_{mn})(\forall A \in \mathcal{M}_{mn})(A+Y=Y+A=A)$
(riječima: postoji jedna jedina matrica Y takva da za bilo koju matricu A vrijedi $A+Y=Y+A=A$; uočimo da je matrica Y u stvari nul-matrica O formata kao i matrica A i, u stvari, riječ je o neutralnom elementu u skupu $\mathcal{M}_{mn}$ s obzirom na operaciju zbrajanja; dakle, neutralni element za zbrajanje jedinstven je za sve elemente razmatranog skupa),

zaključujemo da je $\mathcal{M}_{mn}$ *aditivna Abelova* (*komutativna*) *grupa*.[1]

Uočimo da se u $(\mathcal{A}_3)$ tvrdi da za *svaku* matricu postoji jedna jedina matrica s navedenim svojstvom, to jest najprije treba iz skupa $\mathcal{M}_{mn}$ odabrati bilo koju matricu i onda za *tu odabranu matricu* postoji samo jedna matrica koja joj je suprotna (s obzirom na operaciju zbrajanja), a u $(\mathcal{A}_4)$ se tvrdi da *postoji jedna jedina* matrica za *bilo koju matricu* s navedenim svojstvom.

Osim već navedenih svojstava $(A_1)-(A_4)$, vrijede i sljedeća svojstva:

$(\mathcal{A}_5)$ $(\forall A,B \in \mathcal{M}_{mn})(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B)$,
(riječima: za proizvoljne matrice A i B istog formata i proizvoljni skalar α vrijedi poludistributivnost množenja sa skalarom u odnosu na zbrajanje matrica, to jest $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$),

$(\mathcal{A}_6)$ $(\forall A \in \mathcal{M}_{mn})(\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R})((\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A)$,
(riječima: za bilo koju matricu A i bilo koje skalare α i β vrijedi poludistributivnost množenja sa skalarom u odnosu na zbrajanje skalara, to jest $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$),

$(\mathcal{A}_7)$ $(\forall A \in \mathcal{M}_{mn})(\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R})((\alpha\beta)A=\alpha(\beta A))$,
(riječima: za bilo koju matricu A i bilo koje skalare α i β vrijedi poluasocijativnost $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$),

[1] Neprazan skup G nazivamo grupom ako vrijedi sljedeće: (1) zadana je binarna operacija sa $G\times G$ u G, (2) navedena binarna operacija je asocijativna na G, (3) u G postoji neutralni element s obzirom na definiranu binarnu operaciju i (4) za svaki element iz G postoji suprotni element. Ako za definiranu binarnu operaciju vrijedi i zakon komutacije, kažemo da je grupa G komutativna ili Abelova. Detaljnije vidjeti, primjerice, u Kurepa, S., *Uvod u matematike*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970, str. 11-112.

($\mathcal{A}_8$) $(\forall A \in \mathcal{M}_{mn})(\exists! \alpha \in \mathbb{R})(\alpha A = A)$
(riječima: za bilo koju matricu A postoji jedan jedini skalar tako da vrijedi $\alpha A = A$; uočimo da je skalar α ustvari broj 1, to jest *neutralni element za množenje u skupu* $\mathbb{R}$).

Skup nad kojim su definirane operacije zbrajanja matrica i množenja matrice sa skalarom, takve da zadovoljavaju $(\mathcal{A}_1) - (\mathcal{A}_8)$, nazivamo *vektorskim* (*linearnim*) *prostorom nad* $\mathbb{R}$. Dakle, $\mathcal{M}_{mn}$ je s prethodno definiranim binarnim operacijama zbrajanja matrica i množenja matrice sa skalarom *vektorski* (*linearni*) *prostor nad* $\mathbb{R}$.

1.2.3. Linearna kombinacija matrica

DEFINICIJA 1.4.

Linearna kombinacija matrica $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_{mn}$ je matrica

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_k A_k, \tag{1.2}$$

pri čemu su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ koeficijenti linearne kombinacije.

Najprije uočimo da zapis (1.2) ima smisla. Naime, iz definicije množenja matrice sa skalarom za proizvoljne matrice

$$A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_{mn},$$

slijedi da su i matrice

$$\alpha_1 A_1, \alpha_2 A_2, \ldots, \alpha_k A_k \in \mathcal{M}_{mn}$$

za sve $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. No, budući da vrijedi zakon asocijacije za zbrajanje matrica, to je i matrica

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_k A_k \in \mathcal{M}_{mn}.$$

Dakle, relacija (1.2) jednoznačno određuje matricu iz $\mathcal{M}_{mn}$.

PRIMJER 1.17.

Izračunajmo matricu $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$ ako je $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -3$, $\alpha_3 = 1$, a

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
2A_1 + (-3)A_2 + 1A_3 &= 2\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6 & -3 \\ 3 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -8 & 4 \\ 7 & -11 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

DEFINICIJA 1.5.

Konveksna kombinacija matrica $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_{mn}$ je matrica

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_k A_k, \tag{1.3}$$

pri čemu su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \geqslant 0$ i $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$.

Uočimo da je konveksna kombinacija matrica poseban slučaj linearne kombinacije matrica.

PRIMJER 1.18.

Napišimo konveksnu kombinaciju matrica

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Budući da imamo dvije matrice, tražena konveksna kombinacija imat će dva koeficijenta α_1 i α_2 za koje mora vrijediti: α_1, $\alpha_2 \geqslant 0$ i $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Iz $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ slijedi da je $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$. No, budući da su i $\alpha_1 \geqslant 0$ i $\alpha_2 \geqslant 0$, to znači da koeficijent α_1 mora zadovoljiti sljedeći sustav linearnih nejednadžbi:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\geqslant 0 \\ 1 - \alpha_1 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Iz druge nejednadžbe slijedi da je $\alpha_1 \leqslant 1$, pa to znači da je $\alpha_1 \in [0, 1]$. Dakle, tražena konveksna kombinacija je vektor

$$A = \alpha_1 A_1 + (1-\alpha_1)A_2 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + (1-\alpha_1) \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_1 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2(1-\alpha_1) \\ -2(1-\alpha_1) \\ 1-\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1+2(1-\alpha_1) \\ 2\alpha_1-2(1-\alpha_1) \\ -\alpha_1+1-\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\alpha_1 \\ -2+4\alpha_1 \\ 1-2\alpha_1 \end{bmatrix},$$

pri čemu je $\alpha_1 \in [0,1]$. Uvedemo li supstituciju $\alpha_1 = \alpha$, imamo da je

$$A = \alpha A_1 + (1-\alpha)A_2 = \begin{bmatrix} 2-\alpha \\ -2+4\alpha \\ 1-2\alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in [0,1].$$

Uočimo da su u prethodnom primjeru matrice A_1 i A_2 vektori (stupci). Upravo konveksnu kombinaciju vektora (kao specijalnog slučaja konveksne kombinacije matrica) koristit ćemo poslije.

1.2.4. Oduzimanje matrica

U skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ oduzimanje brojeva $a, b \in \mathbb{R}$, to jest računanje broja $a - b$, definira se kao zbrajanje brojeva a i broja suprotnog broju b, $-b$. Dakle, za proizvoljne $a, b \in \mathbb{R}$ definira se

$$a - b \stackrel{\text{def.}}{=} a + (-b).$$

Analogno tome definira se i oduzimanje matrica. Naime, imamo sljedeću definiciju.

DEFINICIJA 1.6.

Za proizvoljne matrice $A, B \in \mathcal{M}_{mn}$ definira se njihova *razlika* kao matrica

$$A - B \stackrel{\text{def.}}{=} A + (-B).$$

NAPOMENA 1.4.

Iz definicije 1.6 slijedi da se dvije matrice mogu oduzeti samo ako su istog formata.

Dakle, binarna operacija oduzimanja matrica definirana je na skupu $\mathcal{M}_{mn} \times \mathcal{M}_{mn}$ s vrijednostima u skupu $\mathcal{M}_{mn}$ i to pomoću dviju binarnih operacija: zbrajanja matrica i množenja matrice sa skalarom (-1).

NAPOMENA 1.5.

Neka su matrice $A, B \in \mathcal{M}_{mn}$ proizvoljne. Tada je

$$A - B \stackrel{\text{def.}}{=} A + (-B) = [a_{ij}] + [-b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}],$$

što znači da je rezultat oduzimanja dviju proizvoljnih matrica istog formata $(A, B \in \mathcal{M}_{mn})$ matrica C iz skupa $\mathcal{M}_{mn}$ čiji elementi predstavljaju razliku korespondentnih elemenata matrica A i B, to jest $C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}$, pri čemu je $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

PRIMJER 1.19.

Zadane su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -3 & 4 & -9 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -5 \\ 8 & -3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Odredimo matricu $A - B$.

Rješenje. Uočimo da je i $A \in \mathcal{M}_{4,3}$ i $B \in \mathcal{M}_{4,3}$, pa je definirana matrica $A - B$ koja je također iz $\mathcal{M}_{4,3}$.

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -3 & 4 & -9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 8 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -5 \\ 8 & -3 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2-12 & 3-8 & -2-2 \\ 0-(-3) & -4-(-2) & 1-(-1) \\ 1-4 & 2-2 & -5-(-5) \\ -3-8 & 4-(-3) & -9-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -5 & -4 \\ 3 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \\ -11 & 7 & -17 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1.2.5. Skalarni umnožak vektora

DEFINICIJA 1.7.

Skalarni umnožak vektora-retka $A = [a_i] \in \mathcal{M}_{1n}$ i vektora-stupca $B = [b_i] \in \mathcal{M}_{n1}$ definira se na sljedeći način:

$$AB = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i. \tag{1.4}$$

Dakle, vektor-redak i vektor-stupac, koji imaju *jednak broj komponenata*, množe se tako da im se pomnože korespondentne komponente, a dobiveni umnošci onda se zbroje. Primijetimo da ukoliko vektor-redak i vektor-stupac nemaju jednak broj komponenata, nije definiran njihov (skalarni) umnožak.

PRIMJER 1.20.

Zadani su vektori

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 11 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo skalarni umnožak tih vektora. Je li i umnožak BA skalarni umnožak?

Rješenje. $AB = \sum_{i=1}^{5} a_i b_i = 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 11 \cdot 0 + 3 \cdot (-4) = 0\,.$

Uočimo da umnožak BA *nije* skalarni umnožak budući da je prvi faktor (matrica B) iz skupa $\mathcal{M}_{5,1}$ (dakle, vektor-stupac), a drugi faktor (matrica A) iz $\mathcal{M}_{1,5}$ (dakle, vektor-redak).

Također uočimo da prema definiciji 1.31 prvi faktor skalarnog umnoška *mora imati* onoliko stupaca koliko drugi faktor ima redaka.

1.2.6. Množenje matrica

DEFINICIJA 1.8.

Umnožak matrica $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{mk}$ i $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{kn}$ definira se na sljedeći način:

$$[AB]_{ij} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} b_{pj},$$

to jest umnožak matrice A formata $(\mathcal{M}, k)$ i matrice B formata (k, n) je matrica C formata $(\mathcal{M}, n)$ koja na poziciji (i, j) $(i \in \{1, 2, \ldots, \mathcal{M}\},\ j \in \{1, 2, \ldots, n\})$ ima element

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} b_{pj}.$$

Uočimo da element matrice $C = AB$ na poziciji (i, j) predstavlja skalarni umnožak i-tog retka prvog faktora i j-tog stupca drugog faktora, što možemo ilustrirati kao što je prikazano na slici 1.2.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{i,k\text{-}1}} & \mathbf{a_{ik}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,k-1} & a_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & \mathbf{b_{1j}} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \dots & \mathbf{b_{ij}} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \dots & \mathbf{b_{kj}} & \dots & b_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \dots & \mathbf{c_{ij}} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}.$$

Slika 1.2.

Dakle, umnožak matrica A i B definiran je samo ako prvi faktor ima upravo onoliko stupaca koliko drugi faktor redaka, to jest ako su kod formata *unutarnji indeksi jednaki*, što simbolički možemo pisati ovako:

Vanjski indeksi daju format umnoška AB (ako je on definiran!), to jest matrica AB je matrica formata $(\mathcal{M}, n)$, odnosno $AB \in \mathcal{M}_{mn}$.

Ako matrice A i B imaju svojstvo da A ima upravo onoliko stupaca koliko matrica B redaka, kažemo da su *ulančane*. Dakle, nužan uvjet koji moraju zadovoljiti matrice A i B da bismo ih mogli pomnožiti jest da su ulančane.

PRIMJER 1.21.

Zadane su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & \frac{2}{5} & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo matrice AB i BA. što možemo zaključiti?

Rješenje.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{2}{5} & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{12}{5} & -3 \\ -1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{2} \\ 4 & -\frac{6}{5} & -6 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & \frac{2}{5} & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{21}{5} & 10 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, za zadane matrice A i B definirano je i AB i BA. Međutim očito u ovom slučaju *nije* $AB = BA$. To znači da ovaj primjer predstavlja *dokaz* da *za množenje matrica općenito ne vrijedi zakon komutacije*.