1. Skupovi i funkcije

1.1. Naivna teorija skupova

Ovo je poglavlje posvećeno skupovima i funkcijama. Iz naše perspektive, skupovi i funkcije tvore elementarne didaktičke blokove, pa smo zato odlučili njima započeti, a i velik dio kasnijeg teksta pretpostavlja adekvatno poznavanje skupova i funkcija. Ovdje čitatelju dajemo samo nepotpuni uvod u teoriju skupova, a čitatelja kojeg zanimaju i ostali detalji upućujemo na [99], gdje će, uz gradivo koje je ovdje preneseno, naći ostale detalje i naprednije teme koje ovdje nisu reproducirane.

Teorija skupova koju ćemo u ovom poglavlju prikazati je takozvana naivna teorija skupova. Mi ćemo naivnu teoriju skupova predstaviti kao skupinu operatora koji se ponašaju na određene načine. Formalno govoreći, teorija skupova predstavlja se na bitno drukčiji način, preko aksioma, ali kako nam je ovdje cilj prvenstveno stvoriti preduvjete za razumijevanje daljenjeg teksta, predstavit ćemo je na jednostavan način. Kao elementaran i nedefiniran pojam uzimamo "A je član B", odnosno $A \in B$, gdje je B skup, a A je ili pojedinačni predmet ili skup. Strogo gledano, posebno unutar tradicije Zermelo-Fraenkelove teorije skupova (ZF), pojedinačni predmeti ne postoje, nego postoje samo skupovi[1]. U kontekstu naivne teorije skupova, minoran je tehnički problem ako uzmemo da članovi skupova mogu biti "pojedinačni predmeti" ili skupovi, ali je puno intuitivnije za prvi dodir s teorijom skupova. Poseban skup koji isto uzimamo je prazan skup, skup koji nema članova, koji označavamo sa $\emptyset$.[2]

[1] Pojedinačni predmeti se mogu reprezentirati uz pomoć brojeva, a to je najelegantnije napraviti takozvanom Von Neumannovom defincijom: 0 definiramo kao $\emptyset$, 1 definiramo kao $\{\emptyset\}$, 2 definiramo kao $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$, 3 definiramo kao $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$, itd.

[2] Premda je ovo standardna notacija, ponekad je intuitivno prazan skup zamišljati kao $\{\}$.

Naivnu teoriju skupova NTS čine aksiom ekstenzionalnosti, aksiom komprehenzije i aksiom izbora, koji određuju što je skup, no najčešće se uvodno izlaže kroz skupovne operatore koje iz postojećih skupova tvore nove (i na taj način zaobilazno odgovaraju na pitanje što je skup), ili daju da se skupovi stvore od svojstava, ili su kriterij jednakosti skupova [99]:

- Podskup: neka su A u B skupovi. Kažemo da je B podskup od A i pišemo $B \subseteq A$ ako i samo ako je svaki član B također član A.
- Ekstenzionalnost (ili skupovna jednakost): ako skupovi A i B imaju iste članove, onda je to jedan te isti skup, $A = B$.
- Unija: ako su A i B skupovi, onda je $A \cup B$ unija A i B, a to je skup koji sadrži sve članove A i sve članove B.
- Presjek: ako su A i B skupovi, onda je $A \cap B$ presjek A i B, a to je skup koji sadrži samo zajedničke članove A i B.
- Skupovna razlika: ako su A i B skupovi, onda je $A \setminus B$ skupovna razlika A i B, a taj skup sadrži samo članove A koji nisu članovi B.
- Komplement: za razliku od standardnih tekstova, komplement od A (u skupu B) smatramo pokratom za $B \setminus A$, ali u slučaju kada je B očit ili jasan; komplement od A pišemo $\bar{A}$.
- Partitivni skup: ako je A skup, onda je $\mathcal{P}(A)$ partitivni skup skupa A, a to je skup koji kao članove sadrži sve moguće njegove podskupove kao članove. Tako za svaki B, ako $B \subseteq A$, onda $B \in \mathcal{P}(A)$. Ako skup A ima n članova, tada njegov partitivni skup $\mathcal{P}(A)$ ima 2^n članova.
- Komprehenzija: ako je $SVOJS(x)$ neko svojstvo, tada svi predmeti koji zadovoljavaju to svojstvo tvore skup, koji zapisujemo kao $\{x|SVOJS(x)\}$.

Nekoliko napomena. Neka $A = \{0, 1, 2, 3\}$ i $B = \{1, 2\}$. Tada vrijedi $B \subseteq A$. Neka $A = \{1, 2\}$ i $B = \{1, 2\}$. Tada vrijedi $B \subseteq A$ i $A \subseteq B$ i prema ekstenzionalnosti slijedi $A = B$. Prema ekstenzionalnosti također vrijedi $\{0, 1\} = \{1, 0\} = \{1, 1, 0\} = \{0, 0, 1\} = \{0, 1, 0\} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0\}$. Zašto? Prema ekstenzionalnosti, ako dva skupa imaju *iste članove* (bez obzira na raspored, ili koliko puta se ponavljaju), tada su to isti skupovi. Prazan skup može biti član nekog drugog skupa, ali je po definiciji prazan skup *podskup* bilo kojeg skupa.

Neka su $A = \{0, 1, 2, 3\}$ i $B = \{1, 2\}$. Tada je $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\} = A$. Drugim riječima, B nije ništa novo donio u uniju (temeljem aksioma ekstenzionalnosti $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\} \cup \{1, 2\} = \{0, 1, 2, 3, 1, 2\} = \{0, 1, 2, 3\} = A$), pa je cijela unija ista kao i A. Neka su A i B dva skupa koji nemaju zajednički element, dakle $A \cap B = \emptyset$. Takve skupove nazivamo *disjunktnim.* Skup B iz definicije komplementa ($\bar{A} = B \setminus A$) naziva se *univerzumom.*

Ako $B \subseteq A$ i $A \neq B$ (ovo pišemo $B \subsetneq A$), onda $A \setminus B \neq \emptyset$. Uzmimo da je $A = \{a, b, c\}$, tada $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$. Uočite da je broj članova 2^3.

Komprehenziju smo ovdje predstavili kao princip, ali ona je jedan od dvaju aksioma naivne teorije skupova, i ona je onaj aksiom zbog kojeg se naivna teorija skupova ne može konzistentno aksiomatizirati. Da bismo shvatili problem, prvo napomenimo da bilo koji skup mora imati točno i jasno definirane članove. Naravno, skup može biti beskonačan (i puno veći od toga), ali u načelu, bi za bilo koji x trebalo biti moguće reći je li u tom skupu ili nije[3] Ako uzmemo da je $SVOJS(x) = x \notin x$, tada dobivamo iz komprehenzije skup $C = \{x | x \notin x\}$. Ako se pitamo je li ovaj skup svoj član[4], dolazimo do paradoksa: ako pretpostavimo da nije, onda po definiciji svojstva koje tvori skup ulazi u taj skup. Ako pretpostavimo da je, onda ne zadovoljava svojstvo $x \notin x$, pa ne bi trebao biti unutra. U svakom slučaju, ne znamo koji su točno članovi C, i s obzirom na to, C nije skup, što znači da komprehenzija ne generira *samo* skupove, nego i paradoksalne kreacije poput C.

Ovaj se paradoks tradicionalno zove Russellov paradoks, i postoje dva, dosta slična rješenja. Prvo rješenje je maknuti komprehenziju i dodati nove aksiome koji nam govore što je skup. Tako aksiomi teorije skupova točno definiraju što je skup i ne hvataju kreacije poput C. Ovaj pristup je pristup standardnih teorija skupova, poput ZFC. Drugi pristup (zapravo je jako sličan prvom, ali ovo nije na prvi pogled vidljivo), ograničiti je što sve $SVOJS(x)$ može biti. Prednost ovog pristupa je zadržavanje jednostavnosti komprehenzije. Time se dobivaju razne ograničene komprehenzije, za određene vrste svojstava. Logika drugog reda je u mnogočemu povezana s raznim oblicima komprehenzije.

Ono što nam preostaje prije nego što krenemo dalje je izložiti kako se ponašaju ranije spomenuti operatori na skupovima. Postoje mnoge kombinacije, i ostavljamo čitatelju da istraži neke od njih. Mi dajemo neke od najčešćih pretvorbi:

- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,

[3] Funkcija koja to radi, zove se *karakteristična funkcija* skupa A i piše se $\chi_A(x)$, a dobiva vrijednost 1 ako $x \in A$, a 0 ako $x \notin A$.

[4] Skupovi mogu biti svoji članovi, primjerice skup svih ideja je ideja pa je time svoj član.

- $(A \bar{\cap} B) = \bar{A} \cup \bar{B}$,
- $(A \bar{\cup} B) = \bar{A} \cap \bar{B}$,
- $\bar{\bar{A}} = A$,
- $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$,
- $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$,
- $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, ali drugi smjer ne vrijedi.
- $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Kardinalnost skupa je broj članova skupa i označavamo ga sa $||A||$. Kod konačnih skupova (skupova s konačnim brojem članova), skupovi koji nastaju temeljem skupovnih operacija mogu imati ili više ili manje ili jednako članova kao početni skupovi na koje smo primijenili određenu operaciju. Treba imati na umu da početna intuicija poistovjećivanja npr. unije skupova sa zbrajanjem brojeva nije u potpunosti na mjestu. Odnosno, $||A \cup B|| = ||A|| + ||B||$ će vrijediti samo ako su A i B disjunktni, odnosno ako $A \cap B = \emptyset$. Ako su npr. $A = \{a, b, c\}$ ($||A|| = 3$), a $B = \{b, d\}$, oni nisu disjunktni, pa će njihova unija biti $\{a, b, c, d\}$, odnosno $||A \cup B|| = 4$. Ovo nam daje intuiciju kako generalizirati kardinalnost unije disjunktnih skupova na kardinalnost unije bilo kojih skupova: $||A \cup B|| = ||A|| + ||B|| - ||A \cap B||$. Pažljivi će čitatelj uočiti da za ovo izračunati treba znati izračunati kardinalnost presjeka, a za nju će pak trebati izračun kardinalnosti skupovne razlike (kardinalnost skupovne razlike nema iznenađenja: $||C \setminus D|| = ||C|| - ||D||$).

Kod beskonačnih skupova situacija je drukčija. Operacije unije i Kartezijeva produkta (naravno, ni operacije presjeka ni razlike) ne povećavaju kardinalnost beskonačnog skupa. Operacija komplementa $\bar{A}$ može povećati kardinalnost s obzirom na početnu kardinalnost skupa A, ali je limitiramo veličinom skupa B, što je u skladu s definicijom komplementa kao razlike. Kada komplement ne bismo definirali kao razliku, komplementiranjem bismo mogli napraviti jako velike skupove, puno veće nego one dobivene partitivnim skupom, ali bismo tada podvaljivali neke stvari, poput skupa svih skupova kao legitimne.

Operacija partitivnog skupa s druge strane uvijek povećava kardinalnost [99]:

Teorem 1. *Za svaki skup A, ako $||A|| = n$, onda $||\mathcal{P}(A)|| = 2^n$.*

Dokaz. Dokaz će se kasnije prezentirati. $\square$

1.2. Relacije

Prva stvar koju možemo definirati skupovnim operacijama je proširivanje skupa. Primjerice, ako želimo stvoriti skup $\{a, b\}$ iz skupova $\{a\}$ i $\{b\}$, tada koristimo aksiom unije. Ako želimo taj skup stvoriti iz a i b, tada koristimo komprehenziju i $\{a, b\}$ definiramo kao $\{x|x = a$ ili $x = b\}$. Ovo "definiramo kao" pišemo kao $:=$, odnosno $\{a, b\} := \{x|x = a$ ili $x = b\}$. Skup $\{a, b\}$ zovemo *neuređenim* parom a i b, jer je redoslijed članova nebitan. Uređeni par je par gdje je bitno koji član je na prvom mjestu, a koji na drugom. Moguće je definirati uređene parove uz pomoć skupova. Ova ideja potječe od N. Wienera [218], a varijanta koja se ustalila i koju prenosimo dugujemo K. Kuratowskiju [121]:

Definicija 1. *Skup $\{x, \{x, y\}\}$ nazivamo uređenim parom x i y; ekstenzionalnost jamči jedinstvenost, pa zapisujemo $\langle x, y\rangle$. Da bismo pokazali da su time uređeni parovi dobro definirani, neka su $\langle x, y\rangle$ i $\langle z, w\rangle$ uređeni parovi: tada $\langle x, y\rangle = \langle z, w\rangle$ ako i samo ako $x = z$ i $y = w$. Znači, $\{x, \{x, y\}\} = \{z, \{z, w\}\}$ ako i samo ako $x = \{z, w\}$ ili ako $x = z$. Neka $x = \{z, w\}$, tada, prema ekstenzionalnosti, $x = z = w$, pa onda $x = y$, odnosno $x = y = z = w$. Neka $x = z$, onda $\{x, y\} = \{z, w\}$, odnosno, jer $x = z$, $y = w$ po ekstenzionalnosti.*

Uz pomoć uređenog para dalje se definira Kartezijev produkt skupova koji omogućava stvaranje skupova n-torki.

Definicija 2 (Kartezijev produkt skupova). *Neka su A i B skupovi, tada $C := \{(x, y)|x \in A \wedge y \in B\}$ nazivamo Kartezijevim produktom skupova A i B. Iz ekstenzionalnosti slijedi jedinstvenost, pa za skup C uvodimo oznaku $A \times B$. Poseban je slučaj ako $B = A$, kada Kartezijev produkt nazivamo još i Kartezijevim kvadratom i pišemo A^2.*

Proširenje na produkt više od dvaju skupova je trivijalno. Posebno se često koristi A^n da bi se uhvatile uređene n-torke iz A. Uz pomoć n-torki iz A^n definiraju se i relacije:

Definicija 3 (Relacije nad skupom). *Neka je R^n podskup skupa A^n definiran kao skup $R^n \subseteq \{(x, \ldots, x_n)|x, \ldots, x_n \in A\}$. Tada R^n zovemo n-mjesnom relacijom nad skupom A.*

Neformalno govoreći, relacija nad skupom je odnos među članovima skupa. Primjerice, $<$ je relacija nad prirodnim brojevima. Napomenimo da *relacije* nisu istinite ili neistinite, već one postoje između *određenih* članova skupa, ili ne postoje. Primjerice, između brojeva 1 i 3 postoji relacija $<$, odnosno taj par brojeva jest u toj relaciji. Za razliku od tog para brojeva koji je u toj relaciji, par brojeva 5 i 3, ili par brojeva 3 i 1, nije u toj relaciji. Ovo je različito od pitanja je li *relacijski simbol* $<$ koji predstavlja relaciju $<$ u određenoj teoriji, zajedno s dvjema konstantama 1 i 3, koje predstavljaju brojeve 1 i 3, tvori rečenicu te određene teorije $1 < 3$. Rečenica je onda istinita ili neistinita, što ovisi o tome je li par brojeva 1 i 3 iz skupa prirodnih brojeva u relaciji $<$.

Mjesnost (ili aritet) relacije je broj predmeta koji jesu u toj relaciji. Jednomjesne relacije su svojstva. Sjetimo se $SVOJS(x)$: ova relacija je dopuštala da samo x varira. To nije značilo da se x pojavljuje samo jednom, a čak je moguće da se pojavljuju neki fiksni članovi, dakle da se od npr. dvomjesne relacije $x \neq y$ stvori jednomjesna relacija $x \neq 2$, čije je tada svojstvo x da nije parni prim-broj. Odnosno, ako $x \neq 2$ vrijedi, tada znamo da ako je x prim-broj, onda je neparan, ili alternativno, ako je x paran, onda sigurno nije prim-broj. Postoji mnogo svojstava koja djeluju dosta razrađeno, a koja se i dalje mogu vrlo jednostavno opisati aritmetičkim relacijama.

Dvomjesne relacije su (uz svojstva) glavna vrsta relacije, jer se u praksi tromjesne ili višemjesne relacije rijetko javljaju, ali svojstva i dvomjesne relacije su iznimno česte. Vidjeli smo gore kako se od dvomjesne relacije fiksiranjem jednog parametra dobiva svojstvo. Dvomjesne relacije same mogu biti različitih tipova [99]. Neka je R dvomjesna relacija, a a, b, c predmeti, tada su tipovi relacija:

- R je *refleksivna* relacija ako za svaki a vrijedi Raa, odnosno ako Rxx vrijedi općenito. Primjer refleksivne relacije je $=$, jer za bilo koji a vrijedi $a = a$.

- R je *simetrična* relacija ako za sve a i b vrijedi Rab, onda vrijedi Rba. Primjer simetrične relacije je opet $=$, jer ako $a = b$ vrijedi, onda i $b = a$ vrijedi.

- R je *asimetrična* relacija ako za sve a i b vrijedi Rab, onda ne vrijedi Rba. Primjer asimetrične relacije je $<$, jer ako $a < b$ vrijedi, onda $b < a$ ne vrijedi.

- R je *antisimetrična* relacija ako za sve a i b vrijedi Rab i Rba, onda vrijedi $a = b$. Primjer antisimetrične relacije je $\leq$, jer ako $a \leq b$ i $b \leq a$ vrijedi, onda $a = b$ vrijedi.

- R je *tranzitivna* relacija ako za sve a, b i c vrijedi Rab i Rbc, onda vrijedi Rac. Primjer tranzitivne relacije je $<$, jer ako $a < b$ i $b < c$, onda $a < c$.

- R je *linearna* relacija ako za sve a i b vrijedi ili Rab ili Rba ili $a = b$. Primjer linearne relacije je $<$ na prirodnim brojevima: za bilo koje m, n, ili vrijedi $m < n$ ili vrijedi $n < m$ ili su m i n isti broj.

Naravno, ovdje smo ilustrirali svojstva relacija s elementarnim aritmetičkim operacijama $<$, $\leq$ i $=$, ali bilo koja relacija koja se tako ponaša naziva se simetrična: to može biti relacija "x je paralelan sa y", ili primjerice relacija "x ide u razred sa y". Lako je vidjeti da su ove dvije relacije simetrične.

Svaka dvomjesna relacija Rxy koja je (1) refleksivna i (2) tranzitivna se naziva *preduređaj*. Preduređaj koji je i (3) simetričan naziva se *relacija ekvivalencije*. Bilo koja relacija ekvivalencije (ovo ne znači da su ti predmeti doslovno ekvivalentni) uređuje skup nad kojim živi na poseban način: relacija ekvivalencije dijeli skup na takozvane *klase ekvivalencije*, koja svaka sadrži predmete koji su ekvivalentni po toj relaciji. Ako je primjerice ta relacija ekvivalencije "x je paralelan sa y", tada će ta relacija početni skup podijeliti na klase ekvivalencije od kojih će svaka klasa sadržavati međusobno paralelne elemente. Skup koji je tako uređen relacijom ekvivalencije R se naziva *kvocijentni skup prema* R.

Radi zornosti, relacije se često prikazuju simbolom $\prec$ umjesto R. Gore smo već napomenuli kako relacija ekvivalencije uređuje skup i stvara kvocijentni skup. Općenito, razni tipovi relacija uređuju skupove, a u sljedećoj definiciji preciziramo što to znači.

Definicija 4 (Uređaji). *Skup A je dobro uređen s obzirom na relaciju $\prec$ (pišemo kratko $(A, \prec)dus$) ako i samo ako (a) A je skup, $\prec$ je tranzitivna, antisimetrična i refleksivna relacija nad A, (b) po kojoj su svi elementi A usporedivi i (c) svaki neprazni podskup od A sadrži najmanji element s obzirom na $\prec$ $(\forall B \subseteq A)(\exists x)(x = min_{\prec}(B))$. Ako vrijedi samo (a) i (b), uređaj nazivamo totalnim ili linearnim, pišemo $(A, \prec)lus$, a ako vrijedi samo (a) uređaj nazivamo parcijalnim pa pišemo $(A, \prec)pus$.*

Primjer dobrog uređaja je $(\{0, 1, 2, 3, 4\}, \in)$ pri čemu su $1, 2, 3, 4$ definirani kao Von Neumannovi ordinali. Inače je $\in$ primjer relacije koja općenito nije tranzitivna (ako $x \in y$ i $y \in z$, ne vrijedi uvijek da $x \in z$), ali ovdje ju tranzitivnom čini posebna struktura skupa (to da su članovi skupa definirani kao Von Neumannovi ordinali). Skupovi na kojima je $\in$ tranzitivna nazivaju se *tranzitivni skupovi*.

Definicija 5 (Supremum i infimum)**.** *Neka je* $S \subseteq (A, \prec)$*pus. Tada ako postoji jedinstveni* $x \in A$ *takav da* $(\forall y \in S)(y \prec x \vee x = y)$*, taj* x *nazivamo najmanjom gornjom međom od* S *ili supremumom od* S*. Jedinstvenost slijedi iz ekstenzionalnosti pa ga označavamo sa* $sup(S)$*. Razlika između supremuma skupa i najvećeg elementa (maksimuma) je ta da supremum nekog skupa* S *ne mora biti član skupa* S*. Analogno definiramo i infimum, odnosno najveću donju među nekog skupa* S*. Za skup* S *kažemo da je omeđen odozgo ako ima supremum, a da je omeđen odozdo ako ima infimum.*

Supremum i infimum su najmanja gornja i najveća donja granica.

Definicija 6 (Maksimum i minimum)**.** *Neka je* A *skup omeđen odozgo i neka je* $\prec$ *neka relacija na njemu; ako su prema njoj članovi skupa usporedivi*[5]*, onda* $(\exists x \in A)(\forall y \in A)(x \neq y \rightarrow y \prec x)$*. Jedinstvenost je očita: neka postoji neki* $z \neq x$*, takav da* $(\forall y \in A)(z \neq y \rightarrow y \prec z)$*, ali tada* $x \prec z$ *što proturječi pretpostavci. Takav* x *nazivamo najvećim elementom skupa* A *ili, preciznije, maksimumom u* A *prema relaciji* $\prec$ *te ga označavamo s pomoću* $max_{\prec}(A)$*. Potpuno analogno definiramo i minimum.*

Maksimum i minimum su najveći i najmanji element prema $\prec$. Oni su jedinstveni, jer ako nisu tada nisu maksimum i minimum nego maksimalni i minimalni elementi. Maksimum je *najveći element*, a maksimalan element je *element od kojeg nema većeg* po relaciji $\prec$. Definicija slijedi:

Definicija 7 (Maksimalan i minimalan element)**.** *Neka je* A *skup omeđen odozgo i neka je* $\prec$ *neka relacija na njemu; ako su prema njoj članovi skupa usporedivi, vrijedi* $(\exists x \in A)(\forall y \in A)(x \neq y \rightarrow \neg x \prec y)$*. Takav element nije (nužno) jedinstven, a nazivamo ga maksimalnim elementom skupa* A *prema relaciji* $\prec$ *te ga, zloupotrebom notacije (zbog nejedinstvenosti), označavamo* $ME_{\prec}(A)$*. Potpuno analogno definiramo i minimalni element.*

[5] Članovi nekog skupa zajedno s nekom relacijom $\prec$ su usporedivi ako je $\prec$ linearna, odnosno ako $(\forall x, y \in A)(x = y \vee x \prec y \vee y \prec x)$.

1.3. Funkcije

Kako smo uz pomoć skupova definirali relacije, tako ćemo uz pomoć relacija definirati funkcije [96]:

Definicija 8 (Funkcija)**.** *Neka je R^2 dvomjesna relacija i neka su A i B skupovi. Ako za sve $x \in A$ postoji jedinstveni $y \in B$ takav da (R^2xy), tada R^2 nazivamo funkcijom od x, pri čemu joj je x argument, a y vrijednost, a označavamo je s pomoću $f(x) = y$; funkcije ćemo još označavati $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, ali i na druge načine kada bude potrebno. Dvomjesne funkcije označavamo $f(x, y) = z$, tromjesne $f(x, y, z) = w$, itd. Također, ako $f(x) = y$, tada $f^{-1}(y) = x$, koju nazivamo praslikom od y s obzirom na $f(x)$. Skup A nazivamo domenom funkcije, a skup B kodomenom. Skup svih $f(x)$ nazivamo slikom skupa A u B i označavamo sa $f[A]$.*

Uočimo jedan iznimno važan detalj: funkcija $f(x) = y$ ima uvijek točno određenu vrijednost y s obzirom na dobiveni x, dakle funkcija dobiva jednu jedinu vrijednost (npr. kada funkciji $f(x) = x^2 + 3$ damo za argument 5, ona će vratiti vrijednost 28). Relacija Rxy s druge strane (ako nije funkcija, a to možemo pretpostaviti) nema točno određenu vrijednost, odnosno ako se odabere određeni x, ne znamo što može doći za y, ili, u najboljem slučaju, imamo skup vrijednosti koje bi mogle biti ili, preciznije rečeno, koje *jesu* y. To znači da je vrijednost funkcije kada se odabere x konkretan broj, a za relaciju kada odaberemo x, trebamo još odabrati neki y i tada provjeravamo je li stvarno vrijedi Rxy, odnosno je li Rxy tada istinito ili nije.

Zanimljivo je vidjeti kako se ponašaju slika i praslika s obzirom na presjek:

- $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$,
- $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$,
- $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$,
- $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.

Razlog zašto drugi smjer s presjekom ne vrijedi može se vidjeti ako se uzme $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, a $f(a) = c$ i $f(b) = c$. Tada $f[A \cap B] = \emptyset$, jer je $A \cap B = \emptyset$ (slika praznog skupa $f[\emptyset]$ je uvijek prazan skup[6]), ali $f[A] \cap f[B] = \{c\}$.

[6] Ovo je različito od slučaja gdje je prazan skup član nekog skupa pa se gleda slika praznog skupa u smislu $f(\emptyset)$.

Kada želimo stvoriti niz, to se radi tako da se niz definira kao funkcija iz prirodnih brojeva u neki skup A, odnosno $f : \mathbb{N} \rightarrow A$. Razlog zašto se skup prirodnih brojeva uzima za domenu, a ne za kodomenu je zato što se ovako može dogoditi da isti a iz kodomene dobije broj m i n, pa postane a_m i a_n i tada $a_m = a_n$, ali da je obrnuto bi se moglo dogoditi da su $a, b \in A$, za koje $a \neq b$, dobiju isti broj n, odnosno isto mjesto u nizu, što uništava cijelu ideju niza odnosno nizanja, jer tada više neće biti linearno uređeno temeljem brojeva s pomoću kojih se niže.

Općenito, moguće je ideju niza poopćiti s prirodnih brojeva kao indeksa na bilo koji skup. Dodatna mogućnost je da želimo tako pobrojiti srodne skupove, koji imaju slične članove. To se najbolje može napraviti tako da se definira (indeksirana) familija skupova. Neka su A i I skupovi, tada $A_i : I \rightarrow \mathcal{P}(A)$ nazivamo familijom skupova. Po tipu, funkcija može biti injekcija, surjekcija ili bijekcija:

Definicija 9 (Injekcija, surjekcija, bijekcija). *Neka je f funkcija s domenom A. Tada, ako $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y))$, kažemo da je f injekcija. Neka je f funkcija s domenom A i kodomenom B. Tada, ako $f[A] = B$, kažemo da je f surjekcija. Neka je $f(x)$ funkcija koja je injekcija i surjekcija. Takvu funkciju nazivamo bijekcijom.*

Bit će nam potreban još i pojam restrikcije funkcije:

Definicija 10 (Restrikcija). *Neka je $f(x) = y$ funkcija s domenom A, kodomenom B i neka je $C \subseteq A$. Tada funkciju $g(x) = y$, takvu da $g : C \rightarrow B$ nazivamo restrikcijom funkcije $f(x)$ i zapisujemo kao $f|_C(x)$.*

Ponekad je teško dokazati surjektivnost funkcije $f : A \rightarrow B$, jer je za to potrebno proučiti cijelu kodomenu i vidjeti da ne ostaje nijedan član koji nije slika nečega. Puno je lakše dokazati injektivnost: sve što treba je pažljivo definirati funkciju da se dva člana domene ne "zalijepe" i dobiju isti član kodomene. Zato je vrlo koristan sljedeći rezultat koji nam omogućava da ako imamo injekciju iz A u B i injekciju iz B u A.

Teorem 2 (Cantor-Schröder-Bernsteinov teorem). *Ako je $f : A \rightarrow B$ injekcija i $g : B \rightarrow A$ injekcija, tada postoji $h : A \rightarrow B$ koja je surjekcija i injekcija (bijekcija).*

Dokaz. Neka $A_0 := A$ i $B_0 := B$. Neka $A_{n+1} := g''(B_n)$ i $B_{n+1} := f''(A_n)$. Tada definiramo funkciju $h : A \rightarrow B$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_{2n} \backslash A_{2n+1}) \\ g^{-1}, \text{inače.} \end{cases}$$