

# 1.

## Osnovni zakoni, elementi i parametri električnih krugova

---

---

### 1.0. Uvod

---

---

U ovoj će knjizi biti riječi samo o teoriji električnih krugova, koja daje temelj za daljnji studij elektrotehnike i elektrotehničkih sustava. Teorija električnih krugova jedna je od fundamentalnih disciplina u izučavanju elektrotehnike, a sastoji se od analize i sinteze. Analiza proučava svojstva kruga sa zadanim elementima, a sinteza obrnuto, određuje elemente i konfiguraciju. Kao i mnoge inženjerske discipline tako se i teorija električnih krugova temelji na koncepciji modela. Za analizu ma kako složenoga fizikalnog sustava potrebno je taj sustav opisati u obliku modela, koji se sastoji od idealnih elemenata. Idealni elementi upotrebljavaju se za reprezentaciju ili približenje svojstvu jednostavnih fizikalnih elemenata i fenomena. Fizikalni elementi i fenomeni mogu se opisati samo približno, dok se idealni elementi definiraju vrlo precizno. Prema tome, izučavat će se električni krugovi sastavljeni od idealnih elemenata, kao i njihova opća svojstva. Obično se umjesto idealni element kruga skraćeno govori samo element kruga, a umjesto fizikalni element kruga upotrebljava se naziv komponenta. Komponenta je nedjeljivi dio sklopa ili uređaja.

Električni krugovi dijele se na električne krugove s koncentriranim elementima i električne krugove s raspodijeljenim elementima (električni vod). Ovdje će se analizirati samo električni krugovi s koncentriranim elementima.

#### **1.0.1. Električni krugovi s koncentriranim elementima**

U teoriji električnih krugova upotrebljava se, kao općenitiji pojam, naziv električna mreža. Pod električnom mrežom podrazumijevamo složene strujne krugove u

kojima se elektromagnetski procesi mogu opisati pomoću napona i struje. U općem slučaju električna mreža se sastoji od izvora električne energije, trošila električne energije, spojnih vodova, koji međusobno povezuju izvore s trošilima, te kontakata koji nastaju na mjestima gdje se spajaju komponente.

Pod izvorom električne energije smatra se u teoriji električnih krugova takva komponenta koja napaja električni krug električnom energijom. U takvim se komponentama zbiva proces pretvorbe energije iz nekog drugog oblika (mehaničke, kemijske, toplinske, itd.) u električnu energiju. Izvor električne energije pobudi električni krug, a kao posljedica toga poteče struja u krugu. Pri tome se električna energija izvora troši na izgradnju električnog i magnetskog polja, a jedan dio električne energije prelazi u drugi oblik energije (toplinsku, mehaničku, itd.). Realni izvori električne energije jesu galvanski članci, akumulatori, termočlanci kao i generatori raznih valnih oblika signala (sinusni, impulsní, itd.).

Trošila ili prijemnici električne energije su oni uređaji u kojima se električna energija pretvara u drugi oblik: svjetlosnu (žarulja), toplinsku (električna peć), mehaničku (elektromotor), kemijsku (punjenje akumulatora). U trošila ubrajamo i predajnu antenu koja je priključena na izvor električne energije i koja zrači elektromagnetsku energiju u okolni prostor u obliku elektromagnetskih valova.

Pri stvaranju električnih krugova upotrebljavaju se komponente kao što su otpornici, zavojnice, kondenzatori, transformatori, diode, tranzistori itd. Svaka komponenta konstruirana je za iskorištavanje određenoga fizikalnog svojstva. Nažalost, obično je fizički nemoguće izgraditi element koji ima samo jedno svojstvo. Tako npr. otpornik je vodljivo tijelo s dvije priključnice u kome se transformira električna energija u toplinu, a napon ( $u$ ) na njegovim priključnicima ovisi o struji ( $i$ ) koja teče kroz njega. Ova slika je samo približna, jer svaka struja stvara neko magnetsko polje, a isto tako stvara se i električno polje, pa prema tome svaki otpornik akumulira energiju magnetskog i električnog polja. Ta akumulirana energija obično je tako mala da se može u analizi i projektiranju zanemariti. Prema tome, samo u određenom slučaju može se uzeti otpornik kao model za izučavanje Ohmova zakona. Taj približni model ilustrira osnovnu činjenicu da se pri analizi i projektiranju električnog kruga mora izvesti aproksimacija pomoću modela, jer je vjerna reprezentacija komponenata kruga vrlo zamršena.

U analizi električnih krugova proučavaju se krugovi sastavljeni od idealnih elemenata ili, kraće, elemenata. Za promatrani krug pravi se idealni model koji treba što vjernije odražavati stanje u fizikalnom krugu. Elementi kruga imaju precizne karakteristike, i oni su idealizacija fizikalnih svojstava komponenata. Tako na primjer otpornost otpornika i otpornost žice, koja spaja dvije komponente, imaju isto fizikalno svojstvo, pa se u strujnim krugovima prikazuju istim elementom nazvanim otpor, koji ima svoj simbol i oznaku. Isto tako kapacitivnost kondenzatora i kapacitivnost električnog voda prikazuje se istim elementom nazvanim kapacitet, koji ima također svoj simbol i oznaku. Nadalje, za induktivnost svitka i induktivnost

voda upotrebljavaju se isti simbol i oznaka, a takav element se zove induktivitet. Na taj se način postiglo da se strujni krugovi opišu jednoznačnim elementima kruga. Elementi kruga mogu biti pasivni, kao što su otpor, kapacitet i induktivitet, i aktivni kao što su naponski i strujni izvori električne energije. Pasivni elementi mogu biti linearni i nelinearni. Analiza kruga provodi se na modelima, te se na osnovi toga projektiraju stvarni krugovi. Elementi kruga mogu imati dvije i više priključnica (polova), pa se oni još zovu dvopoli, odnosno višepoli. U teoriji krugova element se s dvije priključnice naziva grana, a priključnica ili spojno mjesto zove se čvor. Za električne krugove karakteristično je da se svi elektromagnetski procesi, koji se u njima odvijaju, mogu opisati strujom i naponom. U tom slučaju vrijede osnovni zakoni za strujne krugove, koji nisu ništa drugo nego aproksimacija općih zakona elektromagnetskog polja. Tako npr. za dvopol kao element strujnog kruga vrijedi da je struja koja ulazi na jednu priključnicu jednaka struji koja izlazi na drugu priključnicu u svakom trenutku, a naponska razlika između priključnica može se uvijek utvrditi. Slično i kod višepola definiran je odnos struje i napona na priključnicama u svakom trenutku. Spomenute zakonitosti za dvopole i višepole vrijedit će kada su dimenzije komponenata kao i samog kruga male u usporedbi s valnom dužinom signala. U suprotnim slučajevima, kada su komponente reda veličine valne dužine, ne mogu se primijeniti Kirchhoffovi zakoni, već se moraju primijeniti Maxwellove jednačbe. Današnji razvoj tehnologije omogućio je da su komponente kao i sami električni krugovi minijaturni, gdje se koriste signali vrlo visokih frekvencija. Tako npr. frekvencija od 200 MHz ima valnu dužinu  $\lambda = 3 \cdot 10^8 / (200 \cdot 10^6) = 1.5 \text{ m}$ , pa se u integriranoj tehnici mogu upotrebljavati i veće frekvencije. Krugovi s radnim signalom frekvencije iznad 3 GHz (valna dužina manja od 10 cm) spadaju u tzv. mikrovalne krugove u kojima su osnovni elementi valovod i šuplji rezonator. U tim slučajevima ne mogu se primjenjivati Kirchhoffovi zakoni, jer se radi o valnim dužinama reda veličine komponente.

---

## 1.1. Osnovne veličine strujnog kruga

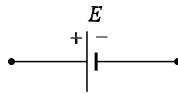
---

### 1.1. Strujni krug

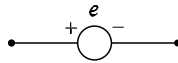
U današnje vrijeme primjena elektrotehnike je vrlo opsežna, tako da se ljudi u svojoj ranoj mladosti susreću s nizom elektrotehničkih aparata u kućanstvu. Rukovanje kućanskim aparatima obično je vrlo jednostavno i za to nije potrebno nekakvo teorijsko znanje. Svima je poznato da se ti aparati mogu upotrebljavati samo ako u kući postoje ispravne električne instalacije spojene na električni vod. U tom slučaju dovoljne su dvije žice da se električno kuhalo spoji na priključnicu u zidu. Slično je sa žaruljom koja se spaja pomoću dvije žice na polove akumulatora.

Spomenute žice ne mogu biti od bilo kakvog materijala, već od metala koji ima svojstvo da vodi električnu struju. Obično se uzima materijal dobre provodljivosti, kao npr. bakar. Dovoljno je da jedna žica nije spojena na određeni pol akumulatora, pa žarulja neće svijetliti, a isto se događa ako je jedna od žica prekinuta. U svim tim slučajevima podrazumijeva se da izvor mora biti ispravan i da unutar njega isto tako ne smije biti prekid. Iz ovih razmatranja može se reći da će žarulja svijetliti ako je cijeli put od izvora do trošila zatvoren s dobro vodljivim materijalom kroz koji može teći struja. Takav zatvoreni put, koji se sastoji od izvora, spojnog voda (dvije žice) i trošila, naziva se strujni krug. Strujni krug prikazuje se pomoću shema. Za pojedine elemente kruga upotrebljavaju se određeni simboli, kao npr.

— za bateriju



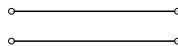
— odnosno, općenito za idealni naponski izvor



— za trošilo



— a za električni vod dvije paralelne linije

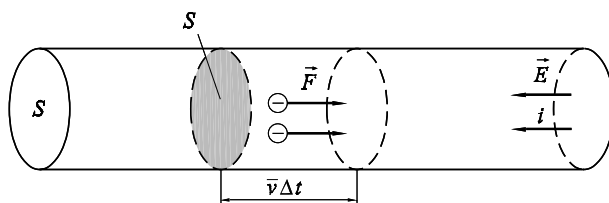


Baterija i generator čine izvore električne energije. Oni imaju dva različita pola (priključnice), plus (+) i minus (−) na koje se priključuju trošila. Izvori električne energije nazivaju se još i aktivni elementi, za razliku od trošila, koje se smatra pasivnim elementima. Električna struja i napon jesu osnovne veličine koje karakteriziraju stanje u električnom krugu.

### 1.1.2. Električna struja

Električna struja predstavlja pojavu usmjerenoga gibanja električnog naboja pod djelovanjem električnog polja. U metalima se gibaju samo elektroni, i to tzv. slobodni elektroni. Svi metali imaju slobodne elektrone, a smatra se da na svaki atom dolazi po jedan slobodni elektron. U  $\text{cm}^3$  bakra ima oko  $8.5 \cdot 10^{22}$  atoma, pa toliko približno ima i slobodnih elektrona. Pri usmjerenom gibanju elektroni

se na svome putu “sudaraju” s atomima metala, pa time gube kinetičku energiju i brzinu. Budući da se to gibanje sastoji od niza ubrzanja i usporenja, nužno je uvesti pojam srednje ili prosječne brzine kretanja elektrona  $\bar{v}$ . Sada se može utvrditi koja će količina naboja proći kroz poprečni presjek vodiča  $S$  u kratkom vremenskom intervalu  $\Delta t$  pri usmjerenom gibanju slobodnih elektrona prosječnom brzinom  $\bar{v}$  (sl. 1.1).



Sl. 1.1. Usmjerenom gibanje slobodnih elektrona pod djelovanjem električnog polja u vodiču.

Poznato je da se elektroni u električnom polju gibaju suprotno smjeru električnoga polja. Ako u jedinici volumena promatrane žice ima  $n$  slobodnih elektrona, tada je ukupni iznos naboja koji prođe kroz presjek  $S$  žice za vrijeme  $\Delta t$

$$\Delta q = ne_0 \bar{v} S \Delta t, \quad (1.1)$$

gdje je

$$e_0 = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As.}$$

Intenzitet takvoga usmjerenog gibanja naboja zove se **jakost električne struje, ili kraće, struja**, a definira se kao prostrujala količina naboja kroz poprečni presjek vodiča u jedinici vremena

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}. \quad (1.2)$$

U sustavu jedinica MKSA naboj  $q$  mjeri se u kulonima (C), vrijeme  $t$  u sekundama (s), a struja  $i$  u amperima (A). Jedinica amper je četvrta osnovna jedinica u sustavu jedinica MKSA.

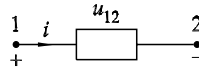
Premda je električna struja skalarna veličina, ipak se govori o njenom smjeru. Usmjerenom gibanje naboja nastaje uslijed djelovanja električnog polja  $\vec{E}$  na naboj  $q$  silom  $\vec{F} = q\vec{E}$ . U metalima gibaju se samo slobodni elektroni, dok u elektrolitima i plinovima pozitivni i negativni ioni, a u poluvodičima šupljine i elektroni. Poznato je da se pozitivni i negativni ioni gibaju pod djelovanjem električnog polja u suprotnim smjerovima. Intenzitet struje u takvim slučajevima jednak je sumi prostrujalog naboja u jedinici vremena kroz promatrani presjek, bez obzira na smjer gibanja i predznak naboja. Ukupna količina naboja koja za vrijeme  $\Delta t$  prođe kroz poprečni presjek  $S$  sredstva u kome se gibaju pozitivni i negativni naboji jednaka je

$$\Delta q = (n_{(+)} \bar{v}_{(+)} q_{(+)} + n_{(-)} \bar{v}_{(-)} q_{(-)}) S \Delta t, \quad (1.3)$$

gdje su predznacima (+) i (−) označeni pozitivni i negativni naboji, kao i njihove odgovarajuće koncentracije i brzine. Električna struja je u ovome slučaju

$$i = \frac{dq}{dt} = (n_{(+)}\bar{v}_{(+)}q_{(+)} + n_{(-)}\bar{v}_{(-)}q_{(-)})S. \quad (1.4)$$

Budući da se u nekim sredstvima gibaju obje vrste naboja, ali u suprotnim smjerovima, dogovoreno je da se za smjer struje uzme smjer gibanja pozitivnih naboja. To je tzv. **pozitivni smjer struje**. Električna je struja skalarna veličina i u općem slučaju vremenski je ovisna funkcija pa se označava malim slovom  $i$ , dok se iznos struje u nekom trenutku  $t$  označava oznakom  $i(t)$ . Struja koja s vremenom ne mijenja smjer zove se **istosmjerna struja** i označava se velikim slovom  $I$ . Budući da vremenski promjenljiva struja može mijenjati svoj smjer, nužno je uvesti tzv. referentni smjer struje. Dakle, vremenski ovisnu struju u obliku neke funkcije može se zadati tek kad se odabere referentni smjer struje, koji se označuju strelicom (sl. 1.2). Zbog toga je nužno, pri analizi neke električne mreže, proizvoljno ucrtati referentne smjerove struja u svim granama mreže. Tako ucrtani smjer u grani mreže zvat će se **referentni smjer struje**. U slučaju kada se naboji koji stvaraju struju gibaju čias u jednome čas u drugome smjeru, takva struja mijenja predznak, pa se stoga zove **izmjenična struja**.



Sl. 1.2. Referentni smjer struje.

Ako se zna vremenska zavisnost struje, može se izračunati prostrujali naboj kroz poprečni presjek  $S$  u nekom vremenskom intervalu  $t$

$$q = \int_0^t i dt. \quad (1.5)$$

Jedan vrlo važan pojam jest gustoća električne struje

$$J = \frac{di}{dS}, \quad \left( \frac{A}{m^2} \right). \quad (1.6)$$

Može se pokazati da je gustoća struje  $J$  vektorska veličina proporcionalna s jakošću električnoga polja  $\vec{E}$  u vodiču i istoga je smjera.

Uz poznatu raspodjelu gustoće struje po poprečnom presjeku, može se odrediti ukupna struja kroz promatrani presjek  $S$

$$i = \int_S \vec{J} d\vec{S}. \quad (1.7)$$

gdje je  $d\vec{S}$  element površine  $S$  poprečnog presjeka.

Pomoću naših osjetila ne može se direktno izmjeriti električna struja, već indirektno, kroz njene tri manifestacije koje signaliziraju prisutnost struje. Te tri manifestacije zasnivaju se na toplinskom, magnetskom i kemijskom efektu struje.

Toplinski efekt električne struje, između ostaloga, manifestira se tako da se metalna žica prolaskom električne struje zagrijava, zbog čega se žica produljuje, i to proporcionalno s kvadratom struje.

Magnetski efekt električne struje manifestira se tako da električna struja djeluje silom na magnetsku iglu, čiji je odklon proporcionalan jakosti struje.

Kemijski efekt nastaje u elektrolitima prilikom elektrolize. Pri prolasku struje kroz elektrolit, na elektrodama se uronjenima u elektrolit talože količine materijala koje su proporcionalne jakosti električne struje i vremenu prolaska struje.

Sva tri navedena efekta mogu se primijeniti za mjerenje jakosti struje. Instrument za mjerenje struje zove se ampermetar, i on se uključuje u strujni krug serijski.

### 1.1.3. Električni napon. EMS

Električna struja poteći će kroz promatranu žicu (sl. 1.1) ako se jedan kraj žice spoji na plus-pol, a drugi kraj na minus-pol akumulatora. Polovi akumulatora nalaze se u specifičnom stanju, jer se na plus-polu nagomilao pozitivni, a na minus-polu negativni naboj. U prostoru između polova akumulatora vlada električno polje  $\vec{E}$ , čije silnice izlaze iz pozitivnog pola i završavaju na negativnom polu. To stanje oko polova može se opisati skalarnom veličinom koja se zove električni potencijal. Svakom naelektriziranom tijelu pripisuje se električni potencijal prema nekoj referentnoj točki. Zbog toga se kaže da plus-pol akumulatora ima potencijal  $\varphi_{(+)}$ , a minus-pol potencijal  $\varphi_{(-)}$ . Razlika potencijala zove se napon, pa se kaže da između polova akumulatora vlada napon

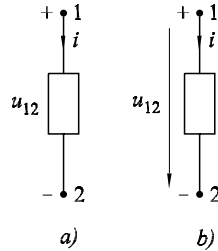
$$u = \varphi_{(+)} - \varphi_{(-)}.$$

Spajanjem žice na polove akumulatora uspostavi se električno polje u žici koje uzrokuje električnu struju, a pri tome između krajeva žice vlada napon  $U$ . Općenito, električni napon između dvije točke definira se kao omjer utrošene energije za prijenos naboja između te dvije točke i prenesenoga naboja

$$u = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta q} = \frac{dw}{dq}, \quad (\text{V}) \quad (1.8)$$

gdje je  $\Delta w$  energija utrošena na prijenos naboja  $\Delta q$ . Jednostavnije se može reći da je napon koji vlada između dviju točaka jednak po iznosu utrošenoj energiji za prijenos jediničnog naboja između tih točaka. Jedinica za napon je volt (V). Napon je skalarna veličina, definirana kao omjer dviju skalarnih veličina. Slično kao i kod struje, nužno je proizvoljno odabrati referentni smjer napona koji vlada na promatranom dijelu mreže. Za jednoznačno određivanje referentnog smjera

napona koji vlada između dviju priključnica promatranoga dijela mreže dovoljno je jednoj od priključnica pripisati pozitivni polaritet, a drugoj negativni (sl. 1.3a). Isto tako može se ucrtati strelica, pri čemu se smatra da je početak strelice na većem potencijalu u odnosu na kraj strelice (sl.1.3b).



Sl. 1.3. Usklađeni smjerovi napona i pasivnog dvopola: a) referentni smjer napona označen sa (+) i (-); b) referentni smjer napona označen strelicom.

**Referentni smjer napona** označava se također indeksima, npr.  $u_{12}$ . Pri definiranju referentnog smjera napona grane  $u_{12}$  (sl. 1.3) imalo se na umu da je taj napon  $u_{12}$  pozitivan u trenutku  $t$  kad god je električni potencijal čvora 1 veći od električnog potencijala čvora 2. Pri tome su oba potencijala mjerena prema zajedničkoj referentnoj točki (0), tj.

$$u_{12}(t) = u_{10}(t) - u_{20}(t). \quad (1.9)$$

Isto tako za referentni smjer struje (sl. 1.3) rečeno je da je struja  $i(t)$  pozitivna u trenutku  $t$ , ako pozitivni naboji ulaze u granu kroz čvor 1, a izlaze kroz čvor 2.

Referentni smjerovi napona i struje mogu se proizvoljno birati, ali ih je zgodno uskladiti, tako da se strelice napona i struje poklapaju, odnosno da strelica koja označuje struju ulazi u priključnicu označenu sa plus (+), a izlazi na priključnicu označenu s minus (-). Tako definirani referentni smjerovi struje i napona zovu se **usklađeni referentni smjerovi**. Očigledno da je pri usklađenim smjerovima napona i struje dovoljno označiti strelicom samo referentni smjer struje. Tako usklađeni smjerovi napona i struje koriste se za sve pasivne dvopole. Potencijal na pasivnom dvopolu opada u smjeru struje, pa se za razliku potencijala upotrebljava izraz pad napona.

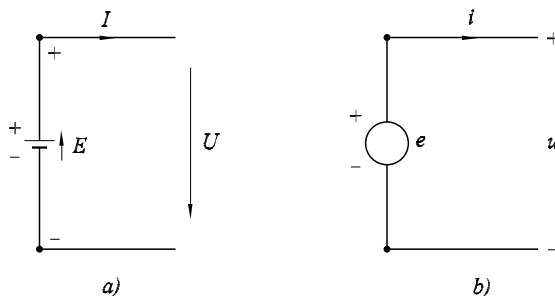
Za razliku od pasivnog dvopola, struja kroz izvor električne energije teče od minus prema plus-priključnici, dakle struja kroz izvor ima suprotan smjer od smjera vanjskoga napona koji vlada između priključnica izvora. Napon između polova izvora nastao je uslijed djelovanja neke unutarnje sile u samom izvoru, koja unutar izvora odvaja elektrone od atoma i prenosi ih na minus-pol, a na plus-polu nakupi se ista količina pozitivnoga naboja. Pri otvorenim priključnicama izvora ne teče struja, a nagomilana količina naboja na polovima drži ravnotežu unutarnjoj sili. Čim se zatvori strujni krug, smanji se količina naboja na polovima, naruši se ravnoteža sila, pa unutarnja sila ponovo počne razdvajati naboj i tjerati ga prema polovima.



Za razdvajanje naboja u električnim izvorima troši se neka druga vrsta energije (kemijska, mehanička, toplinska, itd.) koja prelazi u energiju električne struje. Uslijed djelovanja te unutarnje sile razdvaja se u unutrašnjosti izvora električni naboj i stvara se napon, koji se zove proizvedeni ili unutarnji napon. Vrlo često se taj napon zove elektromotorna sila (kraće EMS). Budući da taj napon nema dimenziju sile, ne smijemo ga poistovjetiti sa silom. EMS se označava slovom  $e$ , odnosno  $E$  za istosmjernu EMS, a definira se kao omjer utrošene energije na razdvajanje naboja u izvoru i toga naboja, ili, kraće, utrošena energija po jedinici naboja, tj.

$$e = \frac{dw}{dq} \quad (1.10)$$

Ako se sva utrošena energija za stvaranje unutarnjega napona  $e$  prenese bez gubitaka na priključnice izvora, tada će vanjski napon biti jednak unutarnjemu naponu. Smjer djelovanja EMS poklapa se sa smjerom gibanja pozitivnog naboja, a to znači da se smjer EMS poklapa sa smjerom struje koja teče kroz izvor od minus prema plus-polu (sl. 1.4). Smjer djelovanja vanjskoga napona izvora također se označava strelicom, koja je usmjerena od plus prema minus-priključnici (sl. 1.4a i b).



Sl. 1.4. Usklađeni referentni smjerovi EMS, napona i struja idelnog naponskog izvora:  
 a) istosmjerni naponski izvor; b) vremenski promjenljivi naponski izvor.

Ta su dva smjera suprotna, pa pri ucrtavanju strelice u shematskim prikazima mora se znati da li se ona odnosi na EMS ili na vanjski napon. Zbog toga se smjer EMS označava samo s plus (+) i minus (-) bez strelice. Treba odmah uočiti da kod izvora električne energije smjerovi vanjskoga napona i struje nisu usklađeni na isti način kao kod pasivnih dvopola. Ako kod aktivnih dvopola struja ulazi na plus, a izlazi na minus-pol, tada takav izvor električne energije predstavlja zapravo trošilo električne energije, jer se u njemu električna energija pretvara u drugi oblik energije. To se upravo događa pri punjenju akumulatora, gdje električna energija prelazi u kemijsku. Prema tome, kada se smjer struje poklapa sa smjerom EMS, tada izvor proizvodi električnu energiju, a u suprotnom je slučaju troši. Navedena pravila o smjeru struje i napona osnovna su pravila koja se primjenjuju pri rješavanju strujnih krugova.

### 1.1.4. Električna energija i snaga

Električni napon definiran je pomoću energije (jed. (1.8)). Pri prenošenju električnog naboja  $dq$  kroz dio vodiča na kojem vlada napon  $u$ , izvrši se rad koji je jednak utrošenoj električnoj energiji

$$dw = udq = uidt, \quad (1.11)$$

koja je ušla u promatrani dio mreže. Ukupna energija utrošena za prenošenje naboja  $q$  na dijelu mreže u vremenskom intervalu  $t_1$  do  $t_2$  jednaka je

$$w = \int_{q(t_1)}^{q(t_2)} udq = \int_{t_1}^{t_2} uidt. \quad (1.12)$$

U sustavu jedinica MKSA za energiju je jedinica džul (J), čija je dimenzija  $J = Ws = VAs$ .

Brzina promjene energije zove se snaga, a može se izraziti kao derivacija energije po vremenu

$$p = \frac{dw}{dt} = u \cdot i. \quad (1.13)$$

Izraz (1.13) prikazan je kao produkt trenutne vrijednosti napona i trenutne vrijednosti struje. Zbog toga se ta snaga zove **trenutna snaga**. Ona predstavlja brzinu strujanja energije u trenutku ( $t$ ). Trenutna vrijednost snage je algebarska veličina, pa može biti pozitivna i negativna. Pozitivna vrijednost trenutne snage ( $p > 0$ ) fizikalno znači da u tom trenutku energija ulazi u promatrani dio mreže. To se zbiva u onim trenucima kada se stvarni smjerovi struje i napona poklapaju, jer tada struja i napon imaju iste predznake. Negativna vrijednost snage ( $p < 0$ ) znači da energija izlazi iz promatranoga dijela mreže. Pri računanju trenutne vrijednosti snage izvora treba imati na umu da li se u izrazu za snagu koristi trenutnom vrijednosti EMS ili trenutnom vrijednosti vanjskoga napona. Ako se u izrazu za snagu upotrebljava EMS izvora, tada u slučaju  $p > 0$  izvor daje električnu energiju, a u slučaju  $p < 0$  izvor uzima energiju i predstavlja trošilo električne energije.

U praksi se najčešće upotrebljava prosječna ili srednja snaga, koja se defini- ra kao omjer prostrujale energije u promatranom vremenskom intervalu  $T$  i toga vremenskoga intervala

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt. \quad (1.14)$$

**Prosječna snaga naziva se još i radna snaga.** Jedinica za radnu snagu je W (vat). Radna snaga periodičnih valnih oblika napona i struje uvijek se računa u vremenu jedne periode  $T$  dotičnoga valnog oblika napona i struje.

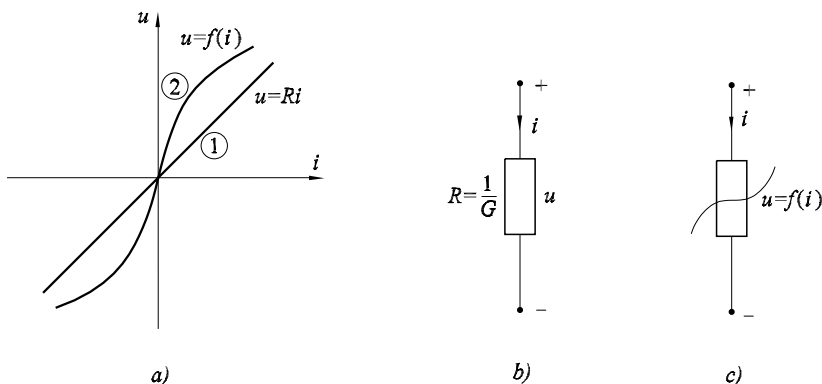
## 1.2. Pasivni elementi strujnog kruga

Pasivni elementi strujnih krugova su otpor, induktivitet i kapacitet. Sve te elemente treba precizno definirati i opisati sva njihova svojstva. Prvo treba utvrditi odnos napona i struje, zatim analizirati snagu i na kraju energiju.

### 1.2.1. Otpor

#### a) Definicija otpora. Odnos napona i struje

Otpor je element strujnog kruga u kome se električna energija nepovratno pretvara u toplinsku energiju i može se opisati  $u-i$  karakteristikom koja prolazi kroz prvi i treći kvadrant (sl. 1.5a). Prema obliku krivulje postoje linearni i nelinearni otpor. Linearni je otpor opisan pravcem (sl. 1.5a, krivulja (1)), a shematski je prikazan na slici 1.5b.



Sl. 1.5. Radni otpor: a)  $u-i$  karakteristika otpora; b) simbol linearnog otpora; c) simbol nelinearnog otpora.

Odnos napona i struje linearnog otpora definiran je Ohmovim zakonom i može se izraziti ovako

$$\begin{aligned} u &= R \cdot i \\ i &= G \cdot u \end{aligned} \quad (1.15)$$

gdje je  $R$  električni otpor grane koji se mjeri u omima ( $\Omega$ ), a  $G = R^{-1}$  električna vodljivost grane, koja se mjeri u simensima (S).

Nelinearni otpor definiran je nelinearnom krivuljom (2) (sl. 1.5a), a shematski je prikazan na slici 1.5c. Odnos napona i struje  $u = f(i)$  utvrđuje se mjerenjem. U praksi se najčešće upotrebljavaju linearni otpori.

## b) Snaga

**Trenutna snaga** na linearnom otporu je

$$p_R = u \cdot i = R \cdot i^2 = G \cdot u^2 \geq 0. \quad (1.16)$$

Ta je snaga uvijek pozitivna ili jednaka nuli.

**Radna snaga** na otporu je

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_R \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T Ri^2 dt, \quad (1.17)$$

gdje je  $T$  vrijeme trajanja. Kod periodičnih valnih oblika to je vrijeme jedne periode.

## c) Energija

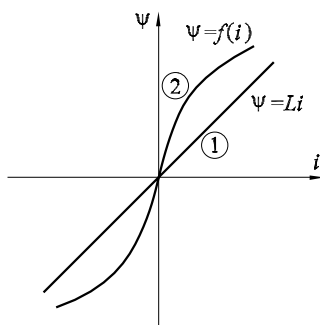
Energija koja se pretvara u toplinu u otporu  $R$  je

$$w_R = \int_0^t uidt = \int_0^t Ri^2 dt. \quad (1.18)$$

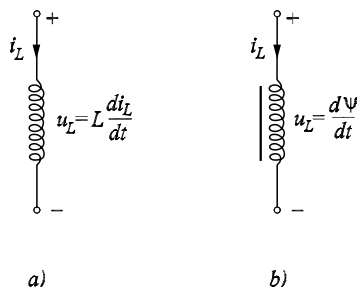
### 1.2.2. Induktivitet

#### a) Definicija induktiviteta. Odnos napona i struje

Induktivitet je element strujnog kruga u kome se gomila energija u magnetskom polju, a može se opisati  $\psi$  -  $i$  krivuljom koja prolazi kroz prvi i treći kvadrant (sl. 1.6), gdje je  $\psi$  ulančani magnetski tok.



Sl. 1.6.  $\psi$  -  $i$  krivulje induktiviteta.



Sl. 1.7. Simbol induktiviteta: a) linearnog; b) nelinearnog.

Kao i otpor, induktivitet može biti linearan (krivulja 1) i nelinearan (krivulja 2). Linearni induktivitet definiran je pravcem (krivulja 1, sl. 1.6), a shematski je prikazan na slici 1.7a. Konstanta  $L$  zove se induktivitet, a mjeri se jedinicom henri ( $1 \text{ H} = 1 \text{ Vs/Am}$ ).

Napon na induktivitetu definiran je relacijom

$$u_L = \frac{d\psi}{dt} = -e_L, \quad (1.19)$$

gdje je  $e_L$  inducirana elektromotorna sila.

Kod linearnog induktiviteta vrijedi da je  $\psi = Li$ , pa se dobije da je napon na induktivitetu

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}. \quad (1.20)$$

To je prva relacija između napona i struje, a druga se dobije integriranjem relacije (1.20), tj.

$$i_L = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt, \quad (1.21)$$

gdje je

$$i_L(0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L dt,$$

zatečena ili početna struja u induktivitetu. Iz relacije (1.21) slijedi da je struja induktiviteta kontinuirana funkcija. To znači da struja induktiviteta nema skoka, što se matematički izražava relacijom

$$i_L(t_{(-)}) = i_L(t_{(+)}) , \quad (1.22)$$

tj. vrijednost struje u trenutku  $t_{(-)}$ , nešto malo prije  $t$ , jednaka je struji u trenutku  $t_{(+)}$  nešto malo iza  $t$ . Relacija (1.22) predstavlja **prvi uvjet komutacije** koji upućuje na to da struja induktiviteta nema skoka, već se kontinuirano mijenja.

Nelinearni induktivitet definiran je relacijom  $\psi = f(i)$  (krivulja 2, sl. 1.6), a shematski je prikazan na slici 1.7b. Napon na nelinearnom induktivitetu jednak je

$$u_L = \frac{\partial f}{\partial i_L} \cdot \frac{di_L}{dt}. \quad (1.23)$$

Ovdje nije jednostavno izraziti zavisnost struje i napona, kao što je to kod linearnog induktiviteta.

### b) Snaga

Trenutna snaga na induktivitetu je

$$p_L = u_L \cdot i_L, \quad (1.24)$$

a za linearni induktivitet može se napisati u obliku

$$p_L = Li_L \frac{di_L}{dt}.$$

Trenutna snaga na induktivitetu može biti pozitivna i negativna. Kada je trenutna snaga pozitivna, energija ulazi u induktivitet, odnosno uspostavlja se magnetsko polje. Kada je trenutna snaga negativna, razgrađuje se magnetsko polje i energija izlazi iz induktiviteta. Na induktivitetu se ne troši energija, pa je radna snaga jednaka nuli.

### c) Energija

U skladu s relacijama (1.11) i (1.12) slijedi da je energija na induktivitetu u nekom trenutku ( $t$ )

$$w_L = \int_{\psi(0)}^{\psi(t)} i d\psi + w_L(0), \quad (1.25)$$

gdje je  $w_L(0)$  zatečena ili početna energija na induktivitetu.

Za linearni induktivitet dobije se da je trenutna energija

$$\boxed{w_L = \frac{Li_L^2}{2}}, \quad (1.26)$$

a početna energija

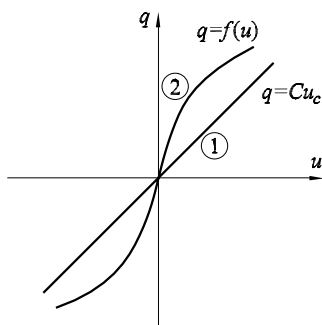
$$w_L(0) = \frac{Li_L^2(0)}{2}.$$

Dakle, energija na induktivitetu ovisi o kvadratu trenutne struje induktiviteta.

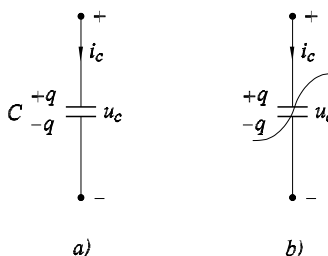
## 1.2.3. Kapacitet

### a) Definicija. Odnos napona i struje

Kapacitet je element strujnog kruga koji ima sposobnost akumuliranja energije električnog polja i može se opisati  $q$ - $u$  karakteristikom koja prolazi kroz prvi i treći kvadrant (sl. 1.8).



Sl. 1.8.  $q$ - $u$  krivulja kapaciteta.



Sl. 1.9. Simbol kapaciteta: a) linearnog; b) nelinearnog.

Prema obliku krivulje treba razlikovati linearni (krivulja 1) od nelinearnog kapaciteta (krivulja 2).

Linearni kapacitet definiran je pravcem, odnosno relacijom  $q = Cu$ . Konstanta  $C$  zove se kapacitet, a mjeri se u faradima ( $1\text{ F} = 1\text{ As/Vm}$ ). Shematski prikaz linearnog kapaciteta dan je na slici 1.9a.

Do odnosa napona i struje može se doći pomoću relacija:  $i = \frac{dq}{dt}$ ,  $q = Cu$ , tako da je

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}. \quad (1.27)$$

To je prva tražena relacija, a druga se dobije integriranjem gornje relacije

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt, \quad (1.28)$$

gdje je

$$u_C(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_C dt,$$

zatečeni ili početni napon na kapacitetu  $C$  u trenutku  $t = 0$ . Iz relacije (1.28) slijedi da je napon na kapacitetu kontinuirana funkcija, tj. nema skoka, što se matematički može izraziti relacijom

$$u_C(t_{(-)}) = u_C(t_{(+)}) \quad (1.29)$$

Ta relacija predstavlja **drugi uvjet komutacije**, koji tvrdi da se napon na kapacitetu mijenja kontinuirano.

Nelinearni kapacitet definiran je relacijom  $q = f(u_C)$  (krivulja 2, sl. 1.8), a shematski je prikazan na slici 1.9b. Pomoću te relacije može se odrediti veza između struje i napona na kapacitetu

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u_C} \cdot \frac{du_C}{dt}. \quad (1.30)$$

## b) Snaga

Trenutna snaga na kapacitetu je

$$p_C = i_C \cdot u_C, \quad (1.31)$$

a na linearnom kapacitetu može se napisati u obliku

$$p_C = C \cdot u_C \frac{du_C}{dt}.$$

Trenutna snaga na kapacitetu može biti pozitivna i negativna. Kada je trenutna snaga pozitivna, energija ulazi u kapacitet (punjenje kapaciteta), a kada je negativna, energija izlazi iz kapaciteta (pražnjenje kapaciteta). Budući da se na kapacitetu ne troši energija, radna snaga je nula.

### c) Energija

U skladu s relacijom (1.11) dobije se da je energija na kapacitetu

$$w_C = w_C(0) + \int_{q(0)}^{q(t)} u_C dq, \quad (1.32)$$

gdje je  $w_C(0)$  početna ili zatečena energija na kapacitetu.

Za linearni kapacitet vrijedi sljedeća relacija za energiju

$$\boxed{w_C = \frac{Cu_C^2}{2}}, \quad (1.33)$$

dok je početna energija

$$w_C(0) = \frac{Cu_C^2(0)}{2}.$$

Dakle, energija na kapacitetu ovisi o kvadratu trenutnog napona kapaciteta.

## 1.3. Aktivni elementi strujnog kruga

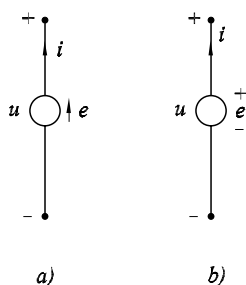
Izvori električne energije su aktivni elementi strujnog kruga, a mogu biti aktivni dvopoli i aktivni višepoli kao npr. trofazni generator.

U teoriji strujnih krugova postoje idealni izvori električne energije, i to naponski i strujni, koji se dijele na ovisne i neovisne izvore. Neovisni naponski i strujni izvor ne ovisi o naponu ili struji drugih grana mreže. Kod ovisnih (upravljivih) izvora parametri ovise o naponu ili struji u drugim granama mreže (razni električni sklopovi). Ovisni izvori, i naponski i strujni, mogu biti naponski ili strujno ovisni. U ovoj knjizi upotrebljavat će se samo neovisni izvori, pa će se ubuduće kratko govoriti samo naponski izvor i strujni izvor. Električni izvor kao dvopolni element definiran je krivuljom u  $u-i$  ravnini.

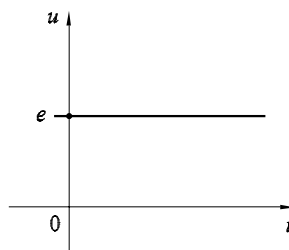


### 1.3.1. Naponski izvor

Naponski izvor (EMS) takav je dvopolni element kod kojega je napon na njegovim priključnicama neovisan o struji koja kroz njega teče. Takav se izvor zove idealni naponski izvor. Kod njega je vanjski napon uvijek jednak po iznosu EMS, jer nema gubitaka napona u izvoru. EMS je u općem slučaju funkcija vremena, a može poprimiti razne oblike. Potpun opis naponskog izvora traži poznavanje funkcije  $e(t)$ . Naponski izvor shematski se označava simbolom kao na slici 1.10. Smjer EMS može se označiti strelicom (sl. 1.10a) ili sa “+” i “-” (sl. 1.10b), a vanjski napon izvora na uobičajeni način sa “+” i “-” na priključnicama.



Sl. 1.10. Idealni naponski izvor:  
a) simbol EMS sa strelicom;  
b) simbol EMS sa “+” i “-”.



Sl. 1.11.  $u$ - $i$  karakteristika idealnog naponskog izvora.

Kod izvora koji daje električnu energiju smjer struje podudara se sa smjerom EMS, pa se ta dva smjera smatraju usklađenim smjerovima. U tom slučaju referentni smjerovi struje i napona nisu usklađeni kao kod pasivnih dvopola, pa se iz produkta  $u(t)i(t)$ , koji je negativan, vidi da takav dvopolni element oslobađa (daje) energiju. Stoga se snaga izvora izražava pomoću EMS na sljedeći način

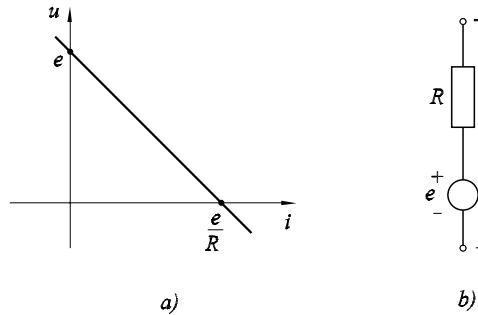
$$p_e = e \cdot i \quad (1.34)$$

U slučaju kada su usklađeni smjerovi EMS i struje tada je  $p_e > 0$ , što znači da izvor daje energiju, a u suprotnom slučaju prima energiju.

Idealni naponski izvor ima  $u$ - $i$  karakteristiku koja je pravac paralelan s osi  $i$  (sl. 1.11), tj. napon na priključnicama ne ovisi o struji.

Kod realnog naponskog izvora postoji gubitak napona, koji ovisi o iznosu struje koja teče kroz izvor. Prema tome, voltamperska karakteristika realnog izvora neće biti pravac paralelan s osi  $i$ , već može općenito biti bilo kakva krivulja koja ne prolazi kroz ishodište (sl. 1.12a).

Realni naponski izvor prikazuje se u shemama strujnih krugova s EMS i nekim pasivnim dvopolom, koji može biti kombinacija RLC elemenata (sl. 1.12b). U slučaju kada je voltamperska karakteristika realnog izvora pravac, tada je unutrašnji pasivni dvopol izvora linearan (otpor sl. 1.12a). Idealni naponski izvor nema unutrašnjeg otpora.

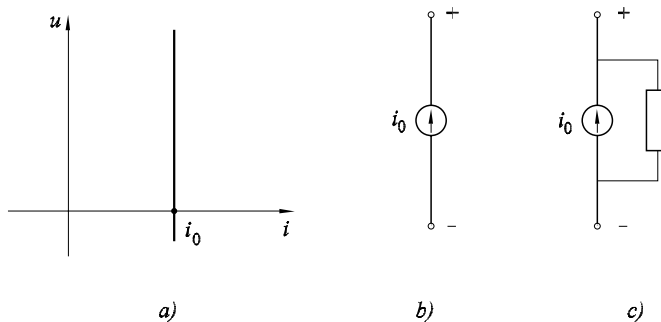


Sl. 1.12. Realni naponski izvor: a)  $u$ - $i$  karakteristika izvora; b) shema realnog naponskog izvora.

Teoretski, slijedi da idealni izvor ima beskonačnu snagu, jer može postići beskonačnu struju, za razliku od realnoga koji ne može ni teoretski postići beskonačnu struju. Praktični izvor ima ograničenu snagu.

### 1.3.2. Strujni izvor

Strujni idealni izvor takav je dvopolni element kod kojega struja koja prolazi kroz njegove priključnice ne ovisi o naponu između tih priključnica. Karakteristika idealnoga strujnog izvora je pravac paralelan s osi  $u$  (sl. 1.13a). Idealni strujni izvor shematski je prikazan na slici 1.13b s ucrtanim referentnim smjerom struje. Za potpun opis idealnoga strujnog izvora potrebno je poznavati funkciju  $i_0(t)$ . Napon na priključnicama izvora raste s otporom trošila, pa isto kao kod idealnoga naponskog izvora, može se promatrati kao izvor beskonačne snage, što svakako nema smisla. Za idealni strujni izvor kaže se da ima beskonačni unutarnji otpor. Realni strujni izvor se sastoji od idealnoga strujnog izvora i paralelno priključenoga pasivnog dvopola (sl. 1.13c). Kasnije će biti pokazano da su realni naponski i realni strujni izvori ekvivalentni s obzirom na vanjske priključnice, što znači da imaju istu  $u$ - $i$  karakteristiku.



Sl. 1.13. Strujni izvor: a)  $u$ - $i$  karakteristika idealnoga strujnog izvora; b) simbol idealnoga strujnog izvora; c) shema realnog strujnog izvora.