1 Kinematika

Kinematika je grana mehanike koja opisuje gibanje tijela, pri čemu uzroci gibanja nisu dio opisa.

Jednodimenzijsko gibanje

Kad se tijelo giba po pravcu ili unaprijed zadanoj krivulji (npr. cesti), položaj tijela u vremenu t opisujemo jednom varijablom zvanom duljina puta s. S pomoću duljine puta možemo definirati trenutačnu brzinu v i trenutačno ubrzanje a

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.1}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}. \tag{1.2}$$

Jednoliko jednodimenzijsko gibanje označava gibanje pri kojem je brzina v konstantna. Gibanje tada opisuje jednadžba

$$s = vt + s_0, \tag{1.3}$$

gdje je s trenutačna i s_0 početna duljina puta.

Jednoliko ubrzano jednodimenzijsko gibanje označava gibanje pri kojem je ubrzanje a konstantno. Gibanje tada opisuju jednadžbe

$$s = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0 \tag{1.4}$$

$$v = at + v_0, \tag{1.5}$$

gdje su s trenutačna i s_0 početna duljina puta te v trenutačna i v_0 početna brzina tijela. Kod rješavanja zadatka često se koristi i treća jednadžba izvedena iz prvih dviju

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0). \tag{1.6}$$

Kad se promatrano tijelo neprestano vraća u početnu točku, ili određena točka predstavlja ravnotežni položaj, umjesto duljine puta s koristimo **otklon** x. Unatoč promjeni oznake i naziva svi zapisani izrazi ostaju nepromijenjeni.

Višedimenzijsko gibanje

Kad se tijelo giba u prostoru, položaj tijela opisujemo **vektorom položaja** $\vec{r}$, koji se proteže od ishodišta koordinatnog sustava do položaja promatranog tijela. S pomoću vektora položaja možemo definirati vektor trenutačne brzine $\vec{v}$ i trenutačnog ubrzanja $\vec{a}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1.7}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{1.8}$$

Jednoliko višedimenzijsko gibanje označava gibanje pri kojem je vektor brzine konstantan. Gibanje tada opisuje općenitiji oblik jednadžbe (1.3)

$$\vec{r} = \vec{v}t + \vec{r}_0, \tag{1.9}$$

gdje $\vec{r}$ označava trenutačni, a $\vec{r}_0$ početni vektor položaja tijela.

Jednoliko ubrzano višedimenzijsko gibanje označava gibanje pri kojem je vektor ubrzanja $\vec{a}$ konstantan. Gibanje tada opisuju općenitiji oblici jednadžbi (1.4,1.5)

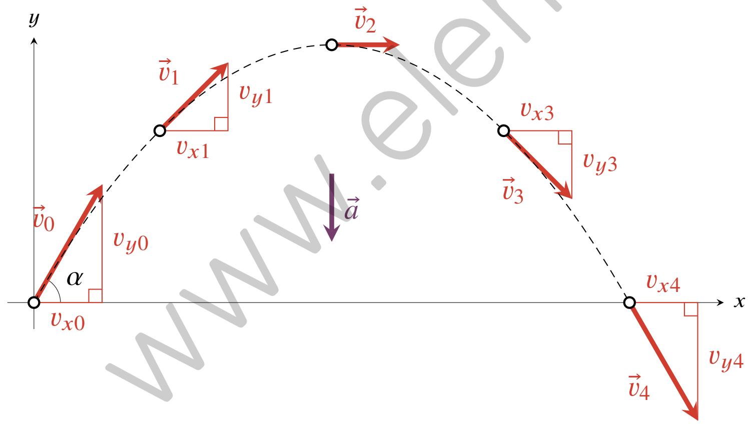
$$\vec{r} = \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \tag{1.10}$$

$$\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_0, \tag{1.11}$$

gdje su $\vec{r}$ vektor trenutačnog i $\vec{r}_0$ vektor početnog položaja tijela te $\vec{v}$ vektor trenutačne i $\vec{v}_0$ vektor početne brzine tijela. Kod rješavanja zadatka često se koristi i treća jednadžba izvedena iz prvih dviju

$$v^2 = v_0^2 + 2\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0). \tag{1.12}$$

Ovdje točka označava skalarni umnožak vektora.



Slika 1.1: Kosi hitac.

Kad se tijelo (bez vlastitog pogona) nalazi blizu površine Zemlje, giba se konstantnim ubrzanjem slobodnog pada $\vec{g}$, koje je usmjereno vertikalno prema dolje. Njegov je iznos ovisan o nadmorskoj visini i geografskoj širini, dok za standardni iznos uzimamo $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Obzirom na to da su kod velike većine zadataka podatci zadani dvjema pouzdanim znamenkama, pri rješavanju je za ubrzanje slobodnog pada uzeta aproksimacija $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

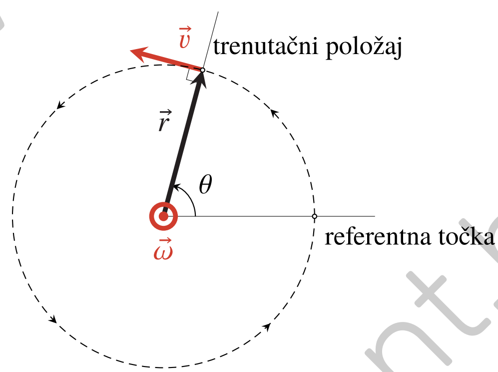
Svako gibanje tijela blizu površine Zemlje zapravo je **dvodimenzijsko** jer se tijelo giba po vertikalnoj ravnini. Po dogovoru y-os Kartezijeva koordinatnog sustava usmjerimo prema gore, dakle orijentacijom suprotno od ubrzanja slobodnog pada ($\vec{a} = -g\vec{j}$), a x-os tako da početna brzina leži u xy-ravnini $\vec{v}_0 = v_{x0}\vec{i} + v_{y0}\vec{j}$ (slika 1.1). Time svaku od jednadžbi (1.10,1.11) rastavimo na **dvije skalarne jednadžbe** i dobivamo

$$x(t) = v_{x0}t + x_0 \tag{1.13}$$
$$y(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_{y0}t + y_0 \tag{1.14}$$
$$v_x(t) = v_{x0} \tag{1.15}$$
$$v_y(t) = -gt + v_{y0}. \tag{1.16}$$

Pri tome smo uzeli u obzir da je ubrzanje u x-smjeru jednako $a_x = 0$, a ubrzanje u y-smjeru $a_y = -g$, što znači da imamo u x-smjeru jednoliko gibanje, a u y-smjeru jednoliko ubrzano gibanje. Napisane parametarske jednadžbe za položaj tijela u xy-grafu opisuju **parabolu**. Primijetite i to da pri najvećoj visini y-komponenta brzine iznosi nula (slika 1.1).

Kruženje i okretanje

Kruženje u najužem značenju predstavlja posebni oblik dvodimenzijskog gibanja u kojem se tijelo giba po kružnici, pri čemu je dimenzija tijela puno manja od polumjera kružnice. Za ishodište opažanja po dogovoru uzimamo središte kružnice. Za opis položaja tijela dovoljna je jedna varijabla; kut s vrhom u središtu kružnice dok njegovi krakovi prolaze kroz referentnu točku na kružnici i trenutačni položaj tijela na kružnici. Taj kut u ovoj knjizi označit ćemo oznakom θ (slika 1.2).



Slika 1.2: Položaj i brzina pri kruženju.

Kut za opis položaja tijela mjerimo u bezdimenzijskim jedinicama **radijanima**. Radijan je omjer duljine kružnog luka koju određuje kut i polumjera. Pretvorba iz stupnjeva u radijane je sljedeća

$$\theta/\text{rad} = \frac{\pi}{180^\circ}\theta/^\circ. \tag{1.17}$$

Radijan se skoro nikad ne označava.

S pomoću kuta θ možemo definirati trenutačnu kutnu brzinu ω i trenutačno kutno ubrzanje α

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1.18}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}. \tag{1.19}$$

Kutna brzina $\vec{\omega}$ zapravo je vektor koji leži duž osi vrtnje i čiju orijentaciju odredimo **pravilom desne ruke** (slika 1.2). I kutno ubrzanje $\vec{\alpha}$ je vektor, koji leži duž osi vrtnje. Kad se kutna brzina povećava, vektor kutnog ubrzanja je orijentiran jednako kao i vektor kutne brzine, inače je orijentiran suprotno (slika 1.3).

Jednoliko kruženje označava gibanje po kružnici pri kojem je kutna brzina ω konstantna. Gibanje tada opisuje jednadžba

$$\theta = \omega t + \theta_0, \tag{1.20}$$

gdje su θ trenutačni i θ_0 početni kut tijela. Obratite pažnju na sličnost s jednadžbom za jednoliko jednodimenzijsko gibanje (1.3).

Jednoliko ubrzano kruženje označava gibanje po kružnici pri kojem je kutno ubrzanje α konstantno. Gibanje tada opisuju jednadžbe

$$\theta = \tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \tag{1.21}$$

$$\omega = \alpha t + \omega_0, \tag{1.22}$$

gdje su θ trenutačni i θ_0 početni kut tijela te ω trenutačna i ω_0 početna kutna brzina tijela. Kod rješavanja zadatka često se koristi i treća jednadžba izvedena iz prvih dviju

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0). \tag{1.23}$$

Obratite pažnju na sličnost s jednadžbama za jednoliko ubrzano jednodimenzijsko gibanje (1.4,1.5,1.6).

Pri kruženju korisno je definirati i frekvenciju f te broj okretaja N

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{1.24}$$

$$N = \frac{\theta}{2\pi}. \tag{1.25}$$

Pri jednolikom kruženju trajanje jednog ciklusa (vrijeme koje tijelu treba za jedan puni obilazak po kružnici) nazivamo period T

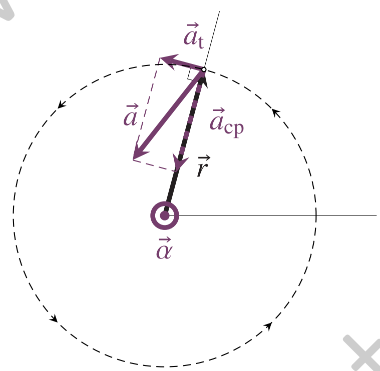
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}. \tag{1.26}$$

Pri kruženju po kružnici polumjera r odnosi između duljine puta i kuta te brzine i kutne brzine su

$$s = \theta r \tag{1.27}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad v = \omega r. \tag{1.28}$$

Ovdje križić označava vektorski umnožak vektora.



Slika 1.3: Ubrzanja pri kruženju.

Pri svakom se kruženju nužno mijenja **smjer** vektora brzine, a pri ubrzanom kruženju i **iznos** vektora brzine. Zbog promjene smjera javlja se centripetalno ubrzanje $\vec{a}_{cp}$, usmjereno prema središtu kruženja, a zbog promjene iznosa i tangencijalno ubrzanje $\vec{a}_t$, koje leži na tangenti na kružnicu (slika 1.3)

$$\vec{a}_{cp} = -\omega^2 \vec{r} \qquad a_{cp} = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} \tag{1.29}$$

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \qquad a_t = \alpha r. \tag{1.30}$$

Ukupno ubrzanje tijela $\vec{a}$ zbroj je tangencijalnog i centripetalnog ubrzanja

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_{cp} \implies a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2}, \tag{1.31}$$

gdje smo uzeli u obzir, da su tangencijalno i centripetalno ubrzanje međusobno uvijek okomiti.

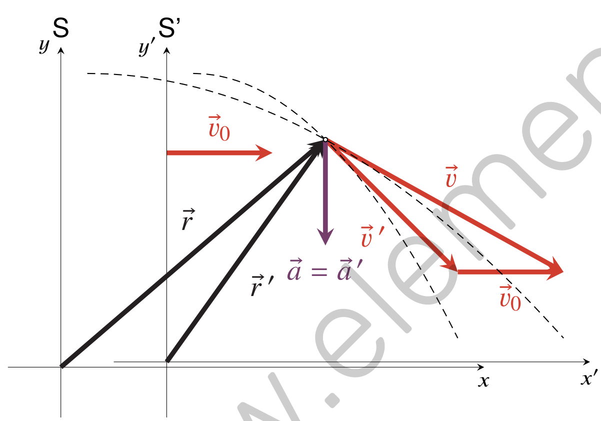
Zapisane izraze možemo upotrijebiti i pri **okretanju** – to je gibanje krutog tijela pri kojem točke tijela na osi vrtnje miruju, dok se sve ostale točke zakreću za jednak kut. Možemo dokazati da se sve točke tijela gibaju jednakom kutnom brzinom i kutnim ubrzanjem, pa za sve točke krutog tijela vrijede izrazi iz ovog odjeljka; dakako uzimajući u obzir da polumjer kružnice r za pojedine točke može biti različit.

Kad promatrano tijelo neprestano mijenja smjer okretanja i ne pravi pune zakrete, ili određen položaj tijela predstavlja ravnotežni položaj, umjesto kuta koristimo izraz zakret θ. Unatoč promjeni naziva svi zapisani izrazi ostaju nepromijenjeni.

Galileijeve transformacije

Fizički proces možemo promatrati iz različitih koordinatnih sustava. Ipak, ispada da osnovni zakoni dinamike vrijede u koordinatnim sustavima koji su u mirovanju ili se gibaju jednoliko pravocrtno. Takve sustave nazivamo **inercijski sustavi**.

Dva inercijska koordinatna sustava mogu se u odnosu jedan prema drugom gibati konstantnom brzinom. Opis gibanja nekog tijela u tim dvama sustavima nije jednak, ali možemo naći jednostavnu vezu među položajima, brzinama i ubrzanjima u oba sustava. Te odnose nazivamo **Galileijeve transformacije**.



Slika 1.4: Galileijeve transformacije.

Na slici 1.4 nacrtan je jednostavan primjer dvaju sustava, pri čemu se u sustavu S nalazi promatrač, dok se sustav S' giba brzinom $\vec{v}_0$ u x-smjeru u odnosu na sustav S.

Pod pretpostavkom da su sustavi u početnom trenutku $t = 0$ identični, Galileijeve transformacije su sljedeće

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{v}_0 t \tag{1.32}$$
$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0 \tag{1.33}$$
$$\vec{a} = \vec{a}\,', \tag{1.34}$$

gdje su $\vec{r}\,'$ i $\vec{v}\,'$ vektor položaja i brzina tijela u sustavu S', a $\vec{r}$ i $\vec{v}$ vektor položaja i brzina tijela u sustavu S.

1.1 Gibanje po pravcu

1.1 Procijenite koliko vremena putuje svjetlost od Sunca do Zemlje ako je prosječna udaljenost Zemlje i Sunca $1{,}5 \cdot 10^8$ km te brzina svjetlosti $2{,}998 \cdot 10^5$ km/s. ($5{,}0 \cdot 10^2$ s)

1.2 Petnaest sekundi nakon bljeska začujemo grom. Koliko je daleko udarila munja uzimajući u obzir za brzinu zvuka 340 m/s? (5,1 km)

1.3 Automobil vozi najprije 1,0 km konstantnom brzinom 72 km/h, a potom 2,0 km brzinom 60 km/h. Kolika je prosječna brzina automobila na cijelom putu? (64 km/h)

1.4 Automobil prijeđe polovinu puta brzinom 50 km/h. Kolikom brzinom mora prijeći drugu polovinu puta da bi prosječna brzina bila 100 km/h? (nema rješenja)

1.5 Na ravnoj autocesti nalaze se dva automobila. Prvi automobil giba se konstantnom brzinom 75 km/h i ima u početnom trenutku 150 m prednosti pred drugim automobilom, koji se giba konstantnom brzinom 120 km/h. Nakon koliko će vremena drugi automobil dostići prvi? (12 s)

www.element.hr

1.6 U početnom trenutku nalazimo se na mjestu A, koje je najbliža točka otoka s obzirom na ravnu obalu. Želimo što prije doći do točke C na obali, pri čemu je udaljenost okomice od A na obalu i mjesta C 7,0 km. Po moru veslamo brzinom 4,5 km/h, po obali hodamo brzinom 7,5 km/h. Koliko se daleko od okomice od A na obalu trebamo iskrcati kako bismo bili što prije na cilju? Koliko vremena tada traje putovanje? (4,5 km, 2,0 h)

1.7 Mornar promatra dva broda. Prvi, koji je 5,0 km sjeverno i 1,0 km istočno od njega plovi brzinom 3,0 km/h prema istoku. Drugi brod koji je 2,0 km sjeverno i 3,0 km istočno od mornara plovi komponentama brzina 1,0 km/h prema sjeveru i 2,0 km/h prema istoku. Nakon koliko će se vremena brodovi najviše približiti? Kolika je tada njihova međusobna udaljenost i kolika je udaljenost od mornara? (2,5 h, 0,7 km, 9,9 km, 9,2 km)

1.8 U jamu nepoznate dubine pustimo kamen. Koliko je jama duboka ako kamen padne na dno nakon 4,0 s? Kolikom brzinom kamen padne na dno? Zadatak riješite kinematički, upotrebom vektora i u različito odabranim koordinatnim sustavima. (80 m, 40 m/s)

1.9 Kamen bacimo vertikalno prema gore početnom brzinom 30 m/s. Nakon koliko će vremena njegova brzina biti 10 m/s prema dolje? Kolika će tada biti njegova visina? (4,0 s, 40 m)

1.10 Kamen bacimo s visine 1,6 m vertikalno prema gore brzinom 9,2 m/s. Nakon koliko vremena kamen padne na tlo? (2,0 s)

1.11 Automobil koji skrene s lokalne ceste na autocestu počinje jednoliko ubrzavati. U vremenu dok brzina automobila naraste sa 50 km/h na 130 km/h, brojač pokaže da se prijeđen put povećao za duljinu 0,2 km. Koliko vremena automobil ubrzava? (8,0 s)

1.12 Lokalni vlak vozi na pruzi gdje su susjedne stanice udaljene 1,0 km. Kako bi skratio vrijeme vožnje, vlak najprije neko vrijeme ubrzava 0,10 m/s^2, dok ostali dio udaljenosti koči 0,50 m/s^2. Pri tome ne dostigne svoju najveću moguću brzinu. Koliko vremena traje vožnja? ($1{,}5 \cdot 10^2$ s)

www.element.hr

1.13 ✱ Balon se diže vertikalno konstantnim ubrzanjem 0,16 m/s^2. Iz njega ispadne vreća pijeska 70 s nakon početka dizanja s tla. Nakon koliko vremena od početka dizanja balona padne vreća pijeska na tlo? (80 s)

1.14 Iz balona, koji lebdi na visini 110 m iznad tla, ispustimo kamen. Nakon koliko ćemo vremena čuti udarac kamena o tlo ako je brzina zvuka 340 m/s? (5,0 s)

1.15 Automobil, koji je na početku u mirovanju, jednoliko ubrzava 20 s dok ne dostigne brzinu 90 km/h, a nakon toga se giba jednoliko. Kolika je duljina puta prijeđenog u prvoj minuti vožnje? (1,3 km)

1.16 ✱ Kolikom se brzinom smije gibati automobil ako je vidljivost zbog magle smanjena na 50 m? Reakcijsko vrijeme vozača je 1,0 s, dok je ubrzanje pri kočenju 3,0 m/s^2. (52 km/h)

1.17 ✱ Teretnjak vozi brzinom 21 m/s. Vozač iznenada ugleda nepomični automobil na udaljenosti 110 m. Nakon prolaska reakcijskog vremena pritisne na kočnicu te počinje usporavati sa 3,0 m/s^2. Koliko je najveće dozvoljeno reakcijsko vrijeme vozača da zaustavi teretnjak ispred automobila? (1,7 s)

1.18 Koliko vremena treba autobusu da prijeđe udaljenost 3,0 km između dviju susjednih stanica ako je njegova najveća moguća brzina, koju na putu i dostigne, 72 km/h te ako ubrzava i usporava 2,0 m/s^2? (160 s)

1.19 Automobil koji se kreće konstantnom brzinom 64 km/h, u određenom trenutku prođe pokraj nepomičnog policajca na motoru. Jednu sekundu kasnije policajac pojuri za automobilom ubrzanjem 5,0 m/s^2. Kolika je brzina policajca u trenutku kad dostigne automobil? (40 m/s)

1.20 ✱ Rijeka teče iz mjesta A u mjesto B konstantnom brzinom. Brodu treba za put iz A u B 5 dana, a za put iz B u A 7 dana. Koliko vremena treba za isti put komad drveta koji pustimo iz mjesta A? (35 dana)

1.2 Višedimenzijsko gibanje

1.21 Rijeka širine 500 m teče konstantnom brzinom 10 km/h. Koliko vremena treba čamcu da doplovi iz točke na jednoj strani rijeke u najbližu točku na drugoj strani rijeke? Brzina čamca na nepomičnoj vodi je 15 km/h. (160 s)

1.22 Čamcem želimo prijeći rijeku širine 60 m koja teče brzinom 2,0 m/s. Iako čamac usmjerimo djelomično nasuprot toka, nakon 30 s pristanemo 15 m od najbliže točke na drugoj obali rijeke u smjeru toka. Kolika bi bila brzina čamca na nepomičnoj vodi? (2,5 m/s)

1.23 S vrha 20 m visoke litice bacimo kamen brzinom 20 m/s koso prema gore pod kutom 60° s obzirom na horizontalu. Koliko daleko od dna litice i kolikom brzinom doleti kamen na tlo? (44 m, 28 m/s)

1.24 Izračunajte kolikom je brzinom atletičarka Perković bacila disk kada je na Olimpijskim igrama pobijedila hitcem duljine 69,21 m? Pretpostavimo da je disk bacila pod idealnim kutom 45,0° s visine 1,50 m. (28,4 m/s)

1.25 Vatrogasac s visine 1,0 m usmjeri mlaz brzine 20 m/s pod kutom 60° s obzirom na horizontalu prema 20 m udaljenom zidu. Na kojoj visini i pod kolikim kutom, s obzirom na zid, mlaz pogodi zid? (15,6 m, 75°)

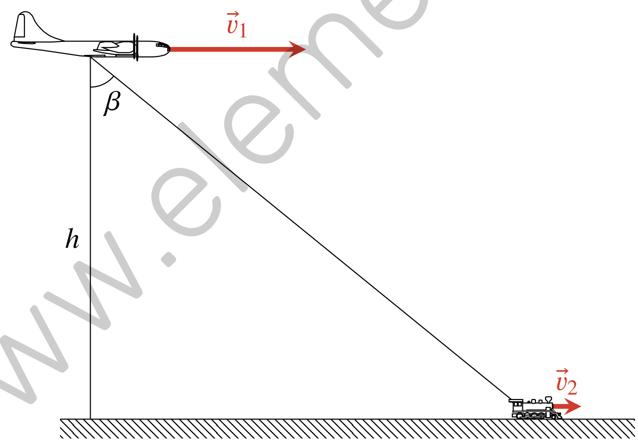
1.26 Projektil ispalimo brzinom 360 m/s pod kutom 60° s obzirom na horizontalu. Nakon koliko će vremena brzina projektila iznositi 300 m/s? (7,2 s, 55,2 s)

1.27 Projektil je ispaljen koso uvis. Nakon 4,0 s dostigne najveću visinu te brzinu 30 m/s. Kolikom je brzinom ispaljen projektil? (50 m/s)

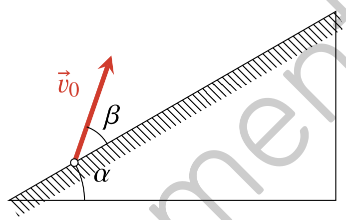
1.28 Malo tijelo ispalimo s horizontalnog tla brzinom 10 m/s pod kutom 45° s obzirom na horizontalu. Kad dostigne najveću visinu, sudari se s nepomičnim zidom, horizontalno se odbije i padne na tlo 1,0 m ispred mjesta ispaljivanja. Kolikom se brzinom tijelo odbilo od zida? (5,7 m/s)

www.element.hr

1.29 ⚙ Bombarder leti horizontalno na visini $h = 1200\,\mathrm{m}$ brzinom $v_1 = 120\,\mathrm{m/s}$ i želi pogoditi lokomotivu koja vozi brzinom $v_2 = 90\,\mathrm{km/h}$ u istom smjeru, kao što je prikazano na slici. Koliki kut β mora crta koja povezuje zrakoplov i lokomotivu zatvarati s vertikalom u trenutku kad posada ispusti bombu kako bi pogodila lokomotivu? (51°)



1.30 ⚙⚙ Pod kolikim kutom β u odnosu na kosinu nagibnog kuta α na slici moramo baciti tijelo brzinom v_0, kako bi palo okomito na kosinu? ($\tan\beta = \frac{1}{2}\cot\alpha$)



1.31 ⚙ Kamen bacimo brzinom $20\,\mathrm{m/s}$ pod kutom 60° s obzirom na horizontalu. Nakon koliko će vremena vektor ubrzanja i vektor brzine zatvarati kut 75° s obzirom na horizontalu? (2,0 s)

1.32 ⚙⚙ Vlak se giba jednoliko ubrzano. U njemu bacimo 50 cm iznad poda vagona kuglicu vertikalno prema gore početnom brzinom 1,0 m/s. Kuglica padne na pod vagona 10 cm iza točke s koje smo je bacili. Izračunajte ubrzanje vlaka. ($1{,}1\,\mathrm{m/s^2}$)