1 Kombinatorika

1.1. Skupovi

Skup. *Kombinatorika* je grana matematike koja proučava probleme svrstavanja, raspoređivanja i prebrojavanja, i to uglavnom elemenata konačnih skupova i struktura. Prema tvorcu teorije skupova G. Cantoru[1] pod *skupom* podrazumijevamo svako sabiranje određenih, različitih objekata naše intuicije ili misli (koje nazivamo elementima skupa) u jednu cjelinu. Taj izričaj iz 1895. iskazuje skup kao cjelinu sastavljenu od objekata nazvanih elementima skupa, a plod je neposrednoga shvaćanja, pa skup kao takav ne definiramo. Drugim riječima, skup se smatra elementarnim matematičkim pojmom koji se ne svodi na elementarnije pojmove. To da je neki objekt x element nekog skupa A zapisujemo u obliku $x \in A$. Obratno, da x nije element skupa A pišemo u obliku $x \notin A$. Skup A najčešće se opisuje kao zbirka različitih elemenata x koji imaju neko zajedničko obilježje (svojstvo ili značajku) φ. To omogućuje definiranje skupa A kao kolekcije svih elemenata x s obilježjem φ te pišemo da je $A = \{x : \varphi(x)\}$. Primjeri skupova su: populacija ljudi, određene životinjske ili biljne vrste, pošiljka određenog broja nekog proizvoda itd. Specijalan slučaj skupa je *prazan skup* koji označavamo sa $\varnothing = \{\ \}$. Općenito ćemo skupove označivati velikim slovima, a njihove elemente malim slovima. Tako, neki skup A koji se sastoji od n elemenata pišemo u obliku:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \tag{1.1}$$

gdje vitičaste zagrade naznačuju da poredak elemenata skupa nije bitan.

Podskup, nadskup i partitivni skup. Neki skup može biti dio nekog većeg skupa ili može sadržavati neki manji skup. U navedenim primjerima to znači da, primjerice, unutar skupa populacije ljudi možemo definirati novi skup s obilježjem da su njegovi elementi osobe ženskog spola. Skup osoba ženskog spola sadržan je u skupu populacije ljudi, dok, obratno, skup ljudi sadržava skup žena. Sasvim

[1] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845. – 1918., njemački matematičar

općenito kažemo da je skup A *podskup* skupa B i pišemo $A \subseteq B$, odnosno skup B je *nadskup* skupa A s oznakom $B \supseteq A$ ako je svaki element x skupa A, tj. $x \in A$ ujedno element skupa B, tj. $x \in B$. Prazan skup $\emptyset$ je podskup svakoga skupa, odnosno skupu $\emptyset$ je svaki skup nadskup. Ako je svaki element skupa A element skupa B, a svaki element skupa B element skupa A, tj. vrijedi $A \subseteq B$ i ujedno $B \subseteq A$, tada su skupovi A i B jednaki što se kraće piše $A = B$. U suprotnom, skupovi A i B su različiti i pišemo $A \neq B$. Ako je ujedno $A \subseteq B$ i $A \neq B$, kažemo da je A *pravi podskup* skupa B s oznakom $A \subset B$, odnosno, B je *pravi nadskup* skupa A što zapisujemo sa $B \supset A$. Svaki skup može imati podskup. Neprazan skup A ima svakako više od jednog podskupa kojima sigurno pripadaju prazan skup $\emptyset$ i *identičan skup* A. Sve podskupove skupa A možemo proglasiti elementima novog skupa koji nazivamo *partitivni skup* skupa A i označavamo sa $\mathcal{P}(A)$.

Operacije na skupovima. Za dva skupa A i B čiji je zajednički nadskup Ω definiraju se osnovne operacije na skupovima. To su *unija*, *presjek* i *razlika skupova*. Unija skupova A i B označuje se sa $A \cup B$, a daje novi skup koji sadržava elemente x takve da vrijedi $x \in A$ ili $x \in B$. Presjek skupova A i B u oznaci $A \cap B$ daje skup elemenata x za koje je $x \in A$ i $x \in B$. Razlika skupova A i B oznake $A \setminus B$ je skup elemenata x takvih da je $x \in A$ i $x \notin B$. Kada je skup Ω jasno definiran, što će u nastavku redovito biti slučaj, razlika $\Omega \setminus A$ naziva se *komplement skupa* A i označuje sa $\overline{A}$. Za skupove A i B kažemo da su *disjunktni skup* ako je $A \cap B = \emptyset$. Definiramo li, primjerice, zajednički nadskup Ω kao skup populacije ljudi koji sadrži skup osoba muškog spola A, skup osoba ženskog spola B i skup malodobne djece C. Unija skupova $A \cup C$ predstavlja skup svih osoba muškog spola koji svakako uključuje mušku djecu, ali i djecu ženskog spola. Taj skup očito ne uključuje odrasle žene. Presjek $A \cap C$ obuhvaća samo mušku djecu. Razlika skupova $A \setminus C$ je skup isključivo odraslih muškaraca. Komplement skupa osoba muškog spola A je očito skup osoba ženskog spola B, a skupovi A i B su disjunktni jer ne postoje osobe koje su ujedno muškog i ženskog spola te je $A \cap B = \emptyset$.

Multiskup. *Multiskupom* smatramo cjelinu sastavljenu od elemenata koji se mogu ponavljati. To što je sastavljen od elemenata, multiskup čini sličnim pojmu skupa. Međutim, ponovljivost elemenata multiskupa čini ga različitim od skupa čiji elementi su uvijek jedinstveni. Multiskupove ćemo kao i skupove označivati velikim slovima pri čemu će, za razliku od skupova, multiskupovi imati dodan apostrof. Time naznačujemo da se elementi multiskupa mogu ponavljati. Multiskup A' koji ima n_1 identičnih elemenata a_1, n_2 identičnih elemenata a_2 pa sve do n_k identičnih elemenata a_k, gdje je ukupan broj elemenata multiskupa $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ možemo zapisati kao:

$$A' = \left\{ \overbrace{\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{n_1}, \underbrace{a_2, \ldots, a_2}_{n_2}, \ldots, \underbrace{a_k \ldots, a_k}_{n_k}}^{n=n_1+n_2+\ldots+n_k} \right\}.$$

Svaki od brojeva n_1, n_2 do n_k nazivamo *kratnost* ili *multiplicitet*. Uobičajeno je multiskupove zapisivati jednostavnije navođenjem samo različitih elemenata s njihovim kratnostima u obliku:

$$A' = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}. \tag{1.2}$$

Možemo uočiti da je multiskup (1.2) uz kratnosti $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1$ i broj različitih elemenata $k = n$ identičan skupu (1.1).

Kao primjer definirajmo multiskup koji predstavlja populaciju svih živih bića tako da su elementi multiskupa objedinjeni skupovi ljudi, životinja i biljaka. Ako je oznaka jedinke čovjeka a_1, životinje a_2 te biljke a_3 a njihove brojnosti su n_1, n_2 i n_3, tada su n_1, n_2 i n_3 kratnosti članova a_1, a_2 i a_3 te je multiskup oblika $A' = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, n_3 \cdot a_3\}$. Ovdje su kratnosti očito neke konačne vrijednosti. Međutim, u kombinatorici su vrlo važni multiskupovi čiji neki elementi imaju beskonačne kratnosti. Kratnosti takvih elemenata označujemo sa ∞. Specijalni slučaj je multiskup čiji su svi elementi beskonačne kratnosti. Njega zapisujemo u obliku:

$$A' = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \ldots, \infty \cdot a_k\}.$$

Primjerice, skup latiničnih slova potrebnih za pisanje na hrvatskom jeziku je abeceda koja se sastoji od $k = 30$ elementa $a_1 = a$, $a_2 = b$, $\ldots$, $a_{32} = \check{z}$. Nakon što se pišući iskoristi jedan znak, skupina slova umanjit će se za jedan njezin element tj. iskorišteni znak. Očito, da bismo bili u mogućnosti pisati u kontinuitetu bez ograničenja imajući uvijek na raspolaganju sva slova, moramo imati pristup takvoj skupini u kojoj se slova pojavljuju beskonačno mnogo puta, a to je multiskup oblika $A' = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \ldots, \infty \cdot \check{z}\}$.

Primjer 1.

Šah je igra u kojoj se rabi šest različitih bijelih figura i jednako toliko crnih figura. To su: kraljevi – ♔, ♚; kraljice – ♕, ♛; topovi – ♖, ♜; lovci – ♗, ♝; skakači – ♘, ♞ i pješaci – ♙, ♟. Sve figure definiramo kao elemente zajedničkog nadskupa oblika

Ω = {♔, ♕, ♖, ♗, ♘, ♙, ♚, ♛, ♜, ♝, ♞, ♟}.

Iz zajedničkog nadskupa možemo izdvojiti dva skupa i to skup bijelih figura:

A = {♔, ♕, ♖, ♗, ♘, ♙},

i skup crnih figura:

B = {♚, ♛, ♜, ♝, ♞, ♟}.

Proizvoljno možemo definirati i skup sastavljen od lovaca obje boje i skakača samo bijele boje:

C = {♗, ♝, ♘}.

Partitivni skup skupa C je skup svih njegovih podskupova:

$$\mathcal{P}(C)=\{\varnothing,\{♗\},\{♝\},\{♘\},\{♗,♝\},\{♗,♘\},\{♝,♘\},\{♗,♝,♘\}\}.$$

Unija skupova A i C je novi skup koji obuhvaća sve bijele figure i crnog lovca iz skupa C:

$$A\cup C=\{♔,♕,♖,♗,♝,♘,♙\}.$$

Presjek skupova A i C je skup s bijelim lovcem i bijelim skakačem:

$$A\cap C=\{♗,♘\}.$$

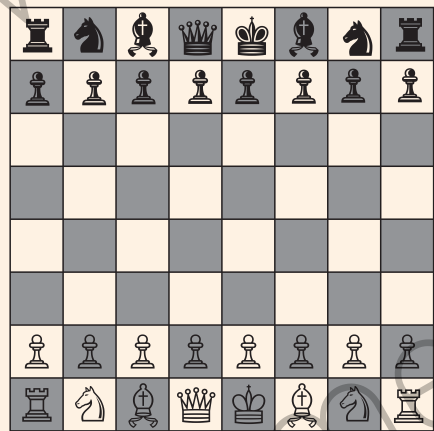
Komplement skupa A je skup B:

$$\overline{A}=\Omega\setminus A=B$$

te je očito presjek skupova A i B prazan skup:

$$A\cap B=\varnothing,$$

pa su ti skupovi disjunktni.



Slika 1.1. Šahovska ploča s figurama

Na slici 1.1. prikazan je početni položaj figura gdje vidimo da se u igri pojedine vrste figura pojavljuju s različitim kratnostima, tako da se za njihov prikaz koristimo pojmom multiskupa. Na taj način zajednički multiskup figura je:

$$\Omega'=\{1\cdot♔,1\cdot♕,2\cdot♖,2\cdot♗,2\cdot♘,8\cdot♙,1\cdot♚,1\cdot♛,2\cdot♜,2\cdot♝,2\cdot♞,8\cdot♟\}.$$

On se sastoji od multiskupa bijelih figura:

$$A'=\{1\cdot♔,1\cdot♕,2\cdot♖,2\cdot♗,2\cdot♘,8\cdot♙\},$$

i multiskupa crnih figura:

$$B' = \{1\cdot \text{♚},\ 1\cdot \text{♛},\ 2\cdot \text{♜},\ 2\cdot \text{♝},\ 2\cdot \text{♞},\ 8\cdot \text{♟}\}.$$

U oba multiskupa kratnosti kralja i kraljice su 1, topa, lovca i skakača 2 te pješaka 8.

1.2. Teorem o uzastopnom prebrojavanju

Metodama kombinatorike, koje daju odgovore na pitanja kao što su: na koliko se načina može dogoditi neki događaj ili koliko postoji elemenata s određenim svojstvom, koristimo se najviše u teoriji vjerojatnosti. Pri tome se temelj kombinatorike i njezin osnovni princip iskazuje se na sljedeći način.

Teorem o uzastopnom prebrojavanju. Ako je $T \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ skup uređenih n-torki $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ definiran tako da se prva komponenta a_1 može izabrati na p_1 različitih načina, druga komponenta a_2 na p_2 načina, i tako dalje do n-te komponente a_n, koja se može birati na p_n načina, tada skup T ima

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \tag{1.3}$$

elemenata. Ovo je sadržaj *teorema o uzastopnom prebrojavanju* koji se može iskazati i na sljedeći način: ako se prvi događaj može ostvariti na p_1 različitih načina, drugi na p_2 načina, i tako do n-tog događaja koji se može ostvariti na p_n načina, tada se svih n događaja može ostvariti na $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ načina.

Valjanost teorema dovoljno je dokazati metodom *matematičke indukcije* pri čemu u prvom koraku pretpostavljamo proizvoljan trivijalan slučaj uređenog para (a_1, a_2) koji se, pri odabiru a_1 na p_1 i a_2 na p_2 načina, može odabrati na ukupno

$$p(2) = p_1 \cdot p_2 \tag{1.4}$$

načina. Pretpostavimo sada da teorem vrijedi za uređenu $n-1$-torku $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ za koju je

$$p(n-1) = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}.$$

Shvati li se ovako definirana struktura kao jedinstvena komponenta $a_{1,2,\ldots,n-1} \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ koja se može birati na $p(n-1)$ način, tada se prema pretpostavci (1.4) uređena struktura oblika $(a_{1,2,\ldots,n-1}, a_n) \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ može odabrati na $p(n-1) \cdot p_n$ način, te je

$$p(n) = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} \cdot p_n.$$

Ovime je pokazano da ako pretpostavka vrijedi za uređeni par (a_1, a_2), te uređenu $n-1$-torku $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, onda ona vrijedi i za uređenu n-torku $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, pa teorem vrijedi za bilo koji broj članova n uređene n-torke $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$.

Primjer 2.

Na nekom stroju mogu se izrađivati dijelovi za neki sklop sastavljen iz triju dijelova, na način da se prvi dio izrađuje u 4 različite varijante, drugi dio u 7 varijanti, a treći dio sklopa u 5 varijanti. Koliko se različitih varijanti sklopova može montirati iz tih dijelova?

Rješenje. Prvi dio izrađuje se u 4 varijante, te se poistovjećuje s komponentom a_1 koja se može izraditi na $p_1 = 4$ različita načina. Slično tome, drugi dio izrađuje se u 7 varijanti, te komponenta a_2 može biti na $p_2 = 7$ načina, a treći dio a_3 bira se na $p_3 = 5$ načina. Dakle, skup $T \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3$ je skup uređenih trojki (a_1, a_2, a_3) koje poprimaju vrijednosti, odnosno koje se biraju na 4, 7, i 5 načina, te se, prema (1.3), od njih može montirati sklop na $p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 4 \cdot 7 \cdot 5 = 140$ načina.

Primjer 3.

Ako se u nekom pogonu koji opslužuje određena grupa radnika želi izabrati poslovođa i njegov zamjenik, pri čemu je poznato da 6 radnika posjeduje kvalifikaciju za poslovođu, a nakon njegovog izbora preostaje 7 radnika kvalificiranih za zamjenika, potrebno je ustanoviti na koliko se načina ovakav izbor može napraviti?

Rješenje. Radnici kvalificirani za poslovođu predstavljaju skup A_1 s elementima a_1 kojih ima $p_1 = 6$. Preostali radnici kvalificirani za zamjenika članovi su skupa A_2 i poistovjećujemo ih s elementima a_2 kojih je $p_2 = 7$. Dakle, skup $T \subseteq A_1 \times A_2$ uređenih parova (a_1, a_2) ima $p = p_1 \cdot p_2 = 6 \cdot 7 = 42$ elemenata, tj. poslovođa i zamjenik poslovođe mogu se birati na 42 različita načina.

Razmještaji objekata. Osnovni problem kombinatorike je određivanje broja načina na koji se neki objekti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mogu razmjestiti po nekomu unaprijed zadanu pravilu. To pravilo sastoji se od dviju izjava. Prva od njih je odgovor na pitanje prebrojava li se broj mogućih razmještaja uređenih objekata što znači da je njihov poredak bitan ili se prebrojavaju svi razmještaji neuređenih objekata pa njihov poredak nije bitan. Uređeni objekti čiju brojnost općenito označujemo sa r opisuju se uređenim r-torkama, dok se r neuređenih objekata opisuje skupovima od r članova. Druga odluka uzima u obzir ponavljaju li se objekti ili se ne ponavljaju. Ako se objekti ne ponavljaju, njihov odabir provodimo koristeći se skupovima

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

jer oni imaju sve elemente međusobno različite. U slučaju ponavljanja objekata rabimo elemente multiskupova

$$A' = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\},$$

u kojima se elementi mogu ponavljati. Uočimo da je multiskup A' čiji svi elementi imaju kratnosti $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1$ ustvari isto što i skup A.

Sve navedene varijante daju nove skupove čiji elementi mogu biti uređene r-torke takve da se njihovi elementi ne ponavljaju:

$$T = \{(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}) : a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \in A\}, \tag{1.5}$$

ili se elementi ponavljaju:

$$T = \{(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}) : a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \in A'\}, \tag{1.6}$$

te neuređene r-torke bez ponavljanja:

$$T = \{\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}\} : a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \in A\}, \tag{1.7}$$

ili s ponavljanjem:

$$T = \{\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}\} : a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \in A'\}. \tag{1.8}$$

U konačnici se kombinatorni problem svodi na prebrojavanje elemenata skupa T. Ti elementi očito mogu biti uređene ili neuređene r-torke sastavljene od objekata koji se k tome ne ponavljaju ili se mogu ponavljati. U teorijskom pristupu kombinatorici objedinjeno se skupovi tipa (1.5) i (1.6) nazivaju *permutacije*, a skupovi tipa (1.7) i (1.8) *kombinacije*. Nadalje, skupovi (1.5) i (1.7) su *permutacije* i *kombinacije skupova*, dok su skupovi (1.6) i (1.8) *permutacije* i *kombinacije multiskupova*. U praktičnoj primjeni koristi se nešto drukčije nazivlje užeg konteksta ograničenoga na najčešće praktične probleme prebrojavanja. To su *varijacije*, *kombinacije* i *permutacije* koje mogu biti *bez ponavljanja* ili *s ponavljanjem*, a obradit ćemo ih u nastavku.

Primjer 4.

Prebrojimo različite varijante preslagivanja skupova i multiskupova načinjenih iz skupine koju čini 20 igraćih karata, tj. špil prikazan na slici 1.2. Sve karte mogu se prikazati u obliku skupa:

Ω = {♣10, ♣J, ♣Q, ♣K, ♣A, ♦10, ♦J, ♦Q, ♦K, ♦A, ♠10, ♠J, ♠Q, ♠K, ♠A, ♥10, ♥J, ♥Q, ♥K, ♥A}

Preslagivanja karata razmatrat ćemo s obzirom na njihovu boju, pa ćemo, u skladu s time, obilježjem skupa proglasiti četiri različite boje karata: tref – ♣, herc – ♥, pik – ♠ i karo – ♦. Na taj način skupinu od 20 karata proglašavamo multiskupom s četiri različita elementa (boje) oblika:

$$\Omega' = \{5 \cdot ♣, 5 \cdot ♥, 5 \cdot ♠, 5 \cdot ♦\},$$

koji sadržava po 5 karata u jednoj boji. Budući da numeričko obilježje (desetka – 10) te slikovna obilježja (dečko – J, dama – Q, kralj – K i as – A) u ovome slučaju nisu bitna, pri označivanju karata ih ne bilježimo. Razmotrit ćemo 6 različitih kombiniranih slučajeva ovisno o tome radi li se o uređenim skupinama ili su te skupine neuređene, ponavljaju li se pojedini elementi unutar tih skupina te, ako se elementi ponavljaju, s obzirom na broj njihova ponavljanja. Rješenje za svaki problem dat ćemo usporedno s njegovim postavljanjem.

Slika 1.2. Špil od 20 karata

a) Potrebno je iz četiriju karata, od kojih je svaka druge boje tako da se mogu prikazati u obliku skupa

$$A = \{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit\},$$

načiniti sve moguće uređene parove boja. Svi mogući parovi pripadaju skupu:

$$T = \{(a_{i_1}, a_{i_2}) : a_{i_1}, a_{i_2} \in A\},$$

te je:

$$T = \{(\clubsuit, \heartsuit), (\heartsuit, \clubsuit), (\clubsuit, \spadesuit), (\spadesuit, \clubsuit), (\clubsuit, \diamondsuit), (\diamondsuit, \clubsuit), (\heartsuit, \spadesuit), (\spadesuit, \heartsuit), (\heartsuit, \diamondsuit), (\diamondsuit, \heartsuit), (\spadesuit, \diamondsuit), (\diamondsuit, \spadesuit)\}. \quad (1)$$

Prebrojavanjem se vidi da je broj mogućih varijanti 12. Taj broj moguće je i analitički izračunati uoči li se da se prvi član uređenoga para može odabrati na 4 načina, a nakon toga drugi član na preostala 3 načina. Prema teoremu o uzastopnom prebrojavanju ukupan broj varijanti je umnožak ovih dvaju brojeva te iznosi 12.

b) Iz četiriju karata od kojih su po dvije iste boje i čine multiskup

$$A' = \{\clubsuit, \clubsuit, \heartsuit, \heartsuit\} = \{2 \cdot \clubsuit, 2 \cdot \heartsuit\},$$

moguće je definirati skup uređenih parova

$$T = \{(a_{i_1}, a_{i_2}) : a_{i_1}, a_{i_2} \in A'\}$$

koji je jednak:

$$T = \{(\clubsuit, \clubsuit), (\clubsuit, \heartsuit), (\heartsuit, \clubsuit), (\heartsuit, \heartsuit)\}. \quad (2)$$

Prvi član uređenog para mogli smo birati na dva načina, a nakon toga drugi član također na dva načina. Ukupan broj odabira je prema teoremu o uzastopnom prebrojavanju jednak umnošku ovih dvaju brojeva i iznosi 4 što se potvrđuje neposrednim prebrojavanjem dobivena skupa.

c) Iz multiskupa četiriju karata takvih da su tri jedne boje, a jedna karta je neke druge boje:

$$A' = \{\clubsuit, \clubsuit, \clubsuit, \heartsuit\} = \{3\cdot\clubsuit, 1\cdot\heartsuit\}$$

kreira se skup svih uređenih parova:

$$T = \{(a_{i_1}, a_{i_2}) : a_{i_1}, a_{i_2} \in A\},$$

koji je oblika:

$$T = \{(\clubsuit, \clubsuit), (\clubsuit, \heartsuit), (\heartsuit, \clubsuit)\}. \tag{3}$$

U ovome slučaju ne možemo izravno primijeniti teorem o uzastopnom prebrojavanju, ali se za analitički izračun broja mogućih varijanti možemo poslužiti dosjetkom. Naime, budući da se $\heartsuit$ u skupu A' pojavljuje samo jedanput, očito se $\clubsuit$ mora pojaviti u svim mogućim uređenim parovima. Budući da kratnost od $\clubsuit$ iznosi 3, očito je i broj mogućih uređenih parova 3 što odgovara broju članova skupa uređenih parova dobivenim njihovim izravnim prebrojavanjem.

d) Iz skupa od četiriju karata međusobno različitih boja

$$A = \{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit\}$$

može se načiniti skup svih podskupova s po dva elementa:

$$T = \{\{a_{i_1}, a_{i_2}\} : a_{i_1}, a_{i_2} \in A\},$$

koji je:

$$T = \{\{\clubsuit, \heartsuit\}, \{\clubsuit, \spadesuit\}, \{\clubsuit, \diamondsuit\}, \{\spadesuit, \heartsuit\}, \{\heartsuit, \diamondsuit\}, \{\spadesuit, \diamondsuit\}\}. \tag{4}$$

Broj članova tog skupa je 6, a može se izračunati temeljem slučaja a). Naime, očito broj neuređenih parova mora biti dvostruko manji od broja uređenih parova. Broj uređenih parova u a) bio je 12 tako da je ovdje rezultat 6 kako je i očekivano.

e) Svi podskupovi skupa od dviju karata jedne boje i dviju karata druge boje:

$$A' = \{\clubsuit, \clubsuit, \heartsuit, \heartsuit\} = \{2\cdot\clubsuit, 2\cdot\heartsuit\},$$

sadržani su u skupu:

$$T = \{\{a_{i_1}, a_{i_2}\} : a_{i_1}, a_{i_2} \in A'\},$$

odnosno:

$$T = \{\{\clubsuit, \clubsuit\}, \{\clubsuit, \heartsuit\}, \{\heartsuit, \heartsuit\}\}. \tag{5}$$

Brojnost skupa (5) možemo analitički dobiti kao brojnost skupa uređenih parova (2) koja iznosi 4, umanjenu za 1 što daje 3.

f) Podskupovi koji se mogu načiniti od skupa četiriju karata od kojih su tri karte jedne boje a jedna karta je različite boje:

$$A' = \{\clubsuit,\ \clubsuit,\ \clubsuit,\ \heartsuit\} = \{3 \cdot \clubsuit,\ 1 \cdot \heartsuit\},$$

su elementi skupa

$$T = \{\{a_{i_1}, a_{i_2}\} : a_{i_1}, a_{i_2} \in A'\},$$

koji ima oblik:

$$T = \{\{\clubsuit,\ \clubsuit\}, \{\clubsuit,\ \heartsuit\}\}. \tag{6}$$

Broj elemenata posljednjega skupa dobivamo nakon zapažanja da se $\heartsuit$ može pojaviti u neuređenu paru samo jedanput i to s njemu različitim elementom $\clubsuit$. Element $\clubsuit$ može se pojaviti u paru još samo sa sebi jednakim elementom $\clubsuit$. To ukupno daje samo dvije različite mogućnosti.

U slučajevima a), b) i c), elementi skupa T prema izrazima (1), (2) i (3) poopćeno se nazivaju permutacije i u njima se pojavljuju uređene skupine objekata. U slučaju a) skupa (1) objekti se ne mogu ponavljati pa je to permutacija skupa, dok se u slučajevima b) skupa (2) i c) skupa (3) objekti ponavljaju i to su permutacije multiskupova. Poopćeno izraženo, slučajevi d), e) i f) obuhvaćaju elemente skupa T prema izrazima (4), (5) i (6) koji predstavljaju kombinacije gdje poredak elemenata nije bitan. U slučaju d) objekti skupa (4) se ne ponavljaju te ih nazivamo kombinacije skupa, dok se u varijantama e) skupa (5) i f) skupa (6) objekti ponavljaju tako da se radi o kombinacijama multiskupova.

1.3. Varijacije

Definicija varijacije r-tog razreda bez ponavljanja od n elemenata. Varijacija r-tog razreda bez ponavljanja od n elemenata je svaka uređena r-torka elemenata skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ pri čemu je $r \le n$. Skup svih varijacija je prema tome:

$$T = \{(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}) : a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \in A\}. \tag{1.9}$$

Uzmimo za primjer tročlani skup $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ čije sve varijacije elemenata bez ponavljanja razreda $r = 2$ čine skup:

$$T = \{(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_3), (a_3, a_2), (a_1, a_3), (a_3, a_1)\}.$$

Teorem o broju varijacija r-tog razreda bez ponavljanja od n elemenata. Broj svih varijacija bez ponavljanja r-tog razreda n-teročlanog skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, tj. broj članova $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r})$ skupa (1.9) jednak je

$$\boxed{V_r(n) = \frac{n!}{(n-r)!}}. \tag{1.10}$$

Dokaz se zasniva na primjeni teorema o uzastopnom prebrojavanju (1.3). Naime, prva komponenta a_{i_1} može se odabrati na $p_i = n$ načina, druga a_{i_2} od preostalih $n-1$ komponenata na $p_2 = n-1$ način, i tako dalje do r-te komponente a_{i_r} koja se može odabrati na $p_r = n-r+1$ način. Iz toga slijedi da se sve varijacije mogu odabrati na

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$$

načina. S $V_r(n)$ označen je broj varijacija r-tog razreda bez ponavljanja, te izraz za njegovo izračunavanje ima oblik

$$V_r(n) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1). \tag{1.11}$$

Posljednji izraz može se pisati i u drugom obliku nakon što se definira funkcija prirodnog broja n kao umnožak svih prirodnih brojeva manjih ili jednakih od n koju nazivamo *n faktorijela*, tj.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1. \tag{1.12}$$

Sada se jednadžba (1.11) može pomnožiti i podijeliti sa $(n-r)!$, nakon čega se dobiva (1.10).

Primjer 5.

Na koliko se načina od 5 radnika može izabrati grupa od 3 čovjeka iz koje bi jedan od radnika radio u prvoj, drugi u drugoj, a treći u trećoj smjeni? Isti radnik ne smije raditi više od jedne smjene.

Rješenje. Skup $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ čini $n = 5$ različitih radnika a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 od kojih treba formirati grupu veličine $r = 3$, iz koje će svaki radnik dobiti svoju smjenu. Broj elemenata $(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3})$ skupa svih mogućih uređenih trojki $T = \{(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}) : a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3} \in A\}$ je broj varijacija bez ponavljanja koji prema (1.11) iznosi

$$V_3(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60. \tag{1}$$

Drugim riječima, u prvu smjenu može se izabrati jedan od 5 radnika, u drugu jedan od preostalih 4, a u treću jedan od preostala 3, što zbog teorema o uzastopnom prebrojavanju daje (1).

Definicija varijacije r-tog razreda s ponavljanjem od n elemenata. Varijacija r-tog razreda s ponavljanjem od n elemenata je svaka uređena r-torka n različitih elemenata jednake kratnosti r multiskupa $A' = \{r \cdot a_1, r \cdot a_2, \ldots, r \cdot a_n\}$ gdje r može biti bilo koji prirodni broj. Sve varijacije s ponavljanjem čine skup oblika

$$T = \{(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}) : a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \in A'\}. \tag{1.13}$$

Uočimo da definicija zadržava jednako značenje ako se za kratnosti elemenata multiskupa uzmu bilo koji prirodni brojevi veći od ili jednaki r. Oni mogu biti i neizmjerno veliki pa se najopćenitije može pisati da je $A' = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \ldots, \infty \cdot a_n\}$.

Na primjer, skup svih varijacija s ponavljanjem razreda $r = 2$ od 3 različita elementa multiskupa $A' = \{2 \cdot a_1, 2 \cdot a_2, 2 \cdot a_3\}$ je:

$$\begin{aligned} T = \{&(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_2, a_3), \\ &(a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_3, a_3)\}. \end{aligned}$$

Dok smo u slučaju varijacija bez ponavljanja elemente a_1, a_2 i a_3 iz skupa A mogli uzeti samo po jedanput, ovdje smo to mogli učiniti više od jedanput i to dovoljan broj puta da se od isključivo jednog elemenata a_1, a_2 ili a_3 multiskupa A' zasebno može kreirati varijacija. Vidimo da se u svakoj varijaciji bez ponavljanja ti elementi mogu pojaviti samo jedanput, dok se u varijaciji s ponavljanjem svaki element može pojaviti do onoliko puta koliko iznosi razred varijacije r.

Teorem o broju varijacija r-tog razreda s ponavljanjem od n elemenata. Broj svih varijacija s ponavljanjem r-tog razreda multiskupa od n različitih elemenata $A' = \{r \cdot a_1, r \cdot a_2, \ldots, r \cdot a_n\}$, tj. broj članova $(a_{i_1}, a_{1_2}, \ldots, a_{i_r})$ skupa (1.13) je

$$V_r{}'(n) = n^r. \tag{1.14}$$

Dokaz slijedi iz činjenice da se svaka od komponenata $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ može iz multiskupa A' odabrati na $p_1 = p_2 = \ldots = p_r = n$ načina. Nadalje, iz teorema o uzastopnom prebrojavanju (1.3) slijedi da se sve varijacije s ponavljanjem mogu odabrati na

$$p = p_i \cdot p_j \cdot \ldots \cdot p_q = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{r \text{ umnožaka}} = n^r$$

načina. Dakle, ako se sa $V_r'(n)$ označi broj varijacija r-tog razreda s ponavljanjem, izraz za njegovo izračunavanje dobiva oblik (1.14).

Primjer 6.

Na koliko se načina za 5 radnika može napraviti takav raspored da u svakoj od 3 smjene uvijek bude jedan radnik? Isti radnik može biti u jednoj ili u više smjena.

Rješenje. Mogućnost da se svaki od 5 radnika može birati u svaku od 3 smjene možemo predstaviti multiskupom od 5 različitih elemenata od kojih svaki ima kratnost 3, tj. $A = \{3 \cdot a_1, 3 \cdot a_2, 3 \cdot a_3, 3 \cdot a_4, 3 \cdot a_5\}$. Broj elemenata $(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3})$ skupa svih mogućih uređenih trojki $T = \{(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}) : a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3} \in A'\}$ je broj varijacija s ponavljanjem koji prema (1.14) iznosi

$$V_3{}'(5) = 5^3 = 125. \tag{1}$$

Drugim riječima, u prvu smjenu može se izabrati jedan od 5 radnika, a u drugu i treću smjenu opet jedan od istih 5, tako da iz teorema o uzastopnom prebrojavanju proizlazi (1).

1.4. Kombinacije

Definicija kombinacije r-tog razreda bez ponavljanja od n elemenata. Kombinacija r-tog razreda bez ponavljanja od n elemenata je svaki r-teročlani skup sastavljen od elemenata n-teročlanog skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ gdje mora biti $r < n$. Skup svih kombinacija bez ponavljanja može se prikazati u obliku

$$T = \{\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}\} : a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \in A\} \tag{1.15}$$

Uočimo da ako bismo uzeli u obzir i kombinaciju reda $r = n$, dobili bismo trivijalan slučaj samo jedne moguće kombinacije, a to je sam skup A.

Primjerice, ograničimo li se na prikaz kombinacija $r = 2$ razreda bez ponavljanja skupa $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ od $n = 3$ člana, dobivamo skup svih kombinacija:

$$T = \{\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_3\}\}.$$

Teorem o broju kombinacija r-tog razreda bez ponavljanja od n elemenata. U općenitom slučaju skup kombinacija r-tog razreda bez ponavljanja n-teročlanog skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, tj. skup (1.15), možemo prikazati u obliku

$$T = \{\{a_{1_1}, a_{1_2}, \ldots, a_{1_r}\}, \{a_{2_1}, a_{2_2}, \ldots, a_{2_r}\}, \ldots, \{a_{p_1}, a_{p_2}, \ldots, a_{p_r}\}\}. \tag{1.16}$$

gdje je indeks p broj svih kombinacija koji je jednak

$$K_r(n) = \frac{n!}{(n-r)!r!}. \tag{1.17}$$

Ako se uvede veličina koju nazivamo *binomni koeficijent*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}, \tag{1.18}$$

što se čita *en povrh er* ili *en iznad er*, slijedi da izraz za broj kombinacija r-tog razreda n-teročlanog skupa bez ponavljanja glasi

$$\boxed{K_r(n) = \binom{n}{r}.} \tag{1.19}$$

Da se broj kombinacija r-tog razreda dobiva korištenjem gornjih izraza, može se pokazati na sljedeći način. Zbog jednostavnosti skup (1.16) prikazat ćemo skraćeno:

$$T = \{K_1, K_2, \ldots, K_p\}. \tag{1.20}$$

Taj skup obuhvaća sve r-teročlane podskupove n-teročlanog skupa A te je cilj izračunati broj tih podskupova $K_r(n) = p$ s pomoću brojeva n i r. U tu svrhu označit ćemo sa $V_1, V_2, \ldots, V_p$ skupove varijacija r-tog razreda bez ponavljanja članova $K_1, K_2, \ldots, K_p$ skupa (1.20). Prema specijalnom slučaju izraza (1.11) kada je $n = r$ svaki skup varijacija V_1, V_2 ili V_p ima $r!$ elemenata, a unija svih tih skupova:

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_p \tag{1.21}$$

sadržava sve varijacije r-tog razreda skupa A. Skupovi $V_1, V_2, \ldots, V_p$ su disjunktni, tj. vrijedi $V_e \cap V_f$ za sve slučajeve kada je $e \neq f$. To slijedi jer je za $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}) \in V_e \cap V_f$ očito $K_e = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}\}$ i $K_f = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}\}$, iz čega slijedi da je $e = f$. Uzimajući u obzir da svaki skup V_e ima $r!$ elemenata te budući da za $e \neq f$ vrijedi $V_e \cap V_f = 0$, iz (1.21) proizlazi da je broj članova skupa V jednak zbroju broja članova skupova V_e što iznosi $pr!$. S druge strane, budući da je V skup svih varijacija r-tog razreda od A čiji se broj $V_r(n)$ izračunava prema izrazu (1.10), dobiva se

$$p = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

odnosno (1.17) do (1.19).

Primjer 7.

Na koliko se načina od 5 radnika može formirati grupa u kojoj zbog prirode posla istovremeno trebaju raditi 3 čovjeka?

Rješenje. Skup $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ čini $n = 5$ različitih radnika a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 od kojih treba formirati grupu veličine $r = 3$. Broj tih grupa, tj. skupova $\{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}\}$ iz skupa svih mogućih skupova $T = \{\{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}\} : a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3} \in A\}$ (koji nisu uređeni jer njihov poredak nije bitan) je broj kombinacija 3. razreda bez ponavljanja od 5 elemenata koji prema (1.19) iznosi

$$K_3(5) = \binom{5}{3},$$

odnosno, zbog (1.18),

$$K_3(5) = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

Definicija kombinacije r-tog razreda s ponavljanjem od n elemenata. Kombinacija r-tog razreda s ponavljanjem od n elemenata je svaki r-teročlani skup sastavljen od n različitih elemenata jednake kratnosti r multiskupa $A' = \{r \cdot a_1, r \cdot a_2, \ldots, r \cdot a_r\}$ gdje r može biti bilo koji prirodni broj. Sve kombinacije s ponavljanjem čine skup oblika

$$T = \{\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}\} : a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \in A\}. \tag{1.22}$$

Očigledno kratnosti elemenata multiskupa A' mogu biti bilo koje cjelobrojne vrijednosti veće ili jednake od r, a da definicija ne mijenja značenje. Općenito se može uzeti da su te kratnosti beskonačno velike pa pišemo $A' = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \ldots, \infty \cdot a_n\}$.

Ograničimo li se, primjerice, na prikaz kombinacija $r = 2$ razreda s ponavljanjem elemenata multiskupa $A = \{2 \cdot a_1, 2 \cdot a_2, 2 \cdot a_3\}$ od $n = 3$ člana, elementi skupa svih kombinacija su:

$$T = \{\{a_1, a_1\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \{a_3, a_3\}\}.$$

Teorem o broju kombinacija r-tog razreda s ponavljanjem od n elemenata. Broj kombinacija s ponavljanjem r-tog razreda multiskupa od n različitih elemenata $A' = \{r \cdot a_1, r \cdot a_2, \ldots, r \cdot a_n\}$, tj. broj članova $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r})$ skupa (1.22) je

$$K_r'(n) = \binom{n+r-1}{r}. \tag{1.23}$$

Dokaz se može provesti tako da se sasvim općenito kombinacija s ponavljanjem prikaže u obliku niza oznaka r članova multiskupa A' i kvadratića

$$T = \underbrace{a_1 a_1 \square\square a_3 a_3 a_3 \square a_4 \square\square\square a_7 a_7 a_7 \cdots}_{r \text{ članova multiskupa } A'} .$$

gdje jedan kvadratić dolazi između dvaju uzastopnih različitih članova niza bez obzira pojavljuju li se ti članovi u nizu. Ako neki član multiskupa A' nije odabran u niz, dobivaju se dva uzastopna kvadratića između kojih taj član nedostaje. Nedostaju li dva susjedna člana, pojavit će se tri uzastopna kvadratića itd. Indeksi članova niza ustvari su suvišni, jer nije bitno koji su to članovi. S druge strane važno je uočiti da je uvijek broj tih članova r, a broj pravokutnika $n-1$. Zbog toga je ukupan broj svih oznaka a i $\square$ jednak $n-1+r$, a niz možemo prikazati u obliku:

$$T = \underbrace{aa\square\square aaa\square a\square\square\square aaa\cdots}_{r \text{ oznaka } a \text{ u nizu od ukupno } n-1+r \text{ oznaka } a \text{ i } \square} .$$

Uočimo da je broj načina na koji odabiremo r elemenata iz multiskupa jednak broju načina na koje možemo odabrati r mjesta u nizu gdje će doći oznaka a. Taj broj odgovara broju kombinacija r-tog razreda bez ponavljanja $(n-1+r)$-članog skupa te prema izrazu (1.19) iznosi:

$$K_r(n-1+r) = \binom{n-1+r}{r},$$

što odgovara početnoj tvrdnji (1.23) koju smo time dokazali.

Primjer 8.

U nekom dijelu skladišta pohranjuje se 3 različite vrste robe. Na koliko načina se može odabrati roba za skladištenje ako u taj dio skladišta treba pohraniti točno 5 komada uz pretpostavku da je od svih vrsta robe raspoloživo minimalno po 5 komada?

Rješenje. Zapazimo da je potpuno svejedno jesu li brojnosti raspoložive robe po svakoj vrsti 5, koliko iznosi broj komada robe koju treba pohraniti u skladište, ili su te brojnosti veće od 5. U svakom slučaju možemo definirati multiskup čiji različiti elementi $\{a_1, a_2, a_3\}$ predstavljaju različite vrste robe pri čemu su njihove kratnosti 5. Takav multiskup je oblika $A' = \{5 \cdot a_1, 5 \cdot a_2, 5 \cdot a_3\}$ a iz njegovih ponavljajućih elemenata potrebnoj je formirati neuređene trojke $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$ veličine $r = 3$, tj. skup kombinacija s ponavljanjem različite vrste robe $T\{\{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}\} : a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3} \in A'\}$ koji ima broj elemenata jednak broju kombinacija 5. razreda s ponavljanjem od 3 elementa koji prema (1.23) iznosi

$$K_5'(3) = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{2!5!} = 21.$$

1.5. Permutacije

Definicija permutacije bez ponavljanja od n elemenata. Permutacija bez ponavljanja od n elemenata je svaka uređena n-torka elemenata skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Skup svih permutacija je prema tome:

$$T = \{(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}) : a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n} \in A\}. \tag{1.24}$$

Permutaciju bez ponavljanja možemo jednostavno definirati i kao specijalan slučaj varijacije čiji je razred r jednak broju članova n skupa A.

Sve permutacije, na primjer, skupa od 3 elemenata $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ čine skup permutacija:

$$T=\{(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_3, a_2), (a_2, a_1, a_3), (a_2, a_3, a_1), (a_3, a_1, a_2), (a_3, a_2, a_1)\}.$$

Teorem o broju permutacija bez ponavljanja od n elemenata. Broj permutacija bez ponavljanja n-teročlanog skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ računa se prema izrazu

$$P(n) = n!. \tag{1.25}$$

Dokaz se izvodi iz teorema o uzastopnom prebrojavanju (1.3), prema kojemu se prva komponenta a_i može izabrati na $p_1 = n$ načina, druga a_{i_2} od preostalih $n-1$