1. Algebra logike

1.1. Definicije, teoremi i primjena u dvovaljanoj logici

Logika je znanost o umijeću mišljenja (definicija Descartesovih sljedbenika: "l'art de penser"; usp. [21, str. 1]). Značenje ove rečenice vezano je za povijest filozofije, znanosti i lingvistike, mijenjalo se i tumačilo na razne načine, o tome su pisane rasprave i knjige. Ipak je opće usvojeno da glavninu današnje logike čini znanje razvijeno na osnovi pravila, koja su otkrile grčke filozofske škole, a formulirao i izgradio kao složeni sustav Aristotel (384. – 322. pr. Kr.) u nizu spisa koji su kasnije dobili naziv *Organon* ("Oruđe").

Ta pravila su imala od početka određenu sličnost s matematičkim pravilima. Formalizacijom algebre u 17. stoljeću je ta sličnost postala očita, pa je u to vrijeme pokušao zasnovati logiku kao deduktivnu znanost G. W. Leibniz (1646. – 1716.). No prvi takav relativno uspješni pristup dolazi tek u 19. stoljeću od G. Boolea (1815. – 1864.). Može se reći da od Aristotela do njega nije bilo značajnijeg napretka logike, jer je još 1787. Kant tvrdio, da logika kao znanost s Aristotelom završava. Boole je shvatio da su aristotelovski račun klasa i logika sudova razni modeli iste matematičke strukture, koju danas zovemo *Booleova algebra*. Glavno Booleovo djelo *The Mathematical Analysis of Logic* tiskano je 1847.

Na tragu Boolea, *matematička logika* je znanost koja mišljenje istražuje matematičkim metodama. Ipak, često je i shvaćanje da je matematička logika — logika u matematici! To znatno sužuje doseg i značenje matematičke logike, jer ju ograničava na pomoćnu matematičku disciplinu. Istina je, da je matematička logika dio matematike, i da se njome uglavnom bave matematičari. Filozofi rađe govore o "simboličkoj logici", što matematičari smatraju sinonimom ili za cijelu matematičku logiku, ili za tzv. algebru logike (v. [15]). Što se točno podrazumijeva pod nazivom "matematička logika" ovisi o pristupu, koji nije jedinstven. Uostalom, ima škola koje smatraju, kao F. L. G. Frege (1848. – 1925.) i B. Russell (1872. – 1970.), da je i matematika grana logike ("logisti"), dok naprotiv sljedbenici L. E. J. Brouwera (1881. –

1966.) misle da matematika ne ovisi o klasičnoj logici ("intuicionisti"). Praktički je matematička logika granično i autonomno područje između matematike s jedne, a logike odnosno filozofije s druge strane.

U logici je najjednostavnije matematički formalizirati račun *klasa*. Pojam klase se ne definira, ali se opisuje kao ukupnost objekata (*elemenata*) odabranih po nekom kriteriju. Klasa je određena svojim elementima i odgovara matematičkom pojmu skupa. U običnom govoru, a donekle i u znanosti, klasa i skup nisu sinonimi: klasa odgovara skupu nastalom grupiranjem po određenom svojstvu ("klasifikacija"), dok skup je bilo kakva unija elemenata. No u računu klasa do izražaja dolaze samo formalne, "skupovne", operacije, tako da prigovori da se radi o raznim pojmovima idu u red prigovora koji se upućuju svakoj formalizaciji, i koju srećemo u logici na raznim razinama. Napomenimo da se pod "računom klasa" misli često na račun s klasama k-valjanih funkcija na k-valjanim slogovima, što je vrlo specijalni slučaj općeg računa klasa, i ima svoju problematiku vezanu za aksiomatiku računa sudova, koja nema izravne veze s općim računom klasa.

Dvije klase, tj. dva skupa, su jednaka ($=$) ako se sastoje od istih elemenata. Označimo li klase malim grčkim slovima, a njihove elemente malim latinskim, oznaka $a \in \alpha$, koja je preuzeta iz teorije skupova, znači da je a iz klase α. Što je unija ($\cup$) i presjek ($\cap$) dva skupa, što znači da skup uključuje ($\supset$) drugi skup, a što da je podskup ($\subset$) drugog, većina ljudi danas zna iz škole. Jednako tako se jednostavno definira razlika ($\setminus$) skupova (skup elemenata koji su u prvom skupu, a nisu u drugom) i simetrična razlika (Δ) (skup elemenata koji su u prvom skupu, a nisu u drugom, ili koji su u drugom, a nisu u prvom). Ove operacije ($\cup,\cap,\supset,\subset,\setminus,\Delta$) su *binarne*, tj. iz dva se skupa dobiva treći. Označimo li kao i prije skupove malim grčkim slovima, jednadžba $\gamma = \alpha \cup \beta$ znači da se klasa γ sastoji od elemenata koji su bilo iz klase α ili iz klase β, što ujedno znači da mogu postojati elementi koji su iz klase α i iz klase β. Boole je primjetio da pravila računjanja s $\cup$ i $\cap$ ne odgovaraju pravilima računjanja s $+$ i $\cdot$ u aritmetici, no da je sličnost s običnom algebrom mnogo izrazitija uporede li se algebarske operacije $+$ i $\cdot$ s Δ i $\cap$. Boole je zato uzimao Δ i $\cap$ kao osnovne operacije, ali je (drugačije nego li se definira danas) smatrao da je Δ (koju je označavao s $+$) definirana samo ako su skupovi disjunktni tj. kad se Δ poklapa s $\cup$ (v. [21, str. 194]).

Razvojem teorije skupova je nađeno da u računu klasa koje su "prevelike" nastaju poteškoće. Uvede li se skup S svih klasa koje sadrže sebe kao element (takva je klasa npr. klasa svih apstraktnih pojmova) pitanje sadrži li i S sebe kao element vodi na kontradikciju sličnu onima koje su se pojavile u računu s prevelikim "skupovima" brojeva. Većina logičkih konstrukcija pretpostavlja egzistenciju "univerzalne" klase, unutar koje se račun klasa odvija kao račun s potklasama. To u teoriji skupova odgovara "univerzalnom" skupu: sve što je "element", a nije u određenom skupu α, nužno je u skupu α' onih elemenata koji su u univerzalnom skupu, ali nisu u α. Ta operacija, kojom se klasi pridružuje "komplement" tj. klasa α', primjer je *unarne* operacije. Univerzalnom skupu, koji se često označava s 1 ili I, komplement je prazan, pa se i prazni skup smatra potklasom od I i označava s $\emptyset$.

Sad već imamo čvrstu osnovu i možemo npr. s univerzalnom klasom živih bića na našoj planeti u određenom trenutku i s njenim potklasama, kakve su npr. sisavci, kukci ili ljudi, računati formalizmom Booleove algebre. Objekti s kojima računamo su klase, ali u formalnom smislu o njima ne moramo ništa znati, smatramo ih naprosto elementima skupa klasa C. Operacije mogu biti $\cup$ i $\cap$, mogu biti Δ i $\cap$, a mogu se uzeti binarna $\cap$ i unarna $'$ (v. [21]). Booleova algebra je od sada za nas trojka $(C, \cap, ')$ s pravilima računanja za $\cap$ i $'$, ili neki srodni sustav s operacijama i pravilima iz kojih se preostale operacije iz računa klasa definiraju. Četvorka $(C, \cap, ', =)$ je *Booleova algebra s obzirom na relaciju* $=$.

Primijetimo da razni predloženi formalni sustavi nisu nužno međusobno ekvivalentni. U [21, str. 195] se navodi da u teoriji W. V. Quinea nema prazne klase, u sustavu E. Zermela nema univerzalne klase, a Aristotel nema ni prazne ni univerzalne klase. U J. von Neumann – P. Bernaysovoj verziji Zermelova sustava postoji univerzalna klasa, ali se u njemu razlikuju klase i skupovi, i univerzalna klasa nije skup. Razrađena teorija, koja ne dozvoljava paradokse ni logičke ni skupovne prirode, razvijena je u fundamentalnom djelu A. N. Whiteheada i B. Russella *Principia Mathematica* iz 1910. – 1913. Teorija "tipova" razvrstava i klase i logičke funkcije u razine koje postepeno izgrađuju cijeli sustav. Frege-Russellov program svođenja matematike na logiku (od kojeg je, već i kad je u pitanju aritmetika, Frege odustao 1902.) proveden je u *Principia* dosljedno, ali iz raznih matematičkih i filozofijskih razloga nije opće usvojen. U pogledu tzv. "potpunosti" aksiomatskih sustava srodnih sustavu u *Principia* na kojima se bazira matematika ili dijelovi matematike, 1931. je K. Gödel pokazao da je svaki takav sustav koji sadrži elementarnu aritmetiku nepotpun u smislu da unutar sustava postoje tvrdnje koje se ne mogu ni dokazati ni oboriti.

Konstrukcije bazirane na slojevima, više ili manje slične teoriji tipova, nalazimo u raznim granama matematičke logike, posebno u analizi "jezika" logike. Relacija = se može smatrati da je relacija iz običnog (*vanjskog*) jezika (*syntax language*) kojim se opisuje sustav, ali njezina se svojstva mogu aksiomatizirati i učiniti ih dijelom ukupnih pravila računanja tj. pridružiti ih pravilima računanja s pojedinim operacijama. Aksiomatizacija sustava pretpostavlja odabir operacija iz kojih se mogu izvesti ostale operacije, i fiksiranje pravila (*aksioma*) koja za te odabrane operacije vrijede. Ta pravila prave *nutarnji* jezik sustava (*object language*). Poredak kojim se operacije vrše određuje se zagradama, i one se mogu smatrati dijelom vanjskog jezika, kako je to običaj u algebri, ili se pravila računa sa zagradama tretiraju formalno i pridružuju pravilima za operacije, kako se to radi u aksiomatskoj logici.

Već se i na razini računa klasa i njegove aksiomatizacije mogu vidjeti problemi aksiomatskih teorija. To su pitanja da li odabrani aksiomi daju neproturječni sustav (*konzistentnost*), da li su ti aksiomi međusobno neovisni i da li se svaka smislena tvrdnja unutar sustava (ovdje: jednadžba) može potvrditi ili oboriti (*potpunost*). Ponegdje se umjesto potpunosti govori o *kategoričnosti* [21], a negdje se ta dva pojma razlikuju (kategoričnost se veže za određenu istovjetnost tzv. "modela" sustava). Potpunost se koji put definira pomoću neovisnosti: aksiomatski sustav je potpun ako se njemu ne može pridodati kao aksiom ni jedna neovisna tvrdnja. Pravac u filozofiji matematike koji smatra da je bit matematike u operacijama sa simbolima i u aksiomatskoj formalizaciji zove se "formalizam", potječe od G. Peana (1858. – 1931.) i D. Hilberta (1862. – 1943.), a ključno djelo je D. Hilbertova i P. Bernaysova knjiga *Grundlagen der Mathematik* iz 1934. – 1939.

Jednadžbe među klasama vode odmah do drugog koraka u formalizaciji logike. Za sud oblika $\alpha = \beta$ gdje su α i β određene klase možemo se pitati da li je istinit ili lažan. Koji zakoni vladaju kad su u pitanju operacije sa sudovima, inače jasne i opisive u svakodnevnom govoru, i koja je "vrijednost istinitosti" rezultirajućeg suda, ako znamo da su neki od sudova koji ulaze u operacije istiniti, a neki lažni?

Smatrati ćemo da znamo što je sud; nećemo pokušavati konstruirati univerzalne klase i Booleovu algebru potklasa, kojim bi određeni sud prikazali kao jednadžbu među klasama. "Vrijednost istinitosti", tj. da li je sud istinit ili lažan, također smatramo intuitivno jasnom. Tvrdnje "Hrvatska sutra igra u Beču" i "Irska sutra igra u Beču" mogu biti istinite ili lažne, no očito je što znači složena tvrdnja ako se te dvije tvrdnje gramatički povežu s "i": i Hrvatska i Irska sutra igraju u Beču! Za istinitost ove složene tvrdnje potrebno je da obe početne tvrdnje budu istinite. Označimo li tvrdnje malim latinskim slovima, npr. s p i q, ovaj način povezivanja tvrdnji zovemo *konjunkcija* i označavamo s $\wedge$. Povezujući tvrdnje s "ili", da bi složena tvrdnja bila istinita dosta je da bar jedna od početnih tvrdnji bude istinita. To opisuje *disjunkciju* $\vee$. Operacije $\wedge$ i $\vee$ su binarne operacije među tvrdnjama; najprirodnija je pak unarna operacija *negacija* $\neg$, koja vrijednosti istinitosti obrće. Istinitost možemo označavati s $\top$, a laž s $\bot$, ali je jednako rašireno i označavanje s 1 (za istinu) i 0 (za laž). "Tablice istinitosti" za $\wedge$, $\vee$ i $\neg$ se mogu sastaviti na razne načine; jedan je i sljedeći:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

p	$\neg p$
1	0
0	1

Povezivanje sudova s "i" i "ili" u nove smislene cjeline je stvar vanjskog jezika. Formalizacija tih veza, tj. prebacivanje na nutarnji jezik, moguća je tako da gornje tablice *karakteriziraju* operacije $\wedge$, $\vee$ i $\neg$. Ako nepoznata binarna operacija ima tablicu istinitosti zadanu s prva tri stupca lijeve tablice, ta je binarna operacija konjunkcija! Ako pregledamo sve mogućnosti ustanoviti ćemo da se operacija vrlo dobro slaže s operacijom "i" u običnom jeziku. Za neke druge operacije (implikaciju!) to neće biti slučaj!

Dosljedno programu algebraizacije računa sudova trebali bi definirati i relaciju koja igra ulogu jednakosti među klasama, ali samo preko vrijednosti istinitosti. Jedna je mogućnost da dva suda p i q proglasimo *ekvivalentnim*
($p \mathrm{E} q$) ako imaju istu vrijednost istinitosti. Stvar je sada elementarnog računa da se ustanovi (pomoću tablica istinitosti) da za neprazni skup C sudova, operacije $\wedge$ i $\neg$ definirane na C i relaciju E definiranu među

članovima od C vrijede isti zakoni Booleove algebre kao i za $(C, \cap, ', =)$. Četvorka $(C, \wedge, \neg, \mathrm{E})$ je Booleova algebra s obzirom na E i to je osnovni Booleov rezultat, koji smo najavili na početku.

Kombinacija $(\neg p) \vee q$ ima mnoge osobine koje intuitivno očekujemo od implikacije ("ako p, tada q"). Njena "tablica istinitosti" je (uz oznaku $\Rightarrow$)

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

To znači da lažni sud implicira svaki sud, i da je istiniti sud posljedica svakog suda. Postoje mnoge zamjerke identifikaciji $\Rightarrow$ s intuitivnim značenjem implikacije, koja uzročno-posljedičnu vezu doživljava na razini smisla, a ne samo na razini vrijednosti istinitosti, pa se npr. u [21] ovakva implikacija naziva "materijalna" (ili "gruba") implikacija (*material implication*). U matematici se $\Rightarrow$ slaže s onim što traži matematičko zaključivanje, što je argument struji koja matematičku logiku smatra logikom matematike.

Kao u računu klasa, tako su i u logici sudova mogući drugi pristupi, tj. moguće je druge kombinacije binarnih i unarnih operacija uzeti kao osnovne uz odgovarajući popis pravila koja se aksiomatiziraju. Mogući su i temeljitiji zahvati: iz klase svih sudova se može izdvojiti potklasa T istinitih sudova i račun sudova zasnovati na četvorki $(C, T, \Rightarrow, \neg)$ (v. [21, str. 31]; taj se sustav u [21] naziva *Booleova logika sudova*). U [21] su ispitane koncepcije vezane za navedene i za neke druge sustave, posebno za "intuicionističke" logike, koje već uključuju i problematiku viševaljanih logika (v. [21, str. 51]).

U sustavima koji su najrašireniji, tj. onima koji se baziraju na skupu propozicija, uz binarne i unarne operacije sreli smo do sada funkcije od jedne i od dvije varijable koje (kao i varijable) uzimaju vrijednosti 0 ili 1. Slaganjem (npr. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$) dobivamo funkcije od više varijabli. Općenito funkciju f od n varijabli zapisujemo s $f(x_1, ...x_n)$, gdje je $(x_1, ...x_n)$ *slog,* tj. uređena n-torka (skup od n elemenata se označava s $\{x_1, ...x_n\}$ i kod toga uređaj nije važan). Skup svih funkcija s vrijednostima 0 ili 1 od konačno varijabli koje također imaju vrijednosti 0 ili 1 označava se s P_2. Slično, P_3 će značiti skup svih funkcija od konačno varijabli, koje kao i svaka od varijabli mogu uzimati tri vrijednosti; dogovorom su to 0, 1 i 2 ili 0, 1/2 i 1. To su *funkcije algebre logike*, P_2 su sve takve funkcije u dvovaljanoj logici, P_3 su funkcije trovaljane logike, itd. Te funkcije igraju ključnu ulogu u ispitivanju i dvovaljanih i viševaljanih logika.

Kako ćemo kasnije vidjeti, s brojem argumenata broj tih funkcija vrlo brzo raste. Za dvovaljanu logiku broj funkcija od jedne varijable je 4, od dvije varijable je 16, a od tri varijable je već 256. Iz tog razloga svako istraživanje algebre logike uključuje redukciju tih funkcija na manji broj "elementarnih", razvrstavanje funkcija po klasama i tipovima, itd. Redukcija na manji broj elementarnih funkcija uključuje supstituciju i formiranje složenih funkcija. Iako se pod "formulom" u logici podrazumijevaju razne stvari, jednakosti koje određenu operaciju izražavaju preko drugih i, ekvivalentno, jednadžbu, koja određenu funkciju daje pomoću drugih funkcija, možemo zvati *formulom*. Ako je npr. negacija određena funkcijom f_1 od jedne varijable, a disjunkcija odnosno implikacije funkcijama f_2 odnosno f_3 od dvije varijable, relacija $p \Rightarrow q = (\neg p) \vee q$ se pretvara u jednakost $f_3(x_1, x_2) = f_2(f_1(x_1), x_2)$ među funkcijama, i to znači da za svaku kombinaciju od 0 i 1, koje mogu poprimiti x_1 odnosno x_2, lijeva strana je jednaka desnoj ($0 = 0$ ili $1 = 1$). Ujedno, to su formule za $\Rightarrow$, odnosno za f_3.

Slijedeći Booleovu algebru, najprirodniji sustav bi bio $(C, \vee, \wedge, \neg)$, iz kojeg se može isključiti bilo $\vee$ ili $\wedge$ (prema $x_1 \vee x_2 = \neg((\neg x_1) \wedge (\neg x_2)), x_1 \wedge x_2 = \neg((\neg x_1) \vee (\neg x_2))$). Osnovni teorem funkcija algebre logike kaže da se svaka funkcija iz P_2 može izraziti preko formule koja uključuje $\vee$, $\wedge$ i $\neg$ (svakoj takvoj formuli jednoznačno odgovara funkcija iz P_2). Uzmimo četiri P_2 funkcije od jedne varijable. Osim identiteta i negacije tu su još dvije konstante, $f(x) = 0$ i $f(x) = 1$ za ma koje x. No $0 = x \wedge (\neg x)$, $1 = x \vee (\neg x)$, a identitet $f(x) = x$ se može izraziti kao $x \vee x, x \wedge x$, $\neg(\neg x)$, $1 \wedge x$ itd. Za 16 funkcija oblika $f(x_1, x_2)$ situacija je slična. Vidjeli smo već kako se izražava implikacija: $p \Rightarrow q$ je $(\neg p) \vee q$, no isto tako je i $\neg(p \wedge (\neg q))$ (istoj funkciji mogu odgovarati razne formule). Zanimljive su i neke od preostalih P_2 funkcija od dvije varijable. Takva je npr. funkcija H. M. Sheffera (1913.), koja se označava s $x_1|x_2$, a uzima vrijednost 1 za sve kombinacije vrijednosti od x_1 i x_2 osim kad i x_1 i x_2 uzimaju vrijednost 1, u kojem slučaju je vrijednost $x_1|x_2$ jednaka nuli. Ona se najjednostavnije može izraziti kao $\neg(x_1 \vee x_2)$.

Gornji primjeri govore o "potpunosti" sustava funkcija: funkcije $f_1, ..., f_s$ prave *funkcionalno potpuni* sustav u P_2 ako se svaka funkcija iz P_2 može pomoću njih zapisati kao formula. Sustavi $\{x_1 \wedge x_2, \neg x\}$ ili $\{x_1 \vee x_2, \neg x\}$ su funkcionalno potpuni, ali je funkcionalno potpun i sustav od jedne funkcije $\{x_1|x_2\}$. Naime, $x_1 \vee x_2 = (x_1|x_1)|(x_2|x_2)$, a $\neg x = x_1|x_1$. *Pretpotpuni* ("maksimalno nepotpuni") je sustav koji nije potpun, ali postaje potpunim doda li mu se bilo koja funkcija iz komplementa u P_2. Vidi se da npr. $\{\neg x\}$ ne pravi pretpotpuni sustav, jer dodavanjem $f(x) = x$ se ne dobiva potpuni sustav. Pretpotpune klase moraju u svakom slučaju imati još jedno svojstvo ("zatvorenost"), koje ovdje jednočlana klasa $\{\neg x\}$ nema. Funkcionalno zatvorena u P_2 je svaka potklasa V funkcija $f(x_1, ...x_n)$ iz koje se ne može izaći slaganjem, tj. supstitucijom kojom se varijable x_i zamjenjuju funkcijama f_i iz V ili nekom drugom varijablom koja je argument of f ili od neke f_j. Primjer zatvorene klase je jednočlana klasa $\{x\}$. To je ujedno najjednostavniji primjer klase koja je zatvorena, a nije pretpotpuna; isto vrijedi i za $\{x, \neg x\}$.

Algebra logike se sada može razvijati kroz sustav definicija i tvrdnji u kojem se novi pojmovi uvode, a njihova svojstva izvode pomoću matematičkog aparata. Kod toga bi trebalo imati neko iskustvo operiranja s matematičkim funkcijama, koje su bar četiri stoljeća osnov matematike. Tipovi funkcija algebre logike su vrlo specijalni; korisno je imati neku opisnu karakterizaciju tih funkcija, ali bi zornu predodžbu trebalo uvijek provjeriti na primjerima. Npr., *monotone* funkcije se definiraju preko uređaja među slogovima. Dva su sloga od n elemenata *uporedivi* (i drugi je veći ($\leq$) od prvog) ako je vrijednost na odgovarajućim mjestima u drugom slogu veća ili jednaka vrijednosti u prvom. Imamo $(0, 1) \leq (1, 1)$, dok su $(0, 1)$ i $(1, 0)$ *neuporedivi.* Funkcija f je monotona ako je njena vrijednost na većem slogu veća ili jednaka vrijednosti na manjem. Funkcije $x_1 \vee x_2$ i $x_1 \wedge x_2$ su monotone, dok $x_1|x_2$ nije, što su činjenice koje sa sigurnošću možemo ustanoviti jedino provjerom.

Monotone funkcije u P_2 formiraju zatvorenu klasu funkcija M koja je jedna od pet pretpotpunih klasa iz P_2. I ostale četiri pretpotpune klase se mogu opisati relativno jednostavno. To su: klasa T_0 funkcija koje čuvaju 0, tj. sve f za koje je $f(0, ..., 0) = 0$, kao i klasa T_1 funkcija f koje čuvaju 1, tj. sve f za koje je $f(1, ..., 1) = 1$. Takva je npr.

funkcija $x_1 \wedge x_2$, koja je i u T_0 i u T_1. Slijedi klasa S *autodualnih funkcija,* tj. funkcija za koje je $f(x_1, ...x_n) = \neg f(\neg x_1, ..., \neg x_n)$. Primjeri takvih funkcija su $f(x) = x$ i $f(x) = \neg x$. Konačno, posljednja pretpotpuna klasa iz P_2 je klasa L linearnih funkcija, tj. funkcija f oblika $f(x_1, ..., x_n) = a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n (\mathrm{mod}\, 2)$. Ovdje su $a_0, ..., a_n$ konstantne funkcije, a_ix_i znači $a_i \wedge x_i$ i (kako je običaj u algebri) prvo treba obaviti tu operaciju, a onda operaciju $+$. *Zbrajanje modulo* 2 je operacija s tablicom

p	q	$p+q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

a to u gornjem izrazu za linearnu funkciju znači da, ako je zbroj u običnom smislu paran broj, taj broj "modulo 2" iznosi 0, a ako je neparan, vrijednost "modulo 2" mu je 1.

Postojanje samo 5 pretpotpunih klasa (M, T_0, T_1, S i L) funkcija u P_2 ključni je rezultat u dvovaljanoj logici, jer iz njega slijedi da se iz svakog potpunog sustava funkcija može izabrati podsustav (*baza*) od najviše 4 funkcije preko kojih se svaka funkcija iz P_2 može izraziti formulom u kojoj dolaze samo funkcije iz podsustava. Treba istaknuti da je za P_n, tj. za funkcije u n-valjanim logikama, analogni problem samo djelomično riješen. Za trovaljane logike problem funkcionalne potpunosti riješio je S. V. Jablonskij 1953. našavši da u P_3 postoji 18 pretpotpunih klasa. Iz njegovog rezultata slijedi da broj funkcija u svakoj bazi u P_3 također ne prelazi 18.

Definicija 1.1. (Definicija funkcije) *Sa E_k označit ćemo skup $E_k = \{0, 1, ..., k-1\}$, a slog sa $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in E_k$; funkcija je $f(x_1, ..., x_n) : E_k^n \to E_k$; skup svih funkcija definiranih na E_k označavamo sa P_k.*

Lako se pokazuje da broj svih različitih n-torki (slogova) je k^n, a broj svih različitih funkcija od n varijabla definiranih na E_k je k^{k^n}.

Definicija 1.2. *Funkcija $f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$ ovisi samo o varijabli x_i ako je zadovoljen uvjet:*

$$f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, a, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) \neq f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, b, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n), \text{ za } a \neq b.$$

Definicija 1.3. (Definicija superpozicije funkcije)

1. *Neka je zadana funkcija $f(x_1, ..., x_n)$; elementarna superpozicija je supstitucija x_i s x_j, odnosno x_i s y_j (oznake: $x_i \mid x_j$, odnosno $x_i \mid y_j$) u zadanu funkciju;*

2. *Neka je zadan skup funkcija*

$$\left\{ f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_{n_1}^{(1)}), ..., f_n(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, ..., x_{n_n}^{(m)}) \right\};$$

opća superpozicija je:

a) supstitucija varijabli (nekih ili svih) koje se javljaju u funkcijama skupa funkcija s novim ili starim varijablama;

b) supstitucija varijabli (nekih ili svih) koje se javljaju u funkcijama skupa funkcija s funkcijama zadanog skupa funkcija.

Definicija 1.4. *Funkciju ćemo nazvati izvornom ako u njoj nije provedena supstitucija.*

Definicija 1.5. (Definicija formule) *Formula je:*

1. svaka izvorna funkcija;

2. svaka funkcija dobivena superpozicijom.

Formule ćemo označavati velikim latinskim slovima.

Uvedimo sljedeće osnovne funkcije:

1. konstanta: $f(x_{1,}..., x_n) = i$; $i \in E_k$; $x_i \in E_k$;
2. negacija: $f(x) = (x+1)_{(\mathrm{mod}\, k)} = \bar{x}$; $x \in E_k$;
3. konjunkcija: $f(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2) = x_1 \& x_2$; $x_1, x_2 \in E_k$;
4. disjunkcija: $f(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$; $x_1, x_2 \in E_k$;
5. sumacija: $f(x_1, x_2) = (\ x_1 + x_2)_{(\mathrm{mod}\, k)}$; $x \in E_k$; $x_1, x_2 \in E_k$;
6. produkt: $f(x_1, x_2) = (x_1 \cdot x_2)_{(\mathrm{mod}\, k)}$; $x \in E_k$; $x_1, x_2 \in E_k$;