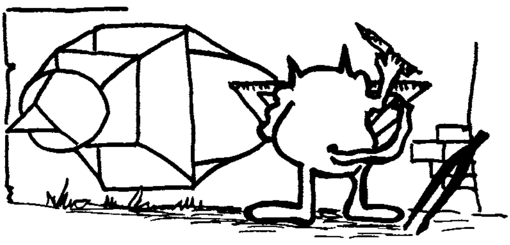


1.

Geometrija

1.1. Kvadratni komad papira $ABCD$ presavijen je tako da točka D prijeđe u proizvoljnu točku D' na BC. Novi položaj točke A je A'. Neka je E sjecište dužina AB i $A'D'$. Označimo s r polumjer kružnice upisane trokutu $BD'E$. Dokaži da je $A'E = r$.

PRIMJEDBA. Ovaj zadatak potječe iz Japana. Gradeći razne figurice iz papira svećenici u hramovima nailazili su na zanimljive geometrijske činjenice, od kojih je jedna opisana u ovom zadatku. One su prikazivane na keramičkim pločicama (njihov naziv je *sangaku*), koje se mogu naći u hramovima od 17. do 19. stoljeća. Kao što vidimo, stari Japanci su u svojim zenovskim meditacijama prilikom gradnje papirnatih figura ponekad imali otklon i prema matematičkim temama. Pogledajte zanimljiv članak Vladimira Devidéa: *Sangaku, geometrija u japanskim hramovima*, Matematičko–fizički list, 1994–95., br. 3, str. 124–130.

1.2. Neka je ABC trokut takav da vrijedi $BC = 2AC - 2AB$ i D točka na stranici BC. Dokažite da je $\sphericalangle ABD = 2\sphericalangle ADB$ ako i samo ako je $BD = 3CD$.

1.3. Neka je trokut ABC jednakostraničan i D vanjska točka u ravnini trokuta, tako da je $\sphericalangle ADB = 90^\circ$ i $AD = 2$. Udaljenost točke C od pravca DB jednaka je 5. Nađite duljinu dužine DB.

1.4. Dane su tri kružnice koje se sve međusobno dodiruju. Polumjer vanjske je 3, a dviju unutarnjih 1 i 2, redom sa središtima O, P, Q, tako da je O između P i Q. Nađite polumjer kružnice koja dodiruje sve tri.

1.5. Konstruirajte trokut ako su zadani a, $b-c$ i zna se da je $\sphericalangle ABC = 3\sphericalangle ACB$.

1.6. Pravokutnik duljine a i širine b ($a > b$) razrezan je po kraćoj srednjici, i od dobivenih dijelova složen je novi pravokutnik. Opseg novog pravokutnika jednak je n-terostrukom opsegu starog pravokutnika, $n \in \mathbf{R}$. Koje vrijednosti može poprimiti n?

1.7. Zadan je trokut ABC. Na stranici BC nađite točku M tako da zbroj polumjera opisanih kružnica trokuta ACM i ABM bude minimalan.

1.8. Iz jednog vrha šiljastokutnog trokuta povučena je visina, iz drugog težišnica, a iz trećeg simetrala kuta. Njihove presječne točke čine vrhove novog trokuta. Dokažite da taj trokut ne može biti jednakostraničan.

1.9. Ako u ravnini postoji jednakostraničan trokut s duljinom stranice a i točka s udaljenostima b, c i d od njegovih vrhova, dokažite da onda postoji i jednakostraničan trokut s duljinom stranica b i točka s udaljenostima c, d i a od njegovih vrhova.

1.10. Dana je kocka s duljinom brida a i duljina s. Kako odabrati duljine b i c tako da bude $b+c=s$ i da volumen kocke bude jednak zbroju volumena dviju kocaka s duljinama bridova b i c?

1.11. Točka E je sredina stranice AB kvadrata $ABCD$. Točke F i G odabrane su na BC i CD tako da u pravci AG i EF paralelni. Dokažite da dužina FG dodiruje krug upisan u kvadrat.

1.12. Dano je pet dužina takvih da se od svake tri od njih može načiniti trokut. Dokažite da je bar jedan od tih trokuta šiljastokutan.

1.13. Dokažite da se kvadrati udaljenosti središta upisane kružnice tangencijalnog četverokuta od dvaju njegovih suprotnih vrhova odnose kao umnošci duljina stranica koje izlaze iz tih vrhova.

1.14. Dan je kvadrat $ABCD$. Kroz točku A prolazi pravac i siječe stranicu CD u točki Q. Paralelno pravcu AQ povucite pravac koji siječe rub kvadrata u točkama M i N tako da površina četverokuta $AMNQ$ bude maksimalna.

1.15. Neka su točke A, B i C kolinearne i neka točka B leži između A i C. S iste strane pravca C konstruiramo tri polukružnice nad dužinama AB, BC i CA. Zajednička tangenta prvih dviju polukružnica u točki B

siječe treću polukružnicu u točki E. Neka su M i N točke u kojima druga zajednička tangenta dira prve dvije polukružnice. Izrazite omjer površina trokuta EMN i EAC kao funkciju polumjera $r = AB/2$ i $R = BC/2$.

1.16. Zadan je tetraedar $ABCD$, ne nužno pravilan. Sfera upisana tetraedru dira stranu ABC u točki K i stranu BCD u točki L. Dokažite da je $\sphericalangle AKB = \sphericalangle CLD$.

Rješenja

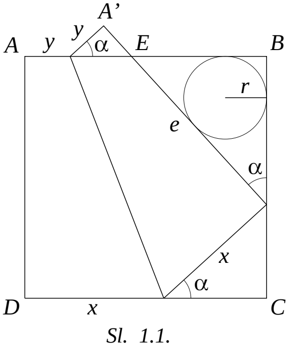
1.1. Označimo s a duljinu stranice kvadrata $ABCD$. Kako je trokut EBD' pravokutan, vrijedi

$$r = \tfrac{1}{2}(BE + BD' - ED').$$

S druge strane, opseg trokuta EBD' jednak je $2a$ (dokažite to!), odakle slijedi

$$\begin{aligned} r &= \tfrac{1}{2}(BE + BD' + ED' - 2ED') \\ &= \frac{1}{2}(2a - 2ED') = a - ED' = A'E. \end{aligned}$$

Alternativno rješenje, metodom "grube sile". Učenik Hrvoje Štefančić, Našice, jedini je riješio ovaj zadatak. Uvedimo oznake kao na slici 1.1.



Sl. 1.1.

Imamo

$$EB = e\sin\alpha, \quad BD' = e\cos\alpha, \quad A'E = a - e.$$

Polumjer upisane kružnice pravokutnom trokutu $ED'B$ jednak je

$$r = \tfrac{1}{2}(EB + BD' - ED') = \tfrac{e}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha - 1). \tag{1}$$

Kako je $A'E = y\,\mathrm{tg}\,\alpha = a - e$, onda je

$$y = \frac{a-e}{\mathrm{tg}\,\alpha}. \tag{2}$$

Za duljinu stranice AB imamo

$$y + \frac{y}{\cos\alpha} + e\sin\alpha = a, \tag{3}$$

odakle uvrštavanjem (2) u (3) dobijemo

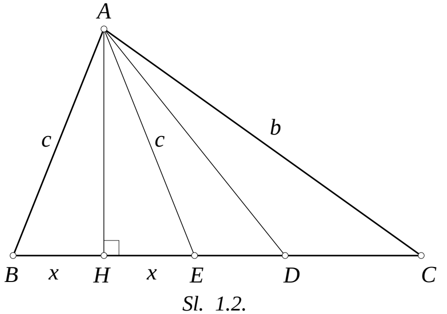
$$a = e\frac{1+\cos\alpha - \sin^2\alpha}{1+\cos\alpha-\sin\alpha}.$$

Iz $A'E = a - e$ zatim izlazi

$$A'E = e\frac{\sin\alpha - \sin^2\alpha}{1+\cos\alpha - \sin\alpha}.$$

Provjera identiteta $r = A'E$, gdje je r dano sa (1), svodi se na dokaz jednostavnog trigonometrijskog identiteta u varijabli α, koji prepuštamo čitatelju.

1.2. Pretpostavit ćemo da je kut $\measuredangle BAC$ šiljast. Postupak je sličan kad je taj kut tup.



Sl. 1.2.

Označimo sa H nožište visine iz vrha A i sa E točku na stranici BC za koju je $AE = AB$. Prema Pitagorinu poučku je $AC^2 - CH^2 = AB^2 - BH^2$, odakle slijedi

$$(AC - AB)(AC + AB) = (CH - BH)(CH + BH) = CE \cdot BC.$$

Zbog uvjeta u zadatku imamo da je $AC - AB = \frac{1}{2}BC$ pa iz prethodne relacije dobivamo $AC + AB = 2CE$, tj.

$$2AB + \tfrac{1}{2}BC = 2CE. \tag{1}$$

a) Neka je $\sphericalangle ABD = 2\sphericalangle ADB$. Onda je $\sphericalangle AEB = 2\sphericalangle ADB$ i dakle $AE = ED = AB$. Zbog (1) imamo

$$2ED + \tfrac{1}{2}BC = 2CE,$$

i odatle

$$2(ED + DC) = 2CE = 2ED + \tfrac{1}{2}(BD + DC).$$

Nakon skraćivanja dobivamo $BD = 3CD$.

b) Neka je $BD = 3CD$. Na isti način kao u a) dobivamo da je $2ED + \frac{1}{2}BC = 2CE$, pa iz (1) slijedi $ED = AB$, tj. $AE = ED$, dakle $\sphericalangle ABD = \sphericalangle AEB = 2\sphericalangle ADB$.

Alternativno rješenje, Marko Krznarić. Uz uobičajene oznake uvjet u zadatku pišimo kao $a = 2b - 2c$. Označimo sa H nožište visine povučene iz vrha A na stranicu BC. Neka je $BH = HE = x$.

a) Pretpostavimo da je $\sphericalangle ABD = 2\sphericalangle ADB$. Isto kao u prošlom rješenju (vidi a)) dobijemo da je $AE = ED = c$. Iz trokuta ABH je $AH^2 = c^2 - x^2$, a iz trokuta AHC je $AH^2 = b^2 - (a-x)^2$, odakle slijedi $c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2$. Koristeći uvjet $a = 2b - 2c$ dobivamo

$$x = \frac{5c^2 - 8bc + 3b^2}{4(b-c)} = \frac{3b - 5c}{4}.$$

Iz $BD = BH + HE + ED = x + x + c = \frac{3}{2}(b-c)$ i $DC = BC - BD = a - \frac{3}{2}(b-c) = \frac{1}{2}(b-c)$ slijedi $BD = 3DC$.

b) Obratno, pretpostavimo da je $BD = 3DC$. Isto kao u a) dobijemo izraz za x. Iz $BD = 2x + ED$ i $DC = a - BD$ dobivamo $BD = 3DC = 3a - 3BD$ i zatim $4(2x + ED) = 3a$, odnosno

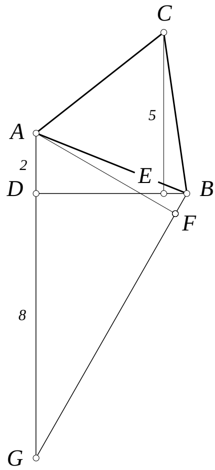
$$ED = \tfrac{1}{4}(3a - 8x).$$

Uvrstimo li u prethodnu relaciju $a = 2b - 2c$ i izraz za x, dobijemo $ED = c$, odakle slijedi da je trokut AED jednakokračan. Odatle se odmah vidi da je $\sphericalangle BEA = \sphericalangle ABE = 2\sphericalangle ADB$.

Postupak je sličan ako je kut $\sphericalangle ABC$ pravi ili tup.

PRIMJEDBA. Marko je zadatak riješio jednog lijepog nedjeljnog prijepodneva nakon neprospavane noći, putujući vlakom na pripreme u Zagreb.

1.3. Zarotiramo početnu figuru za 60° oko vrha B tako da C prijeđe u A, E u F. Produljimo dužine AD i BF do njihovog sjecišta G. Dužina CE zarotirana je za 60° i $CE \perp DB$, dakle $\sphericalangle DAF = 60^\circ$.



Sl. 1.3.

Odatle dobivamo da je

$$AG = 2EF = 2CE = 10.$$

Trokut BDG predstavlja polovinu jednakostraničnog trokuta, pa je

$$\frac{DB}{DG} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

odakle slijedi $DB = 8/\sqrt{3}$.

Alternativno rješenje, Davor Obradović. Označimo duljinu stranice trokuta ABC s a, kut $\sphericalangle DBA$ s α. Iz trokuta BCE dobivamo $a\sin(\alpha + 60^\circ) = 5$, odakle slijedi

$$a\sin\alpha\cos 60^\circ + a\cos\alpha\sin 60^\circ = 5.$$

Iz trokuta DBA je $a\sin\alpha = 2$, pa dobivamo

$$2\cos 60^\circ + DB\cdot\sin 60^\circ = 5,$$

odakle slijedi $DB = 8/\sqrt{3}$.

Alternativno rješenje, Predrag Savić. Označimo sa H nožište okomice povučene iz točke A na CE (na slici nije ucrtano). Neka je $BD = x$ i $DE = AH = y$. Prema Pitagorinu poučku u trokutima ABD, ACH i BCE dobivamo

$$x^2 = a^2 - 2^2, \quad y^2 = a^2 - 3^2, \quad (x-y)^2 = a^2 - 5^2. \tag{1}$$

Odatle slijedi $x^2 - y^2 = 5$, tj. $y = \sqrt{x^2 - 5}$. Oduzimajući prvu i zadnju jednadžbu u (1) dobivamo $2xy - y^2 = 21$, tj. $2x\sqrt{x^2 - 5} = x^2 + 16$. Nakon kvadriranja dolazimo do bikvadratne jednadžbe čije jedino pozitivno realno rješenje je $x = 8/\sqrt{3}$.

1.4. Natalia Kuljiš, I r., Split. Neka je R središte kružnice koja dodiruje sve tri, polumjera r. Očito je

$$PR = 1 + r, \quad QR = 2 + r$$
$$OR = 3 - r, \quad OQ = 1, \quad PO = 2.$$

Trokuti OPR i OQR imaju zajedničku visinu iz vrha R, pa je

$$P(OPR) = 2P(OQR),$$

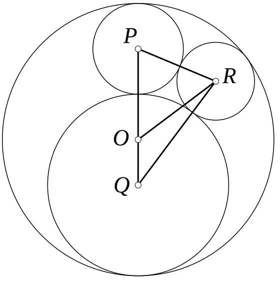
odakle primjenom Heronove formule nakon kvadriranja dobivamo

$$3(3-2)(3-1-r)(3-3+r) = 4 \cdot 3(3-1)(3-2-r)(3-3+r),$$

i zatim $r = 6/7$.

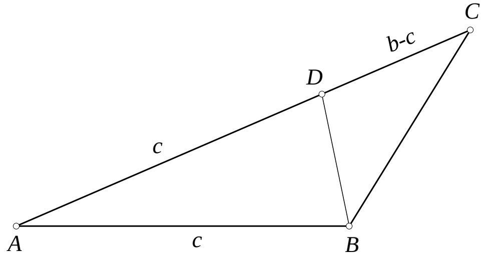
PRIMJEDBA. Elegantnom rješenju koje nam je Natalia izložila doprinjeo je i jedan mladi kavalir temeljito i pažljivo obrisavši ploču.

1.5. Natalia Kuljiš. *Analiza*. Pretpostavimo da je zadatak već riješen (vidi sliku). Neka je D točka na stranici AC takva da je $AD = c$ i $CD = b - c$. Trokut ABD je jednakokračan jer je $AB = AD = c$, pa slijedi $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ABD$. Označimo kut $\sphericalangle ACB$ s γ i kut $\sphericalangle DBC$ s δ. Kako je $\sphericalangle ADB$ vanjski kut trokuta BCD, to je $\sphericalangle ADB = \gamma + \delta = \sphericalangle ABD$. Iz $\sphericalangle ABC$ slijedi $\sphericalangle ABD = 3\gamma - \delta$ i zatim je $\gamma + \delta = 3\gamma - \delta$, tj. $\gamma = \delta$. Znači, trokut BCD je jednakokračan.



Sl. 1.4.

Konstrukcija. Iz rubnih točaka B i C zadane dužine a opišemo kružne lukove s otvorom šestara $b-c$ i u presjeku tih lukova dolazimo do točke D. Zatim povučemo simetralu dužine BD i u njenom presjeku s pravcem CD (tj. produžetkom dužine CD preko D) dolazimo do točke A.



Sl. 1.5.

Dokaz. Iz analize je očito da trokut ABC zadovoljava uvjete zadatka. Naime, trokut ABD je jednakokračan, tj. $AB = AD = c$, pa je $CD = CA - AD = b - c$ i

$$\begin{aligned}\sphericalangle ABC &= \sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC = \sphericalangle ADB + \sphericalangle DCB\\ &= \sphericalangle DBC + 2\sphericalangle DCB = \delta + 2\gamma = 3\delta.\end{aligned}$$

Diskusija. Zadatak će imati jedinstveno rješenje ako je $2(b-c) > a$ i $\gamma < 45^\circ$, tj $a > (b-c)\sqrt{2}$.

1.6. Mario Krnić. Opsezi starog i novog pravokutnika su $O = 2(a+b)$ i $O' = a + 4b$. Prema uvjetu u zadatku je $2(a+b)n = a + 4b$, iz čega dobivamo

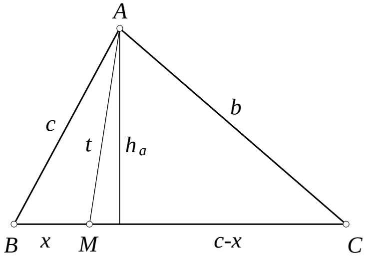
$$n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{b}{a+b}.$$

Kako zbog $a > b$ razlomak $\dfrac{b}{a+b}$ može poprimiti bilo koju vrijednost jedino iz otvorenog intervala $(0, 1/2)$ (dokažite to!), onda je

$$\frac{1}{2} < n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{b}{a+b} < \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4},$$

tj. $n \in \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$.

1.7. Mario Krnić. Uvedimo oznake kao na slici 1.6.



Sl. 1.6.

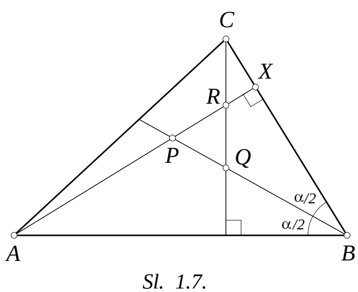
Onda je

$$\begin{aligned}
r_1 + r_2 &= \frac{cxt}{4P(ABM)} + \frac{(a-x)bt}{4P(ACM)} \\
&= \frac{cxth_a}{4P(ABM)h_a} + \frac{(a-x)bth_a}{4P(ACM)h_a} \\
&= \frac{2P(ABM)ct}{4P(ABM)h_a} + \frac{2P(ACM)bt}{4P(ACM)h_a} \\
&= \frac{(b+c)}{2}\frac{t}{h_a}.
\end{aligned}$$

Ovaj izraz je minimalan ako je $t = h_a$, tj. ako je M nožište visine iz vrha A. U slučaju tupokutnog trokuta vršimo ortogonalnu projekciju točke A na pravac BC.

1.8. Mario Krnić. Pretpostavimo suprotno, tj. da su svi kutovi trokuta PQR na slici 1.7. jednaki 60°.

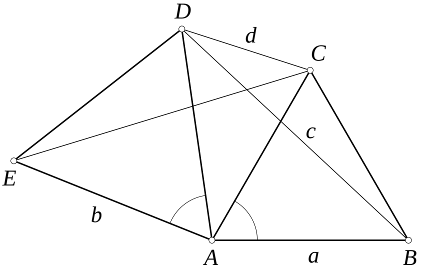
Onda je $\sphericalangle PAB = 30^\circ$, $\alpha/2 = 30^\circ$ i $\sphericalangle AXB = 90^\circ$. Dakle težišnica AX je visina, odakle slijedi da su je trokut jednakokračan. Kako



Sl. 1.7.

je jedan kut 60°, slijedi da je trokut jednakostraničan. Međutim, to je kontradikcija, jer onda se točke P, Q i R podudaraju.

1.9. Predrag Savić. Neka je ABC zadani jednakostraničan trokut duljine stranice a i D dana točka s udaljenostima b, c i d od vrhova. S vanjske strane konstruiramo jednakostraničan trokut ADE duljine stranice b. Promatrajmo udaljenost točke C od vrhova trokuta ADE. Imamo $CD = d$ i $CA = a$, pa još jedino treba pokazati da je $CE = c$.



Sl. 1.8.

Kako je $AE = AD = b$, $AC = AB = a$ i $\measuredangle CAE = \measuredangle BAD = 60^\circ + \measuredangle CAD$, dobivamo da su trokuti CAE i BAD sukladni, odakle slijedi da je $CE = BD = c$.

1.10. Predrag Savić. Uzmimo radi određenosti da je $b \geqslant c$. Onda iz $b + c = s$ dobivamo $b \geqslant s/2$. Prema uvjetu u zadatku je $b^3 + c^3 = a^3$, tj. $(b + c)(b^2 - bc + c^2) = a^3$, dakle

$$s[s^2 - 3b(s - b)] = a^3$$

Rješavajući zatim ovu jednadžbu kao kvadratnu po b i koristeći $b > s/2$, dobivamo

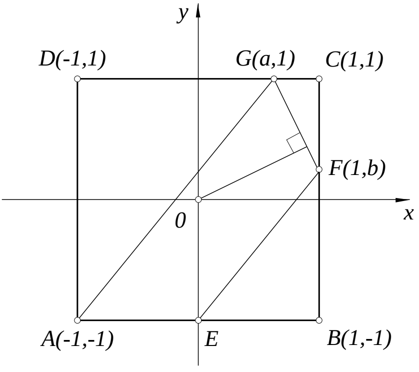
$$b = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{4a^3 - s^3}{12s}},$$

i zatim

$$c = \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{4a^3 - s^3}{12s}}.$$

1.11. Predrag Savić. Postavimo kvadrat u koordinatni sustav, tako da mu je središte u ishodištu i osnovica kvadrata jednaka dva (vidi sliku).

Zadatak će biti riješen ako pokažemo da je udaljenost ishodišta od pravca FG jednaka 1.



Sl. 1.9.

Kako je $AG||EF$, trokuti ADG i FBE su slični, odakle slijedi $\dfrac{1+a}{2} = \dfrac{1}{1+b}$, tj. $b = \dfrac{1-a}{a+1}$. Odatle slijedi da je $F\left(1, \dfrac{1-a}{a+1}\right)$. Kako je $G(a,1)$, jednadžba pravca FG glasi

$$y = \frac{2a}{a^2-1}x - \frac{a^2+1}{a^2-1}.$$

Prema tome je jednadžba pravca okomitog na FG koji prolazi kroz ishodište, dana sa $y = \dfrac{1-a^2}{2a}x$. Odatle slijedi da su koordinate presječne točke tih pravaca $\left(\dfrac{2a}{a^2+1}, \dfrac{1-a^2}{a^2+1}\right)$. Udaljenost te točke od ishodišta jednaka je 1, čime je tvrdnja dokazana.

1.12. Predrag Savić. Neka su te dužine a, b, c, d, e poredane po veličini: $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$. Pretpostavimo, protivno tvrdnji zadatka, da niti jedan od trokuta nije šiljastokutan. Kako za trokut sa stranicama x, y, z vrijedi

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\varphi,$$

onda za $\varphi \geqslant 90^\circ$ vrijedi $x^2 \geqslant y^2 + z^2$. Prema tome je

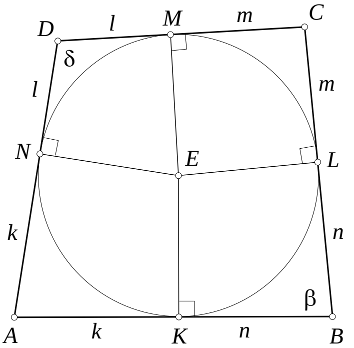
$$a^2 + b^2 \leqslant c^2, \quad c^2 + d^2 \leqslant e^2.$$

Kako je $c^2 \leqslant d^2$, imamo

$$e^2 \geqslant 2(a^2 + b^2) \geqslant (a+b)^2,$$

odakle slijedi $e \geqslant a + b$ što je zbog nejednakosti trokuta nemoguće.

1.13. Predrag Savić. Neka je $DE = x$, $BE = y$, $AC = e$ i ostale oznake kao na slici 1.10.



Sl. 1.10.

Sa slike je očevidno $AK = AN = k$. Promatrajmo trokut KBL. Prema kosinusovom teoremu je

$$KL = \sqrt{2(1 - \cos\beta)}.$$

Kako je četverokut $BLEK$ tetivan (naime $\sphericalangle BKE + \sphericalangle BLE = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$), onda prema Ptolomejevom teoremu imamo $y \cdot KL = 2rn$, tj.

$$y = \frac{2r}{\sqrt{2(1 - \cos\beta)}}$$

i analogno

$$x = \frac{2r}{\sqrt{2(1 - \cos\delta)}}.$$

Odatle slijedi

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{1 - \cos\beta}{1 - \cos\delta}.$$

Međutim u trokutima ABC i ACD prema kosinusovom poučku imamo

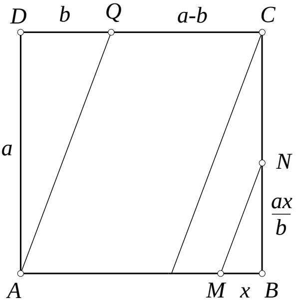
$$\cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab}, \quad \cos\delta = \frac{c^2 + d^2 - e^2}{2cd},$$

pa uvrštavanjem nakon malog računa dobivamo

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{cd}{ab},$$

što je i trebalo dokazati.

1.14. U slučaju kad je točka N na dužini QC i $N \neq C$, površina četverokuta $AMNQ$ je manja nego u slučaju kad je $N \equiv C$.



Sl. 1.11.

Isto tako, ako se točka N nalazi na DQ, onda je površina od $AMNQ$ manja od polovine površine danog kvadrata.

Dovoljno je stoga promotriti slučaj kad točka N leži na stranici BC. Sa slike se lako vidi (npr. $BN = ax/b$ iz sličnih trokuta AQD i NMB) da je površina četverokuta $AMNQ$ jednaka

$$P(x) = a^2 - \frac{1}{2}x\frac{ax}{b} - \frac{1}{2}(a+b)\Big(a - \frac{ax}{b}\Big),$$

što je kvadratni polinom u x. Njegova maksimalna vrijednost dostiže se za

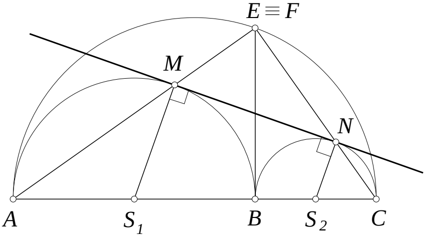
$$x = \frac{a-b}{2}.$$

Prema tome, ako je N na BC, tj. $BN = \frac{a}{b}\frac{a-b}{2} \leqslant a$, tj. $b \geqslant \frac{a}{3}$, pravac MN treba povući tako da je $MB = \frac{1}{2}QC$. Ako je pak $b < \frac{a}{3}$, onda se maksimum dostiže za $N \equiv C$.

1.15. Neka su S_1 i S_2 polovišta dužina AB i BC respektivno. Kako je

$$MS_1 \perp MN \perp NS_2,$$

to je $MS_1 \parallel NS_2$, odakle slijedi $\sphericalangle MS_1A = \sphericalangle NS_2B$, i prema tome trokuti ABM i BCN su slični. Odatle odmah slijedi da za točku $\{F\} = AM \cap NC$ vrijedi $\sphericalangle AFB = \pi/2$, tj. točka F leži na velikoj polukružnici. Kako je $MB \perp AF$, $NB \perp CF$, $\sphericalangle MFN = \pi/2$, zaključujemo da je $MFNB$ pravokutnik.



Sl. 1.12.

Također je $\sphericalangle FMN = \sphericalangle ABM = \beta$, jer se radi o kutovima s okomitim kracima. Imamo zatim

$$\sphericalangle FBM = \pi/2 - \sphericalangle FBN = \pi/2 - \sphericalangle FMN = \pi/2 - \beta$$

i

$$\sphericalangle ABF = \sphericalangle ABM + \sphericalangle MBF = \beta + (\pi/2 - \beta) = \pi/2,$$

odakle zaključujemo da je $F \equiv E$. Na taj način dobivamo da su trokuti ACE i NEM slični, pa je omjer njihovih površina jednak omjeru kvadrata odgovarajućih stranica, npr. $(MN/AC)^2$. Kako je

$$MN = EB = \sqrt{2r \cdot 2R}, \quad AC = 2(r+R),$$

dobivamo da je traženi omjer jednak

$$\frac{rR}{(r+R)^2}.$$

1.16. Nitko od učenika nije riješio ovaj zadatak. Kako su zadatke bodovali svi zajedno, bodovane su lijepo nacrtane skice, po formuli

$$\text{broj bodova} = \begin{cases} 2n, & \text{za učenike,} \\ 2n+3, & \text{za učenice,} \end{cases}$$

pri čemu je n broj nacrtanih skica.

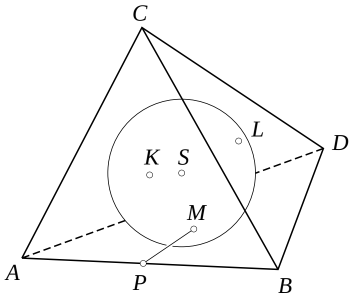
Uvedimo oznake kao na slici 1.13. Dokazat ćemo najprije da je

$$\sphericalangle AKB = \sphericalangle AMB.$$

Neka je S središte kružnice, a P nožište okomice iz S na AB. Po teoremu o okomicama, nožište okomice iz K na AB je P, također iz M na AB je P. Zbog $SK = SM$ pravokutni su trokuti SKP i SMP sukladni, odakle slijedi $KP = MP$. Odatle je

$$\triangle AKP \sim \triangle AMP, \quad \triangle BKP \sim \triangle BMP,$$

te je $\triangle AKB \sim \triangle AMB$, i stoga $\sphericalangle AKB = \sphericalangle AMB$.



Sl. 1.13.

Uvedimo sada neke oznake za kutove:

$$\sphericalangle AKB = \sphericalangle AMB = \alpha_1 \qquad \sphericalangle BLD = \sphericalangle BMD = \alpha_4$$
$$\sphericalangle AKC = \alpha_2 \qquad \sphericalangle DMA = \alpha_5$$
$$\sphericalangle BKC = \sphericalangle BLC = \alpha_3 \qquad \sphericalangle DLC = \alpha_6 .$$

Imamo:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi \tag{1.6}$$
$$\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5 = \pi \tag{1.7}$$
$$\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6 = \pi \tag{1.8}$$
$$\alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_6 = \pi . \tag{1.9}$$

Oduzimanjem prve i treće, a zatim druge i četvrte jednadžbe dobivamo:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_4 + \alpha_6 \tag{1.10}$$
$$\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_6 . \tag{1.11}$$

Zbrajanjem ovih jednadžbi dobivamo $\alpha_1 = \alpha_6$, čime je tvrdnja dokazana.

PRIMJEDBA. Na sličan način može se pokazati da je $\alpha_3 = \alpha_5$ i $\alpha_2 = \alpha_4$.