# 1.

# Općinsko natjecanje

Općinska i gradska natjecanja u 1993. godini održana su 20. ožujka, pod pokroviteljstvom Ministarstva kulture i prosvjete, a u organizaciji Hrvatskog matematičkog društva i Pokreta "Znanost mladima". Natjecanje je organizirano u svih 20 županija i gradu Zagrebu. Sudjelovalo je 9897 učenika iz 639 osnovnih i 1632 učenika iz 90 srednjih škola. Natjecanje je održano i u susjednoj Republici Mađarskoj, u Mohaču, gdje su boravili i radili hrvatski prognanici iz Slavonije i Baranje.

## Osnovna škola

### 4. razred

**4.1.** Izračunaj: $603 \cdot 38 + 225 \cdot (514 - 476) + (15 + 23) \cdot 172 =$

**4.2.** Prikaži prvih deset prirodnih brojeva s po pet dvojki koristeći zbrajanje, oduzimanje, množenje ili dijeljenje. (Na primjer $0 = 2 : 2 + 2 : 2 - 2$.)

**4.3.** Tri dječaka imala su ukupno 2 000 HRD. Odlučiše kupiti loptu. Kada je prvi dječak dao za loptu 350 HRD, drugi 40 HRD manje nego prvi, a treći 40 HRD manje od polovice sume novca koji su dali prvi i drugi dječak, tada su im ostali jednaki iznosi novca. Koliko je HRD imao svaki od njih?

**4.4.** Duljina kraka jednakokračnog trokuta je za 3 cm veća od duljine osnovice. Izračunaj duljine stranica trokuta ako opseg trokuta iznosi 24 cm. Nacrtaj trokut!

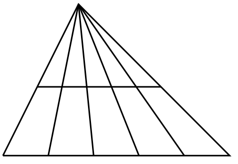
**4.5.** Četiri mačke za 4 dana ulove 4 miša. Za koliko će dana 100 mačaka uloviti 100 miševa?

### 5. razred

**5.1.** U izrazu $7 \cdot 6 + 12 : 3 - 1$ stavi zagrade tako da vrijednost novog izraza bude: **a)** $17$, **b)** $27$, **c)** $48$, **d)** $35$.

**5.2.** Odredi najveći i najmanji šesteroznamenkasti broj oblika $\overline{993abc}$ koji je djeljiv i sa $6$ i sa $7$.

**5.3.** Koliko ukupno dužina, a koliko svih trokuta ima na slici?



*Sl. 1.1.*

**5.4.** Umnožak dva broja je $1800$. Ako jedan faktor uvećamo za $6$, a drugi ostane isti, tada će novi umnožak biti $2250$. Koji su to brojevi?

**5.5.** Na nekom ispitu iz matematike trebalo je riješiti $30$ zadataka. Za svaki točno riješen zadatak učenik je dobio $5$ bodova, za djelomično riješen $3$ boda, a za netočan i neriješen zadatak učeniku se oduzima $2$ boda.

Koliko je zadataka riješio točno, koliko djelomično, a koliko netočno učenik koji je sakupio $95$ bodova, pri čemu je za točno riješene i neriješene zadatke zajedno dobio $65$ bodova?

### 6. razred

**6.1.** Odredi sve cijele brojeve $x$ za koje je i razlomak $\dfrac{2x+35}{x}$ isto cijeli broj.

**6.2.** Dva se pravca sijeku u točki $T$ i zatvaraju četiri kuta. Zbroj šiljastih kutova jednak je polovini jednog tupog kuta. Odredi veličinu svakog od ta četiri kuta.

**6.3.** Robu treba spremiti u sanduke. Ako se u svaki sanduk stavi $14$ kg, ostat će $180$ kg robe izvan sanduka. Stavi li se u svaki sanduk $18$ kg, ostat će $10$ praznih sanduka.

Koliko je kilograma robe trebalo spremiti?

**6.4.** Pravokutnik i kvadrat imaju jednake površine. Duljina stranice kvadrata je $1.6$ puta veća od širine pravokutnika, a duljina pravokutnika je $12.8$ cm. Izračunaj opsege pravokutnika i kvadrata.

**6.5.** Ante je jednoga dana kupio $3$ knjige. Za prvu je knjigu platio $\frac{1}{5}$ svote koju je ponio, za drugu $\frac{3}{7}$ preostalog novca, a za treću $\frac{3}{5}$ novca koji mu je ostao nakon kupovine prve dvije knjige. Vratio se kući sa $1600$ HRD. Koliko je Ante imao novaca prije kupovine?

## 7. razred

**7.1.** Pet brojeva ima svojstvo, da je počevši od najmanjeg, svaki sljedeći dva puta veći od prethodnog. Zbroj najmanjeg i najvećeg za $9$ je veći od zbroja ostala tri. Koji su to brojevi?

**7.2.** Neki dvoznamenkasti broj djeljiv je sa $3$. Ako se između znamenki tog broja upiše nula i tako dobivenom troznamenkastom broju doda dvostruki umnožak znamenke stotica, dobiva se devet puta veći broj od danog dvoznamenkastog broja. Koji dvoznamenkasti broj ima to svojstvo?

**7.3.** U raznostraničnom trokutu $ABC$ točka $P$ je polovište stranice $\overline{AB}$. Pravac $p$ koji prolazi točkom $P$ paralelan je sa simetralom kuta $\sphericalangle ACB$ i siječe pravac $BC$ u točki $D$, a pravac $AC$ u točki $E$. Dokaži da je trokut $CDE$ jednakokračan.

**7.4.** U tri posude nalazi se voda. Ako polovinu vode iz prve posude prelijemo u drugu posudu, zatim trećinu tako dobivene količine vode iz druge posude prelijemo u treću posudu i na kraju, četvrtinu tako dobivene vode iz treće posude prelijemo u prvu posudu, tada će u svakoj posudi biti $6$ litara vode. Koliko je vode bilo u svakoj posudi prije prelijevanja?

**7.5.** U jednakokračnom trokutu $ABC$ je $|AC| = |BC|$. Na produžetku stranice $\overline{AB}$ preko vrha $A$ odabrana je točka $D$, a na produžetku iste stranice preko vrha $B$ točka $E$ tako da je $|AD| = |AC|$ i $|BE| = |BC|$. Na produžetku stranice $\overline{AC}$ preko vrha $A$ odabrana je točka $F$ tako da je $|AF| = |AB|$. Razlika kutova $\sphericalangle DCE$ i $\sphericalangle AFB$, je $\sphericalangle DCE - \sphericalangle AFB = 120^\circ$. Izračunajte unutarnje kutove trokuta $ABC$.

## 8. razred

**8.1.** Za koju vrijednost $x$ je razlika $(x-0.1)^2 - (0.2x+1)^2$ jednaka nuli?

**8.2.** U afinoj funkciji $f(x) = \frac{9-m^2}{3}x + 3$ odredi vrijednost parametra $m$, tako da graf te funkcije bude paralelan grafu funkcije zadane jednadžbom $\frac{x-2}{9} - \frac{1-y}{27} = 1$.

**8.3.** Unutar pravokutnika $ABCD$ istaknuta je točka $T$ čije su udaljenosti od vrhova $A$, $B$, $C$ redom $15$, $24$, $20$. Kolika je udaljenost točke $T$ od vrha $D$?

**8.4.** Ako zbroju godina dvoje djece dodamo umnožak njihovih godina dobiva se $34$. Koliko godina ima svako dijete?

**8.5.** Dan je kvadrat $ABCD$. Na stranici $\overline{BC}$ istaknuta je točka $M$, a na stranici $\overline{CD}$ istaknuta je točka $N$ tako da je $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMN$.

Koliki je kut $\sphericalangle MAN$?

## Srednja škola

### 1. razred

**1.1.** Nađite sve trojke cijelih brojeva $(a, b, c)$ takvih da je $M(b, c) = 1$ i

$$\sqrt{a + \frac{b}{c}} = a\sqrt{\frac{b}{c}}.$$

**1.2.** Duljina jedne stranice trokuta $ABC$ je $20$ cm, a duljine težišnica koje pripadaju drugim dvjema stranicama su $24$ cm i $18$ cm. Kolika je površina trokuta?

**1.3.** Nacrtajte graf ove relacije:

$$\big||x-1|-1\big| = |y+1|.$$

**1.4.** Dva komada slitine (legure) zlata i srebra sadrže ukupno $a$ kg zlata. Ako bi postotak zlata u prvome komadu bio onaj isti koji je u drugom, oba komada sadržavala bi ukupno $b$ kg zlata. Ako bi postotak zlata u drugome komadu bio onaj isti koji je u prvom, oba komada bi sadržavala ukupno $c$ kg zlata. Koliko kg zlata ima u prvom, a koliko u drugom komadu?

## 2. razred

**2.1.** Ako su $x$ i $y$ realni brojevi takvi da je $x^2 + y^2 = 1$, dokažite da je tada

$$-\sqrt{2} \leqslant x + y \leqslant \sqrt{2}.$$

**2.2.** Riješite jednadžbu

$$\log_{0.125}(2x) - 4\log_{0.25} x \cdot \log_8 x = 0.$$

**2.3.** Izvan kvadrata $ABCD$ izabrana je točka $O$ takva da je $|OA| = |OB| = 5$ cm, i $|OD| = \sqrt{13}$ cm. Kolika je površina kvadrata?

**2.4.** Dokažite da je za svaki prirodan broj $n$ $\operatorname{Re}(1 + i\sqrt{2})^n$ neparan broj.

## 3. razred

**3.1.** Riješite nejednadžbu:

$$\log_2(\sqrt{x^2 - 4x} + 3) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x + 1} + 1}\right) + 1.$$

**3.2.** Riješite jednadžbu:

$$\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = -\frac{7}{2}.$$

**3.3.** Sjecište dijagonala konveksnog četverokuta dijeli te dijagonale na četiri dužine. Dokažite da su duljine tih dužina racionalni brojevi ako su duljine stranica i dijagonala racionalni brojevi.

**3.4.** Neka su $S_1$ i $S_2$ dvije suprotne strane, a $S_3$ jedna od preostalih strana dane kocke duljine brida $a$. Polovišta bridova $S_1 \cap S_3$ i $S_2 \cap S_3$ su vrhovi četverostranih piramida s osnovkama $S_2$, odnosno $S_1$. Nađite obujam presjeka tih piramida.

## 4. razred

**4.1.** U skupu kompleksnih brojeva riješite jednadžbu:

$$z^5 + \bar{z} = 0.$$

**4.2.** Nađite broj realnih rješenja jednadžbe:

$$\sin x = \frac{x}{1993\pi}.$$

**4.3.** Od 1993 dana vektora različitih smjerova niti jedan nije paralelan sa zbrojem svih preostalih vektora. Može li zbroj svih danih vektora biti nul-vektor?

**4.4.** Izračunajte zbroj

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \ldots + 1993 \cdot 2^{1992}.$$

## Rješenja zadataka

* * *

**4.1.** 38 000.

**4.2.** Zadatak ima više rješenja.

**4.3.** Dječaci su imali 700 HRD, 660 HRD i 640 HRD.

**4.4.** Osnovica trokuta duga je 6 cm, krak je dug 9 cm.

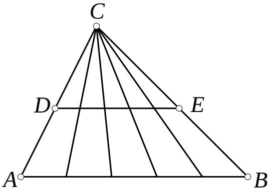
**4.5.** Sto mačaka ulovit će 100 miševa za 4 dana.

* * *

**5.1.** a) $(7 \cdot 6 + 12) : 3 - 1 = 17$, b) $(7 \cdot 6 + 12) : (3 - 1) = 27$, c) $7 \cdot 6 + 12 : (3 - 1) = 48$, d) $7 \cdot [(6 + 12) : 3 - 1] = 35$.

**5.2.** Ako je broj djeljiv sa $6$ i $7$ onda je djeljiv i sa $V(6, 7) = 42$. Dijeljenjem broja $993999$ sa $42$ dobivamo $993999 = 42 \cdot 23666 + 27$, pa je $993999 - 27 = 993972$ najveći traženi broj. Dijeljenjem broja $993000$ sa $42$ dobivamo $993000 = 42 \cdot 23642 + 36$. Najmanji traženi broj možemo dobiti na dva načina: (a) $(993000 - 36) + 42 = 993006$ ili (b) $993000 + (42 - 36) = 993006$.

**5.3.** Na dužini $\overline{AB}$ istaknuto je $6$ točaka koje određuju $\dfrac{6 \cdot 5}{2}$, tj. $15$ dužina. Iz istih razloga na dužini $\overline{DE}$ nalazi se $15$ dužina.




*Sl. 1.2.*

Na svakoj od $6$ dužina kojoj je zajednička rubna točka $C$ ima $3$ dužine, a na svih $6$ dužina ima $6 \cdot 3$, tj. $18$ dužina. Prema tome, ukupno svih dužina ima $15 + 15 + 18$, tj. $48$. Svaka dužina na pravcu $AB$ sa točkom $C$ određuje jedan trokut, pa tih trokuta ima $15$.

Analogno, sve dužine na pravcu $DE$ i točka $C$ određuju ukupno $15$ trokuta. Prema tome, svih trokuta na slici ima $15 + 15$, tj. $30$.

**5.4.** Neka su $a$ i $b$ nepoznati brojevi. Očito vrijedi $a \cdot b = 1800$, odnosno $(a + 6) \cdot b = 2250$. Odavde je $a \cdot b + 6b = 2250$ i uvrštavanjem vrijednosti iz prve jednadžbe dobivamo $1800 + 6b = 2250$. Rješenje ove jednadžbe je $b = 75$.

Sada lagano odredimo drugi broj $1800 : 75$, tj. $24$. Prema tome, traženi brojevi su $24$ i $75$.

*Drugi način.* $2250 - 1800 = 450$, a to je šesterostruki drugi faktor pa je $450 : 6$, tj. $75$ drugi faktor i $1800 : 75$, tj. $24$ je prvi faktor.

**5.5.** Učenik je za djelomično riješene zadatke dobio $95 - 65$, tj. $30$ bodova, a to znači da je učenik djelomično riješio $30 : 3 = 10$ zadataka.

Sada je jasno da je ukupan broj točno riješenih i neriješenih zadataka $30 - 10$, tj. $20$. Ako pretpostavimo da je svih tih $20$ zadataka učenik točno riješio, tada bi dobio $20 \cdot 5$, tj. $100$ bodova. No kako je za tih $20$ zadataka dobio $65$ bodova, to je očito izgubio $100 - 65$, tj. $35$ bodova. Za svaki zadatak koji nije riješio učenik je izgubio $5 + 2$, tj. $7$ bodova, pa je ukupan broj neriješenih zadataka $35 : 7$, tj. $5$.

Prema tome, broj točno riješenih zadataka je $20 - 5$, tj. $15$.

* * *

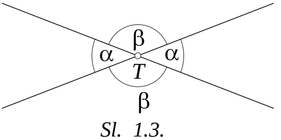
**6.1.** Zadani razlomak možemo pisati kao

$$\frac{2x+35}{x} = \frac{2x}{x} + \frac{35}{x} = 2 + \frac{35}{x}$$

pri čemu će razlomak $\frac{35}{x}$ biti cijeli broj samo ako je nazivnik $x$ djelitelj od $35$. Prema tome, $x$ može imati jednu od ovih osam vrijednosti: $1$, $-1$, $5$, $-5$, $7$, $-7$, $35$, $-35$.

**6.2.** Neka je $\alpha$ šiljasti kut, a $\beta$ tupi kut, pri čemu imamo dva para vršnih kutova.

Skica:




*Sl. 1.3.*

Kako je $\frac{1}{2}\beta = 2\alpha$, slijedi da je $\beta = 4\alpha$. Očito je da su $\alpha$ i $\beta$ dva sukuta, pa vrijedi $\alpha + \beta = 180$ ili $\alpha + 4\alpha = 180, 5\alpha = 180$, pa je $\alpha = 36^\circ$, $\beta = 4 \cdot 36$, tj. $\beta = 144^\circ$.

**6.3.** Neka je $x$ broj sanduka. Ako se u svaki sanduk stavi $14$ kg, tada je ukupna količina robe $14 \cdot x + 180$, a to je isto ako u svaki sanduk stavimo $18$ kg, tj. $18(x - 10)$.

Sad možemo napisati jednadžbu $14x + 180 = 18(x - 10)$. Rješenje jednadžbe je $x = 90$. Prema tome, robu je trebalo spremiti u $90$ sanduka, a ukupna količina robe je $14 \cdot 90 + 180$, tj. $1440$ kg.

**6.4.** Ako širinu pravokutnika označimo sa $b$, tada je duljina stranice kvadrata $1.6b$, a površina kvadrata $1.6b \cdot 1.6b$, tj. $2.56b \cdot b$.

Kako je površina pravokutnika $12.8b$, a ovo je jednako površini kvadrata, to možemo pisati $2.56b \cdot b = 12.8b$, ili $b \cdot b = 5b$, pa je očito $b = 5$.

Duljina stranice kvadrata je $8$ cm.

Prema tome, opseg pravokutnika je $O = 2a + 2b$, ili $O = 2(a + b)$, pa je $O = 2(12.8 + 5)$, tj. $O = 35.6$ cm.

Opseg kvadrata je $32$ cm.

**6.5.** Ako je za kupovinu treće knjige Ante platio $\frac{3}{5}$ ostatka novca koji je imao nakon kupovine druge knjige, onda je $1600$ HRD svota novaca koji je donio kući, a to je $\frac{2}{5}$ tog istog ostatka, pa je $\frac{1}{5}$ ostatka $800$ HRD, a cijeli ostatak nakon kupovine druge knjige je $4000$ HRD.

Tih $4000$ HRD je $\frac{4}{7}$ ostatka novca koji je Ante imao nakon kupovine prve knjige, pa je $\frac{1}{7}$ tog ostatka $1000$ HRD, a cijeli ostatak nakon kupovine prve knjige je $7000$ HRD.

Tih $7000$ HRD je $\frac{4}{5}$ one svote novca koji je Ante imao prije kupovine knjiga, pa je $\frac{1}{5}$ tog novca $1750$ HRD, a ukupna svota novca je pet puta veća tj. $8750$ HRD.

Prema tome, Ante je prije kupovine knjiga imao $8750$ HRD.

* * *

**7.1.** Ako sa $x$ označimo najmanji broj, tada nepoznati brojevi imaju oblik $x$, $2x$, $4x$, $8x$, $16x$.

Sada očito vrijedi jednadžba:

$$x + 16x = 2x + 4x + 8x + 9.$$

Rješenje jednadžbe je $x = 3$. Prema tome, traženi brojevi su: $3$, $6$, $12$, $24$ i $48$.

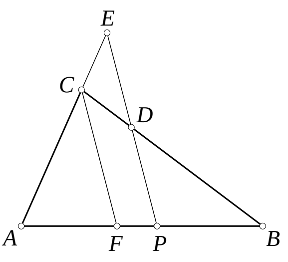
**7.2.** Neka dvoznamenkati broj ima oblik $\overline{ab}$, pa dobiveni troznamenkasti broj ima oblik $\overline{a0b}$, pri čemu su $a$ i $b$ znamenke. Sada možemo pisati jednadžbu:

$$100a + b + 2a = 9(10a + b),$$

koja nakon sređivanja ima oblik $12a = 8b$, tj. $a = \dfrac{2}{3}b$.

Kako su $a$ i $b$ znamenke, to $b$ može imati jednu od ove tri vrijednosti: $3$, $6$ ili $9$. Prve dvije vrijednosti otpadaju jer dobiveni brojevi $23$ i $46$ nisu djeljivi sa $3$. Za $b = 9$ bit će $a = 6$, pa je traženi dvoznamenkasti broj $69$.

**7.3.**




*Sl. 1.4.*

Pravac $CF$ simetrala je kuta $\sphericalangle ACB$, pa očito vrijedi $\sphericalangle ACF = \sphericalangle BCF$. Kako su pravci $CF$ i $PE$ paralelni to je: $\sphericalangle ACF = \sphericalangle CEP = \sphericalangle CED$ (kutovi uz transverzalu). No i $\sphericalangle BCF = \sphericalangle CDE$ (kutovi uz transverzalu).

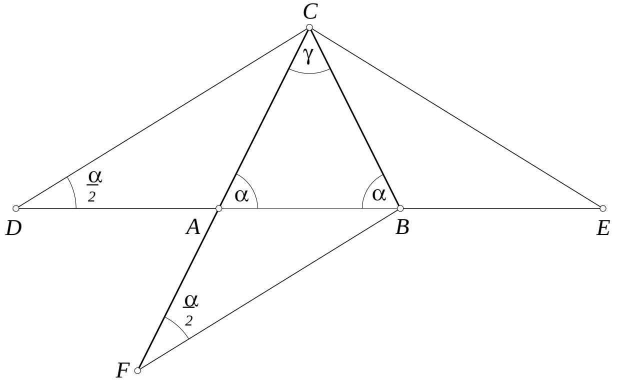
Kako su lijeve strane zadnjih dviju jednakosti jednake to moraju biti i desne, tj. $\sphericalangle CED = \sphericalangle CDE$. Time smo pokazali da trokut $CDE$ ima dva jednaka kuta, pa mora imati i dvije jednake stranice, a to znači da je on jednakokračan.

**7.4.** Neka je u 3. posudi nakon prelijevanja iz 2. posude bilo $x$ litara. Nakon što smo iz 3. posude prelili u 1. posudu $\frac{1}{4}x$ litara, u 3. posudi je ostalo $\frac{3}{4}x$ litara, tj. $\frac{3}{4}x = 6$, pa je $x = 8$. To znači, da smo iz 3. posude prelili u 1. posudu 2 litre, pa zaključujemo da je u 1. posudi prije dolijevanja iz 3. posude bilo $4$ litre, a to znači da je u 1. posudi u početku bilo $8$ litara.

Neka je u 2. posudi nakon dolijevanja iz 1. posude bilo $y$ litara. Ako se $\frac{1}{3}$ od $y$ litara prelije u 3. posudu, znači da je u 2. posudi ostalo $\frac{2}{3}y$ litara, tj. $\frac{2}{3}y = 6$, pa je $y = 9$. Kako se iz 1. posude prelilo u 2. posudu $4$ litre, zaključujemo da je u 2. posudi u početku bilo $9 - 4$, tj. $5$ litara.

Kako je u trećoj posudi prije prelijevanja u 1. posudu bilo $8$ litara, a iz 2. posude se u 3. posudu prelilo $\frac{1}{3}y$, tj. $3$ litre, zaključujemo da je u 3. posudi u početku bilo $8 - 3$, tj. 5 litara.

**7.5.** Trokuti $ACD$, $BCE$ i $ABF$ su jednakokračni. Kut $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = \alpha$ vanjski je kut svakog od tri navedena jednakokračna trokuta.




*Sl. 1.5.*

Zato razliku $\sphericalangle DCE - \sphericalangle AFB = 120^\circ$ možemo zapisati ovako: $\dfrac{\alpha}{2} + \gamma + \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\alpha}{2} = 120^\circ$, tj. $\dfrac{\alpha}{2} + \gamma = 120^\circ$.

U trokutu $ABC$ očito vrijedi: $2\alpha + \gamma = 180^\circ$. Rješavajući ovaj sustav jednadžbi dobivamo: $\alpha = 40^\circ$ i $\gamma = 100^\circ$.

* * *

**8.1.** Kako je navedeni izraz razlika kvadrata, to možemo pisati $(x - 0.1)^2 - (0.2x + 1)^2 = 0$, pa nakon rastavljanja na faktore i sređivanja dobivamo: $(1.2x + 0.9)(0.8x - 1.1) = 0$.

Sada očito iz $1.2x+0.9=0$ slijedi da je $x_1=-\frac{3}{4}$. Isto tako iz $0.8x-1.1=0$ slijedi $x_2=\dfrac{11}{8}$.

**8.2.** Nakon sređivanja jednadžbe $\dfrac{x-2}{9}-\dfrac{1-y}{27}=1$, dobivamo $y=-3x+34$ pri čemu je koeficijent smjera $a=-3$. Zato vrijedi: $\dfrac{9-m^2}{3}=-3$.

Rješavajući ovu jednadžbu po $m$ dobivamo: $9-m^2=-9$, tj. $m^2=18$ odnosno $m_1=3\sqrt{2}$ odnosno $m_2=-3\sqrt{2}$.

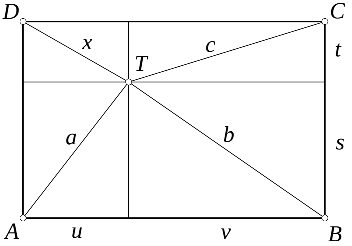
**8.3.** Neka je $x$ tražena udaljenost. Imamo redom

$$a^2=u^2+s^2,$$
$$b^2=v^2+s^2,$$
$$c^2=v^2+t^2,$$
$$x^2=u^2+t^2.$$

Odavde je $a^2+c^2=b^2+x^2$, tj.

$$x^2=a^2-b^2+c^2.$$

U našem slučaju je $x^2=225-576+400=49$, tj. $x=7$.




*Sl. 1.6.*

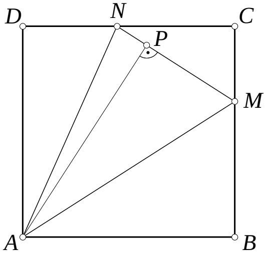
**8.4.** Neka je $x$ i $y$ broj godina jednog odnosno drugog djeteta. Zato vrijedi: $x+y+xy=34$ ili redom:

$$y(1+x)=34-x,$$
$$y=\frac{-x+34}{1+x}=\frac{34-x}{x+1}=\frac{-(x+1)+35}{x+1}=-1+\frac{35}{x+1}.$$

Razlomak $\dfrac{35}{x+1}$ bit će cijeli broj ako je $x+1=\pm1,\pm5,\pm7,\pm35$. Zbog uvjeta da su $x$ i $y$ pozitivni cijeli brojevi lagano utvrdimo da jedino dolazi u obzir $x+1=5$, tj. $x=4$, a $y=6$, odnosno $x+1=7$, tj. $x=6$, a $y=4$.

Prema tome, jedno dijete ime $4$ godine, a drugo $6$ godina.

**8.5.** Na dužini $\overline{MN}$ odaberemo točku $P$ tako da je $AP \perp MN$. Kako je $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMN$ i $\overline{AB}$ zajednička stranica, zaključujemo da $\triangle ABM \cong \triangle AMP$, pa je $\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAP = x$ i $|AB| = |AP|$.



*Sl. 1.7.*

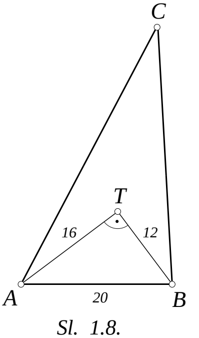
Trokuti $APN$ i $ADN$ su pravokutni i uz to je $|AP| = |AD|$, a $\overline{AN}$ je zajednička stranica, pa je $\triangle APN \cong \triangle ADN$. Iz sukladnosti ova dva trokuta slijedi da je $\sphericalangle PAN = \sphericalangle DAN = y$. Sada je očito $\sphericalangle MAN = x + y$, a $\sphericalangle BAD = 2x + 2y = 90$, pa je $x + y = 45^\circ$.

Prema tome, $\sphericalangle MAN = 45^\circ$.

* * *

**1.1.** Kvadriranjem i sređivanjem dobiva se $ac = b(a^2 - 1)$. Kako je $\mathrm{M}(b, c) = 1$, slijedi da je $c = a^2 - 1$, $b = a$ ili $c = 1 - a^2$, $b = -a$.

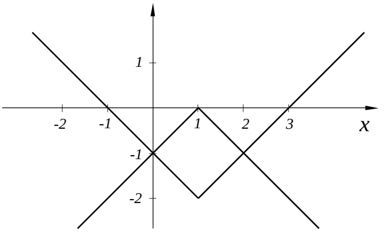
**1.2.** Neka je $T$ težište trokuta. Tada je $P_{ABC} = 3 \cdot P_{ABT}$. $P_{ABT}$ može se izračunati pomoću Heronove formule ( $|AB| = 20$ cm, $|AT| = 16$ cm i $|BT| = 12$ cm).



*Sl. 1.8.*

Podaci su takvi da je $\triangle ABT$ pravokutan ( $20^2 = 16^2 + 12^2$ ). Stoga je $P_{ABC} = 3 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 = 288 \text{ cm}^2$.

**1.3.**




*Sl. 1.9.*

Promotrimo najprije slučaj **a)** $y \geqslant -1$ . Tada je $||x-1|-1| = y+1$ .
($i$) Za $x \geqslant 1$ vrijedi $|x-2| = y+1$ .
 A. Ako je $x \geqslant 2$ , tada $y = x-3$ .
 B. Ako je $1 \leqslant x \leqslant 2$ , tada $y = -x+1$ .
($ii$) Za $x \leqslant 1$ , vrijedi $|x| = y+1$ .
 A. Ako je $0 \leqslant x \leqslant 1$ , tada $y = x-1$ .
 B. Ako je $x \leqslant 0$ , tada $y = -x-1$ .
Neka je sada **b)** $y \leqslant -1$ . Tada je $||x-1|-1| = -y-1$ .
($i$) Za $x \geqslant 1$ vrijedi $|x-2| = -y-1$ .
 A. Ako je $x \geqslant 2$ , tada $y = -x+1$ .
 B. Ako je $1 \leqslant x \leqslant 2$ , tada $y = x-3$ .
($ii$) Za $x \leqslant 1$ vrijedi $|x| = -y-1$ .
 A. Ako je $0 \leqslant x \leqslant 1$ , tada $y = -x-1$ .
 B. Ako je $x \leqslant 0$ , tada $y = x-1$ .

**1.4.** Neka je težina prvog komada jednaka $x$ kg, a drugog $y$ kg i neka prvi komad sadrži $100p$ posto zlata, a drugi $100q$ posto. Prvi sadrži $px$ kg zlata, a drugi $qy$ kg zlata.

Sada je

$$px + qy = a,$$
$$qx + qy = b,$$
$$px + py = c$$

Iz druge i treće jednadžbe dobiva se $q = bp/c$ . Uvrštavanjem u drugu jednadžbu i iz prve dobiva se $px = \dfrac{b-a}{b-c}c$ kg, $qy = \dfrac{a-c}{b-c}b$ kg.

* * *

**2.1.** Iz nejednakosti $(x-y)^2 \geqslant 0$ slijedi $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$ i odavde

$$2x^2 + 2y^2 \geqslant x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$$

Zato $2 \geqslant (x+y)^2$ te je $|x+y| \leqslant \sqrt{2}$ odnosno $-\sqrt{2} \leqslant x+y \leqslant \sqrt{2}$.

**2.2.** Budući da je

$$\log_{0.125}(2x) = \log_{0.125} 2 + \log_{0.125} x = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} x,$$

$$\log_{0.25} x = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x,$$

$$\log_8 x = -\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} x$$

jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$2\log^2_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x - 1 = 0$$

Rješenja odgovarajuće kvadratne jednadžbe su: $\log_{\frac{1}{2}} x_1 = \frac{1}{2}$ i $\log_{\frac{1}{2}} x_2 = -1$, a rješenja polazne jednadžbe su $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i $x_2 = 2$.

**2.3.** Iz $|OD|^2 = |OM|^2 + |DM|^2$ i $|OA|^2 = |ON|^2 + |AN|^2$, tj. $13 = x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ i $25 = (a+x)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ oduzimanjem se dobiva $x = \dfrac{12-a^2}{2a}$.

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobiva se $a^4 - 38a^2 + 72 = 0$. Rješenja ove jednadžbe su $a_1^2 = 36$ (što ne zadovoljava uvjetima zadatka) i $a_2^2 = 2$.

Površina kvadrata je $2\ \mathrm{cm}^2$.

**2.4.** Za $n = 1$ je $\operatorname{Re}(1 + i\sqrt{2}) = 1$ što je neparan broj.

Neka je za neki prirodan broj $n$

$$(1+i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2},$$

gdje je $a_n$ neparan broj, a $b_n$ prirodan broj.

Tada je

$$(1+i\sqrt{2})^{n+1} = a_{n+1} + ib_{n+1}\sqrt{2}$$

i odavde

$$\begin{aligned}(1+i\sqrt{2})^n(1+i\sqrt{2}) &= (a_n + ib_n\sqrt{2})(1+i\sqrt{2})\\ &= (a_n - 2b_n) + i(a_n + b_n)\sqrt{2}\end{aligned}$$

te je $a_{n+1} = a_n - 2b_n$ i $b_{n+1} = a_n + b_n$.

Ako je $a_n$ neparan, tada je i $a_{n+1}$ neparan broj. Po principu matematičke indukcije $a_n$ je neparan za svaki prirodan broj $n$.

* * *

**3.1.** Moraju biti zadovoljeni uvjeti za vađenje drugog korijena:

$$x^2 - 4x \geqslant 0, \quad x + 1 \geqslant 0 \iff x \in [-1, 0] \cup [4, +\infty)$$

Uz ove uvjete nejednadžba je ekvivalenta sa:

$$\sqrt{x^2-4x}+3>\frac{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1}{2}\cdot 2$$
$$\iff \sqrt{x+1}<2 \iff -1\leqslant x<3.$$

Rješenje: $x\in[-1,0]$.

**3.2.**

$$\sin x+\cos x+\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cos x}+\frac{\cos x+\sin x}{\sin x\cos x}=\frac{-7}{2}.$$

Neka je: $\sin(2x)=2\sin x\cos x=t$. Tada je

$$(\sin x+\cos x)^2=1+t.$$

Sada gornja jednadžba poprima oblik

$$(\sin x+\cos x)(1+\frac{1}{\sin x\cos x})=\frac{-7}{2}-\frac{1}{\sin x\cos x}$$

i nakon uvrštavanja

$$t(4t^2-29t-24)=0.$$

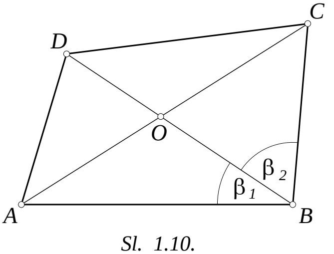
Za $t=0$ slijedi $\sin(2x)=0$ odakle $x=\dfrac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. Ovo nije rješenje jer nije definirano $\dfrac{1}{\sin x}$ i $\dfrac{1}{\cos x}$.

Rješenja kvadratne jednadžbe $4t^2-29t-24=0$ su $t_1=8$ (što nije moguće zbog $|t|\leqslant 2$) i $t_2=-\frac{3}{4}$.

Sada je $\sin(2x)=-\frac{3}{4}$. Ova jednadžba je zadovoljena za $x_1=-\arcsin(\frac{3}{4})+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$; $x_2=\frac{\pi}{2}+\arcsin(\frac{3}{4})+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

**3.3.** Neka je $\beta=\sphericalangle ABC$, $\beta_1=\sphericalangle ABD$, $\beta_2=\sphericalangle DBC$. Tada je

$$\frac{|AO|}{|OC|}=\frac{|AO|}{|AB|}\cdot\frac{|AB|}{|BC|}\cdot\frac{|BC|}{|OC|}=\frac{|AB|}{|BC|}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}.$$




*Sl. 1.10.*

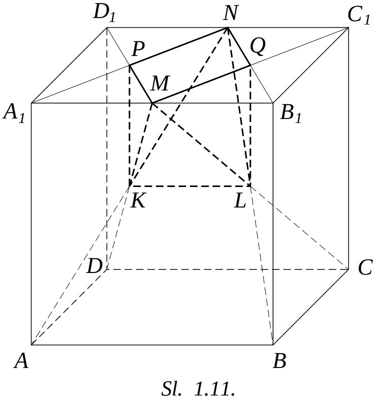
Kako je $|AO|+|OC|=|AC|\in\mathbf{Q}$, dovoljno je pokazati da je $\dfrac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\in\mathbf{Q}$. Tada su $|AO|$ i $|OC|\in\mathbf{Q}$.

Prema kosinusovom teoremu $\cos\beta$, $\cos\beta_1$ i $\cos\beta_2$ su racionalni, pa iz $\cos\beta = \cos\beta_1\cos\beta_2 - \sin\beta_1\sin\beta_2$ slijedi da je $\sin\beta_1\sin\beta_2 \in \mathbf{Q}$. Nadalje, $\sin^2\beta_2 = 1-\cos^2\beta_2 \in \mathbf{Q}$ te je $\dfrac{\sin\beta_1\sin\beta_2}{\sin^2\beta_2} = \dfrac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \in \mathbf{Q}$.

**3.4.** U presjeku se dobije klin $PMQNKL$, koji se sastoji od dvije piramide $KLQPM$ i $KLQPN$.

$$V = V_{KLQPM} + V_{KLQPN} = 2\cdot V_{KLQPM}$$

Kako je $|KL| = |LQ| = |KP| = |PQ|$, te $KL \perp KP$, $\langle PKL\rangle \perp \langle A_1B_1C_1\rangle$ to je $V_{KLQPM} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3}{24}$. Zato $V = \dfrac{a^3}{12}$.




*Sl. 1.11.*

* * *

**4.1.** Iz $z^5 = -\bar{z}$ množenjem sa $z$ slijedi $z^6 = -|z|^2$, te je $\mathrm{Re}\,(z^6) = -|z|^2$, $\mathrm{Im}\,(z^6) = 0$.

Koristeći oblik kompleksnog broja $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ dobivamo

$$r^6\cos(6\varphi) = -r^2, \tag{1.1}$$

$$r^6\sin(6\varphi) = 0. \tag{1.2}$$

Ako je $r=0$, onda je $z_0 = 0$, a ako je $r \neq 0$ i $\sin(6\varphi) = 0$ tada je $\varphi = \dfrac{k\pi}{6}$, $k = 0, 1, \ldots, 11$. Tada je $\cos(6\varphi) = \pm 1$, a iz (3.1) slijedi da je $\cos(6\varphi) = -1$, $r = 1$.

Iz (3.1) dobiva se da su rješenja samo za: $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{6}$, $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi_3 = \dfrac{5\pi}{6}$, $\varphi_4 = \dfrac{7\pi}{6}$, $\varphi_5 = \dfrac{3\pi}{2}$, $\varphi_6 = \dfrac{11\pi}{6}$.

Dakle, sva rješenja su: $z_0 = 0$, $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_2 = i, z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, $z_5 = -i$, $z_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

**4.2.** Jedno rješenje je $x = 0$. Ako je $x_1$ rješenje, tada je i $-x_1$ rješenje. Odredimo broj pozitivnih rješenja.

$$|\sin x| \leqslant 1 \implies \frac{x}{1993\pi} \leqslant 1 \implies x \leqslant 1993\pi.$$

Na svakom intervalu $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ pravac $y = \frac{x}{1993\pi}$ siječe graf funkcije $y = \sin x$ ili u dvije točke ili niti u jednoj. Kako je $1993 = 2 \cdot 996 + 1$ biti će pozitivnih rješenja $2 \cdot 996 + 1 = 1993$, a svih rješenja će biti $2 \cdot 1993 + 1 = 3987$.

**4.3.** Neka su ti vektori $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{1993}$ i neka je zbroj svih vektora nul-vektor. Tada je

$$\vec{a}_1 = -\sum_{i=2}^{1993} \vec{a}_i.$$

No ovo nije moguće zato jer vektor $\vec{a}_1$ nije paralelan sa zbrojem preostalih. Zato nije istinita pretpostavka tj. zbroj svih vektora ne može biti nul-vektor.

**4.4.** *1. način.*

$$S = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \ldots + 1993 \cdot 2^{1992}.$$

Da bismo izračunali ovaj zbroj grupirajmo sumande na ovaj način:

$$\begin{aligned}
1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{1992} &= 2^{1993} - 1,\\
2 + 2^2 + \ldots + 2^{1992} &= 2(2^{1992} - 1),\\
2^2 + \ldots + 2^{1992} &= 2^2(2^{1991} - 1),\\
&\vdots\\
2^{1991} + 2^{1992} &= 2^{1991}(2^2 - 1),\\
2^{1992} &= 2^{1992}(2 - 1).
\end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned}
S &= 1993 \cdot 2^{1993} - (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{1992})\\
&= 1993 \cdot 2^{1993} - 2^{1993} + 1 = 1992 \cdot 2^{1993} + 1.
\end{aligned}$$

*2. način.* Ovaj se zbroj može odrediti pomoću derivacije i sumiranja geometrijskog niza. Vrijedi

$$(x + x^2 + \ldots + x^{1993})' = 1 + 2x + \ldots + 1993x^{1992},$$

odnosno

$$\left(x \cdot \frac{1 - x^{1993}}{1 - x}\right)' = \ldots = \frac{1 - x^{1993}(1994 - 1993x)}{(1 - x)^2}.$$

Za $x \neq 1$ je

$$1 + 2x + \ldots + 1993x^{1992} = \frac{1 - x^{1993}(1994 - 1993x)}{(1 - x)^2}.$$

Za $x = 2$ dobivamo traženi zbroj.