1.

Općinsko natjecanje

Kao i svake godine i u 1994. godini susreti i natjecanja mladih matematičara, učenika osnovnih i srednjih škola Republike Hrvatske, započeli su školskim natjecanjima koja su se provodila tijekom siječnja i veljače. Najbolji učenici na školskim natjecanjima pozvani su na općinska natjecanja koja su se održala 5. ožujka 1994. u svim općinama, po jedinstvenim kriterijima Državne komisije za matematiku.

Osnovna škola

4. razred

4.1. Izračunaj $901 \cdot 380 + 75 \cdot (5142 - 4762) + (149 + 231) \cdot 24$.

4.2. Ispiši sve troznamenkaste brojeve kojima je umnožak znamenaka jednak 8.

4.3. U plesnu skupinu uključeno je 39 dječaka i 23 djevojčice. Svaki tjedan skupini se pridruži 6 dječaka i 8 djevojčica. Nakon koliko tjedana će biti isti broj dječaka i djevojčica? Koliki je tada ukupan broj djece u plesnoj skupini?

4.4. Osnovica jednakokračnog trokuta je za 12 mm kraća od njezina kraka. Opseg tog trokuta iznosi 105 mm. Kolika je duljina kraka, a kolika duljina osnovice trokuta? Nacrtaj taj trokut.

4.5. Kroz neku cijev istječe 42 litre vode za 6 minuta. Koliko litara vode istječe kroz tu cijev od 5 sati i 12 minuta (ujutro) do 24 sata (ponoći)?

5. razred

5.1. Riješi jednadžbu:

$$[(1688 - 57x) \cdot 46 + 54] : 13 = 128.$$

5.2. Odredi znamenke a i b u broju $\overline{78a9b}$, tako da bude djeljiv s 18.

5.3. Zbroj četiri broja je 100. Zbroj prvog, trećeg i četvrtog je 65, a zbroj prvog, drugog i trećeg je 78. Koliki je svaki broj, ako je prvi broj za 10 manji od drugog broja?

5.4. Brojevi na košarkaškim dresovima su ili jednoznamenkasti ili dvoznamenkasti s različitim znamenkama. Koliko različitih brojeva možemo napisati pomoću znamenki 1, 2, 3, 4, 5?

5.5. Duljine stranica nekog trokuta tri su uzastopna neparna prirodna broja, pri čemu je zbroj duljina dviju duljih stranica za 5 cm manji od trostruke duljine najmanje stranice. Koliki je opseg tog trokuta?

6. razred

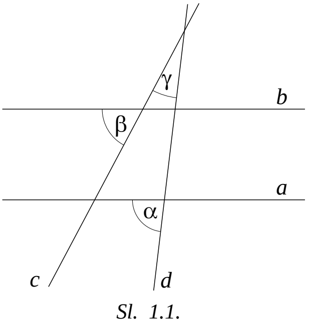
6.1. Kamion je za 3,5 sata prešao 10 kilometara više nego automobil za 2,5 sata. Odredi brzinu kamiona i brzinu automobila, ako je brzina automobila 20 kilometara veća od brzine kamiona.

6.2. Koliki kut zatvaraju velika i mala kazaljka ure u 8 sati i 19 minuta?

6.3. Napiši sve sedmeroznamenkaste brojeve pomoću znamenki 1 i 2 koji su djeljivi s 36.

6.4. Netko je potrošio $\frac{2}{7}$ svote novca koju je imao, zatim 0.7 ostatka i na kraju $\frac{7}{18}$ novog ostatka. Nakon toga ostalo mu je 60500 HRD. Koliko je HRD imao na početku?

6.5. Na slici su nacrtana četiri pravca. Pravci a i b su paralelni, a pravci c i d su dvije presječnice (transverzale). Odredi bez mjerenja veličinu kuta γ, ako je $\alpha = 83^\circ$ i $\beta = 47^\circ$.



Sl. 1.1.

7. razred

7.1. Vanjski kut na osnovici jednakokračnog trokuta odnosi se prema vanjskom kutu pri vrhu nasuprot osnovici kao $29 : 32$. Odredi unutarnje kutove tog trokuta.

7.2. Dan je jednakokračan trokut ABC, pri čemu je $|AC| = |BC|$. Okomica iz vrha A na krak $\overline{BC}$ dijeli kut $\sphericalangle BAC$ na dva kuta, tako da je razlika ta dva kuta 30°. Koliki su unutarnji kutovi trokuta ABC?

7.3. Zbroj peteroznamenkastog broja $\overline{abcde}$ i peteroznamenkastog broja $\overline{abced}$ je 31587. Koji su to brojevi?

7.4. Jedan radnik može završiti neki posao za 10 dana ako radi sam. Ako taj radnik radi zajedno s nekim drugim radnikom dva dana, tada će posao biti završen za šest dana. Za koliko bi dana cijeli posao završio drugi radnik ako radi sam?

7.5. Neka su brojevi a, b, c, d redom ostaci dijeljenja broja n s 2, 3, 5 i 11. Dokaži da je zbroj $15a + 10b + 6c + 30d - n$ djeljiv s 30.

8. razred

8.1. Duljina stranice romba $ABCD$ iznosi $a = 4$, a kut uz vrh A je 60°. Kolike su duljine dijagonala e i f tog romba?

8.2. Riješi jednadžbu:

$$3(x+4)(x+3) - (x-6)(x+1) = 24x + 54.$$

8.3. Ako je znamenka jedinica broja $n^2 + 2n$ (n je prirodni broj) jednaka 4, onda je znamenka desetica tog broja 2. Dokaži.

8.4. Iz mjesta A krenuo je autobus u mjesto B brzinom od 40 km na sat. Nakon 15 minuta vožnje autobus se susreo s automobilom koji se kretao iz mjesta B u mjesto A brzinom od 50 km na sat. Nakon susreta oba vozila su nastavila vožnju, svaki u svoje mjesto. Kada je automobil stigao u mjesto A, odmorio se 15 minuta i nastavio vožnju natrag u mjesto B, pa je tako 20 km od mjesta B sustigao autobus. Kolika je udaljenost mjesta A i mjesta B?

8.5. U trokutu ABC simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ presjeca stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Na stranici $\overline{AC}$ odabrana je točka E, tako da je $\sphericalangle EDC = \sphericalangle BAC$. Dokaži da je $|BD| = |DE|$.

Srednja škola

1. razred

1.1. Jedna zagrebačka obitelj krenut će ove godine na ljetovanje na Jadran posljednjeg dana u mjesecu. Umnožak rednog broja dana polaska i rednog broja mjeseca povratka s brojem djece u obitelji te brojem dana ljetovanja je 14384. Odredite datum povratka.

1.2. Rastavite na faktore izraz

$$(b-c)(b+c)^3+(c-a)(c+a)^3+(a-b)(a+b)^3.$$

1.3. Visina i težišnica iz vrha A trokuta ABC dijele kut α na tri jednaka dijela. Odredite kutove tog trokuta.

1.4. Riješite sustav jednadžbi

$$x_1+a_2x_2=x_2+a_3x_3=x_3+a_4x_4=x_4+a_5x_5=x_5+a_1x_1=1$$

gdje je $a_1a_2a_3a_4a_5 \neq -1$.

2. razred

2.1. Zadan je trokut ABC. Neka je B_1 točka na visini tog trokuta povučenoj iz vrha B takva da je $\sphericalangle AB_1C = 90^\circ$, a C_1 točka na visini tog trokuta povučenoj iz vrha C takva da je $\sphericalangle AC_1B = 90^\circ$. Dokažite da je $|AB_1| = |AC_1|$.

2.2. U skupu kompleksnih brojeva nađite rješenje sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned}
|z_1| = |z_2| = |z_3|\\
z_1+z_2+z_3=1\\
z_1z_2z_3=1.
\end{aligned}$$

2.3. Nađite sve parove kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu

$$(1+x+y)(1+x^2+y^2)+xy(1+xy)-x^3-y^3=0.$$

2.4. Riješite jednadžbu

$$\frac{1}{2^{2x}+3} \geqslant \frac{1}{2^{x+2}-1}.$$

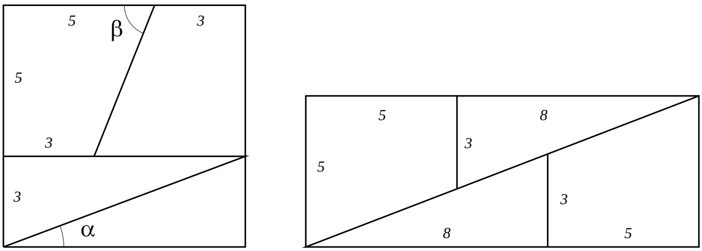
3. razred

3.1. Riješite nejednadžbu

$$\log_9^2 x \geqslant \log_3^2 \sqrt{1 - \frac{x}{4}}.$$

3.2. Tri kugle diraju se međusobno i diraju ravninu u tri dane točke. Nađite polumjere tih kugala ako su međusobne udaljenosti tih triju točaka a, b i c.

3.3. Šahovska ploča 8×8 razrezana je na četiri dijela, kao na slici lijevo, od kojih se može složiti pravokutnik 13×5, kao na slici desno. Služeći se kutovima α i β sa slike objasnite dobiveni paradoks $64 = 65$.



Sl. 1.2.

3.4. Odredite kutove jednakokračnog trokuta čiji ortocentar leži na njegovoj upisanoj kružnici.

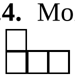
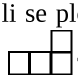
4. razred

4.1. U točkama parabole $y^2 = 12x$ s ordinatama $2, 6, -3$ povučene su tangente. Koliki je omjer površina trokuta kojeg tvore te tri točke i trokuta kojeg tvore sjecišta tangenata na parabolu u tim točkama?

4.2. Ako je $x_1 = 1$ i $x_{n+1} = \dfrac{1}{1 + x_n}$ za svaki $n \in \mathbf{N}$, dokažite da je

$$x_{1994}^2 + x_{1994} < 1.$$

4.3. Nađite sve strogo rastuće funkcije $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, takve da je $f^{-1} = f$.

4.4. Može li se ploča 8×8 bez kutnih polja prekriti s 15 pločica oblika  ili ?

Rješenja zadataka

4.1. 380 000.
4.2. 118, 181, 811, 124, 142, 214, 241, 412, 421, 222.
4.3. Nakon 8 tjedana. Ukupan broj djece je $87 + 87$, tj. 174.
4.4. Duljina osnovice je 27 mm, a duljina kraka 39 mm.
4.5. Istječe 7896 litara vode.

* * *

5.1. $x = 29$.
5.2. Traženi brojevi su: 78390, 78192, 78894, 78696, 78498.
5.3. Prvi broj je 25, drugi 35, treći 18 i četvrti 22.
5.4. Možemo napisati 25 različitih brojeva.
5.5. Opseg trokuta je 39 cm.

* * *

6.1. Brzina kamiona je 60 km na sat, a brzina automobila 80 km na sat.
6.2. Velika i mala kazaljka ure zatvaraju kut od $224,5^\circ$, odnosno $135,5^\circ$.
6.3. Traženi brojevi su: 2111112, 1211112, 1121112, 1112112, 1111212.
6.4. Osoba je na početku imala 462000 HRD.
6.5. Točkom u kojoj se sijeku pravci c i d nacrtamo pravac paralelan s pravcem a, odnosno b. Kut $\gamma = 36^\circ$.

* * *

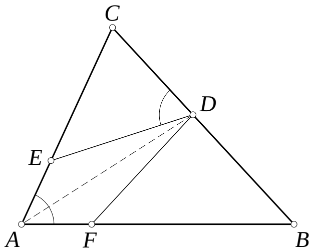
7.1. Unutarnji kutovi trokuti su: 64°, 64°, 52°.
7.2. Zadatak ima dva rješenja: 70°, 70°, 40°, odnosno 50°, 50°, 80°.
7.3. Traženi brojevi su: 15789 i 15798, ili 15798 i 15789.
7.4. Drugi radnik može sam završiti posao za pet dana.
7.5. Broj n možemo pisati u obliku $n = 2x + a$, $n = 3y + b$, $n = 5z + c$, $n = 11u + d$, pri čemu su a, b, c, d ostaci dijeljenja. Ako ostatke dijeljenja $a = n - 2x$, $b = n - 3y$, $c = n - 5z$, $d = n - 11u$ uvrstimo u zadani broj, nakon sređivanja dobivamo $15a + 10b + 6c + 30d - n = 60n - 30(x + y + z + 11u)$ iz čega je očito da je zbroj djeljiv s 30.

* * *

8.1. $f = 4$, $e = 4\sqrt{3}$.
8.2. $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.
8.3. Ako broju $n^2 + 2n$ dodamo 1, onda taj broj završava s 5. Kako je broj $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ potpuni kvadrat, to znači da broj $(n + 1)^2$ završava s 25 iz čega proizlazi da je znamenka desetica broja $n^2 + 2n$ jednaka 2.

8.4. Udaljenost mjesta A i mjesta B je 160 km.

8.5. Na stranici $\overline{AB}$ odaberemo točku F, tako da je $|AF| = |AE|$. Trokuti $\triangle AFD$ i $\triangle AED$ su sukladni pa je $|FD| = |DE|$ i $\sphericalangle AFD = \sphericalangle AED$, iz čega proizlazi da je $\sphericalangle BFD = \sphericalangle CED$. Kako trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle CED$ imaju dva kuta jednaka, to je nužno $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CED$, odnosno $\sphericalangle FBC = \sphericalangle BFD$, tj. $|FD| = |BD|$, a to znači da je $|BD| = |DE|$.



Sl. 1.3.

* * *

1.1. Rastavit ćemo broj 14384 na faktore: $14384 = 16 \cdot 899 = 16 \cdot (900 - 1) = 16 \cdot (30^2 - 1^2) = 2^4 \cdot 31 \cdot 29$

Odavde zaključujemo da je redni broj dana polaska: 31 (posljednji dan u mjesecu); redni broj mjeseca povratka: 8 (može biti jedino 8. mjesec); broj djece: 2; broj dana ljetovanja: 29.

Dakle, obitelj se vraća 28. 8.

1.2. Transformirajmo izraz na sljedeći način

$$
\begin{aligned}
&(b-c)(b+c)^3 + (c-a)(c+a)^3 + (a-b)(a+b)^3 \\
&\quad = (b^2-c^2)(b+c)^2 + (c^2-a^2)(c+a)^2 + (a^2-b^2)(a+b)^2 \\
&\quad = b^4 + 2b^3c - 2bc^3 - c^4 + c^4 + 2c^3a - 2ca^3 \\
&\qquad\qquad - a^4 + a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4 \\
&\quad = 2[bc(b^2-c^2) + a(c^3-b^3) + a^3(b-c)] \\
&\quad = 2(b-c)[bc(b+c) - a(c^2+cb+b^2) + a^3] \\
&\quad = 2(b-c)[b^2c + bc^2 - ac^2 - abc - ab^2 + a^3] \\
&\quad = 2(b-c)[bc(b-a) + c^2(b-a) + a(a^2-b^2)] \\
&\quad = 2(b-c)(a-b)[a(a+b) - bc - c^2] \\
&\quad = 2(b-c)(a-b)[a^2 - c^2 + b(a-c)] \\
&\quad = 2(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)
\end{aligned}
$$

Možda je korisno spomenuti sljedeće: Ako za neki polinom triju varijabli $P(a,b,c)$ vrijedi $P(a,a,c) \equiv 0$ (drugim riječima, ako je identički jednak nuli kad uvrstimo u njegov izraz $b = a$, tada je on djeljiv s $(a-b)$.

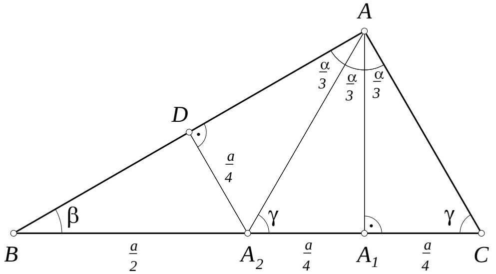
Naš je izraz upravo polinom po tri varijable a,b,c koji se poništava kad stavimo $b = a$, $c = b$ ili pak $c = a$. To znači da je on djeljiv sa svakim od triju faktora $(a-b)$, $(a-c)$, $(b-c)$. Ta informacja može biti vrlo korisna pri odluci kako grupirati članove izraza. Grupiranje koje je izvršeno u gornjemu rješenju osniva se upravo na ovim informacijama.

1.3. Neka je A_1 nožište visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$ i $\overline{AA_2}$ težišnica iz vrha A. Tada je $d(A_1,A_2) = d(A_1,C)$ i $\sphericalangle AA_2A_1 = \gamma$.

Iz A_2 povucimo okomicu A_2D na $\overline{AB}$. Tada je $\triangle AA_2D \cong \triangle AA_2A_1$.

U trokutu $\triangle BA_2D$ je $d(B,A_2) = \dfrac{a}{2}$, $d(D,A_2) = \dfrac{a}{4}$ i $\sphericalangle A_2DB = 90^\circ$. Odavde slijedi $\beta = 30^\circ$.

Iz $\triangle AA_1C$ imamo $\gamma = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{3}$, a iz $\triangle ABA_2$, $\gamma = \dfrac{\alpha}{3} + \beta$. Odavde se dobiva $\alpha = 90^\circ$ i $\gamma = 60^\circ$.



Sl. 1.4.

1.4. Jednadžbe možemo napisati u obliku

$$x_1 + a_2x_2 = 1$$
$$x_2 + a_3x_3 = 1$$
$$x_3 + a_4x_4 = 1$$
$$x_4 + a_5x_5 = 1$$
$$x_5 + a_1x_1 = 1$$

Pomnožimo li sve jednadžbe redom sa 1, $-a_2$, a_2a_3, $-a_2a_3a_4$, $a_2a_3a_4a_5$ i zbrojimo, dobivamo jednadžbu

$$x_1(1 + a_1a_2a_3a_4a_5) = 1 - a_2 + a_2a_3 - a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5$$

Zbog $a_1a_2a_3a_4a_5 + 1 \neq 0$ imamo

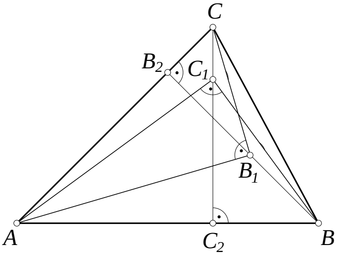
$$x_1 = \frac{1 - a_2 + a_2a_3 - a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5}{1 + a_1a_2a_3a_4a_5}$$

i dalje ciklički

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1 - a_3 + a_3a_4 - a_3a_4a_5 + a_3a_4a_5a_1}{1 + a_1a_2a_3a_4a_5},\\
x_3 &= \frac{1 - a_4 + a_4a_5 - a_4a_5a_1 + a_4a_5a_1a_2}{1 + a_1a_2a_3a_4a_5},\\
x_4 &= \frac{1 - a_5 + a_5a_1 - a_5a_1a_2 + a_5a_1a_2a_3}{1 + a_1a_2a_3a_4a_5},\\
x_5 &= \frac{1 - a_1 + a_1a_2 - a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3a_4}{1 + a_1a_2a_3a_4a_5}.
\end{aligned}$$

* * *

2.1. Neka su B_2 i C_2 nožišta visina povučenih iz B i C.



Sl. 1.5.

Iz sličnosti trokuta AB_1C i AB_2B_1 slijedi $\dfrac{|AB_1|}{|AC|} = \dfrac{|AB_2|}{|AB_1|}$; iz sličnosti trokuta ABB_2 i ACC_2 slijedi $\dfrac{|AB_2|}{|AB|} = \dfrac{|AC_2|}{|AC|}$; i napokon iz sličnosti trokuta AC_1B i AC_2C_1 dobiva se $\dfrac{|AC_1|}{|AB|} = \dfrac{|AC_2|}{AC_1|}$.

Iz ove tri jednakosti slijedi

$$|AB_1|^2 = |AB_2| \cdot |AC| = |AC_2| \cdot |AB| = |AC_1|^2$$

tj. $|AB_1| = |AC_1|$.

2.2. Neka su z_1, z_2, z_3 rješenja tog sustava. Promatrajmo polinom

$$\begin{aligned}
P(z) &= (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)\\
&= z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)z - z_1z_2z_3.
\end{aligned}$$

Zbog drugog i trećeg uvjeta je

$$P(z) = z^3 - z^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)z - 1.$$

Ako je z kompleksan broj modula 1, $|z| = 1$, tada vrijedi $z \cdot \overline{z} = 1$ te je $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$. Zato, korištenjem svih triju uvjeta dobivamo

$$\begin{aligned} 1 &= \overline{z_1 + z_2 + z_3} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \\ &= \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3}{z_1 z_2 z_3} = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 \end{aligned}$$

pa je $P(z) = z^3 - z^2 + z - 1$.

Kompleksni brojevi z_1, z_2 i z_3 korijeni su ovog polinoma. Jedan među njima, recimo z_1 iznosi 1. To znači da je polinom djeljiv sa $z - 1$; zaista, $P(z) = (z-1)(z^2+1)$. Stoga su druge dvije nul-točke $z_2 = i$, te $z_3 = -i$.

2.3. Nakon množenja dobivamo

$$1+x+y+x^2+x^3+yx^2+y^2+xy^2+y^3+xy+x^2y^2-x^3-y^3 = 0,$$

a nakon sređivanja

$$1 + x + x^2 + y + xy + x^2y + y^2 + xy^2 + x^2y^2 = 0$$

tj.

$$(1 + x + x^2)(1 + y + y^2) = 0.$$

Rješenja jednadžbe $x^2 + x + 1 = 0$ su

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{i} \qquad x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Rješenja polazne jednadžbe su

$$\begin{aligned} &\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, y\right), \quad \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, y\right), \quad y \in \mathbf{C}, \quad \text{te} \\ &\left(x, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(x, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right), \quad x \in \mathbf{C}, \end{aligned}$$

za proizvoljne kompleksne brojeve x i y.

2.4. Lijeva strana nejednadžbe definirana je i pozitivna za svaki realan broj x, a desna je definirana za svaki broj $x \neq -2$, pri čemu može biti i negativna.

(a) Desna je strana negativna ako je $2^{x+2} < 1$, tj. za $x < -2$. U tom slučaju nejednakost vrijedi.

(b) Ako je $x > -2$, onda je nejednadžba ekvivalentna sa

$$2^{2x} + 3 \leqslant 2^{x+2} - 1 \qquad \text{tj.} \qquad 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 4 \leqslant 0.$$

Uz supstituciju $2^x = t$ ona poprima oblik $t^2 - 4t + 4 \leqslant 0$ tj. $(t-2)^2 \leqslant 0$ čije je rješenje samo $t = 2$ tj. $x = 1$.

Konačno, rješenje polazne jednadžbe je $x \in (-\infty, -2) \cup \{1\}$.

* * *

3.1. Nejednadžba ima smisla za $x > 0$ i $1 - \frac{x}{4} > 0$, tj. za $x \in (0, 4)$.
Uz ovaj uvjet je

$$\begin{aligned}
\log_9^2 x - \log_3^2 \sqrt{1 - \frac{x}{4}} &= \frac{1}{4}\log_3^2 x - \frac{1}{4}\log_3^2\left(1 - \frac{x}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[\log_3 x - \log_3\left(1 - \frac{x}{4}\right)\right] \cdot \left[\log_3 x + \log_3\left(1 - \frac{x}{4}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\log_3 \frac{4x}{4-x} \log_3 \frac{x(4-x)}{4}.
\end{aligned}$$

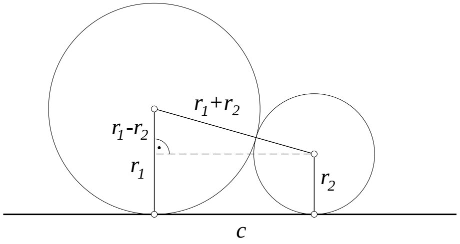
Dakle, nejednadžba je ekvivalentna s:

$$\log_3 \frac{4x}{4-x} \log_3 \frac{x(4-x)}{4} \geqslant 0.$$

Sada imamo dvije mogućnosti:
1) $\frac{4x}{4-x} \geqslant 1$ i $\frac{x(4-x)}{4} \geqslant 1 \iff x \geqslant \frac{4}{5}$ i $(x-2)^2 \leqslant 0 \iff x = 2$.
2) $\frac{4x}{4-x} \leqslant 1$ i $\frac{x(4-x)}{4} \leqslant 1 \iff x \leqslant \frac{4}{5}$ i $(x-2)^2 \geqslant 0 \iff x \in (-\infty, \frac{4}{5}]$.
Iz 1) i 2) i uvjeta $x > 0$ slijedi da je rješenje skup $(0, \frac{4}{5}] \cup \{2\}$.

3.2. Iz pravokutnoga trokuta na slici slijedi

$$c^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2 \qquad (*)$$



Sl. 1.6.

Analogno je

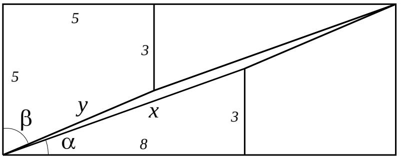
$$\begin{aligned}
a^2 &= (r_2 + r_3)^2 - (r_2 - r_3)^2 = 4r_2r_3, \\
b^2 &= (r_1 + r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2 = 4r_1r_3.
\end{aligned}$$

Množenjem ove tri relacije dobivamo $a^2b^2c^2 = 64r_1^2r_2^2r_3^2$, odnosno

$$abc = 8r_1r_2r_3. \qquad (**)$$

Dijeljenjem $(**)$ s $(*)$ dobivamo $r_3 = \frac{ab}{2c}$ i analogno $r_1 = \frac{bc}{2a}$, $r_2 = \frac{ac}{2b}$.

3.3. Na slici **??** između četiri dijela nalazi se jedan uski paralelogram.



Sl. 1.7.

Stranice tog paralelograma su

$$x = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73},$$
$$y = \sqrt{5^2 + (5-3)^2} = \sqrt{29},$$

a kut između tih stranica je $90^\circ - \alpha - \beta$.

Prema tome, površina tog paralelograma jednaka je

$$\begin{aligned} P &= xy\sin(90^\circ - \alpha - \beta) \\ &= \sqrt{73}\cdot\sqrt{29}(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta). \end{aligned}$$

Sada imamo:

$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{73}}, \quad \cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{73}},$$
$$\sin\beta = \frac{5}{\sqrt{29}}, \quad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{29}},$$

pa je

$$P = \sqrt{73}\cdot\sqrt{29}\cdot\frac{1}{\sqrt{73}\cdot\sqrt{29}}(8\cdot 2 - 3\cdot 5) = 1.$$

3.4. Sa slike **??** vidimo

$$\varepsilon = \sphericalangle CHB = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - (180^\circ - 2\beta) = 2\beta.$$

Iz trokuta HDC imamo

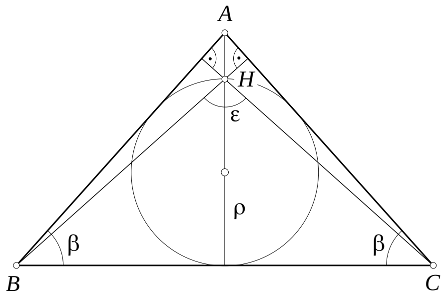
$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{a}{2}}{2\rho} = \frac{as}{4P} = \frac{a\cdot\frac{a+2b}{2}}{4\cdot\frac{av}{2}} = \frac{a+2b}{4v},$$

pri čemu je a osnovica zadanog trokuta ABC, b je krak, v visina. Dalje slijedi

$$4v\cdot\operatorname{tg}\beta = a + 2b,$$

i odavde

$$4\cdot\frac{a}{2}\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\beta = a + 2\cdot\frac{a}{2\cos\beta}$$



Sl. 1.8.

Nakon dijeljenja s a i sređivanja dobivamo

$$\frac{2\sin^2\beta}{\cos^2\beta}=\frac{\cos\beta+1}{\cos\beta} \implies 3\cos^2\beta+\cos\beta-2=0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su: $\cos\beta=-1$ i $\cos\beta=\frac{2}{3}$. Prvo ne zadovoljava, pa ostaje $\beta=\arccos\frac{2}{3}\approx 48^\circ 11'$, $\alpha\approx 83^\circ 38'$.

* * *

4.1. Koordinate točaka prvog trokuta su $A(\frac{1}{3},2)$, $B(3,6)$, $C(\frac{3}{4},-3)$. Jednadžbe tangenata na parabolu u točkama A, B, C su:

$$t_A \ldots y=3x+1,$$
$$t_B \ldots y=x+3,$$
$$t_C \ldots y=-2x-\tfrac{3}{2}.$$

Presjeci tangenata su

$$t_A\cap t_B=T_1(1,4),$$
$$t_A\cap t_C=T_2(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}),$$
$$t_B\cap t_C=T_3(-\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}).$$

Površina trokuta ABC je

$$P_1=\tfrac{1}{2}|\tfrac{1}{3}(6+3)+3(-3-2)+\tfrac{3}{4}(2-6)|=\tfrac{15}{2}.$$

Površina trokuta $T_1T_2T_3$ je

$$P_2=\tfrac{1}{2}|1\cdot(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{2})-\tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{2}-4)-\tfrac{3}{2}(4+\tfrac{1}{2})|=\tfrac{15}{4}.$$

Traženi omjer površina je $\dfrac{P_1}{P_2}=2$.

4.2. *Prvo rješenje.*

Dokažimo metodom matematičke indukcije da vrijedi $x_{2n}^2+x_{2n}<1$ za svaki prirodni broj n.

Za $n = 1$ je $x_2 = \frac{1}{2}$ i zato $x_2^2 + x_2 = \frac{3}{4} < 1$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj k. Tada je

$$x_{2(k+1)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + x_{2k}}} = \frac{x_{2k} + 1}{x_{2k} + 2}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} x_{2(k+1)}^2 + x_{2(k+1)} &= x_{2(k+1)}(x_{2(k+1)} + 1) \\ &= \frac{x_{2k}+1}{x_{2k}+2} \cdot \frac{2x_{2k}+3}{x_{2k}+2} = \frac{2x_{2k}^2 + 5x_{2k} + 3}{(x_{2k}+2)^2} \\ &= 1 + \frac{x_{2k}^2 + x_{2k} - 1}{(x_{2k}+2)^2}. \end{aligned}$$

Kako je po pretpostavci indukcije $x_{2k}^2 + x_{2k} - 1 < 0$, to je i $x_{2k+2}^2 + x_{2k+2} < 1$. Time je tvrdnja dokazana za svaki prirodan broj n, pa stoga vrijedi i za $n = 997$.

Drugo rješenje.

Dokazat ćemo da za svaki prirodan broj n vrijedi $x_{2n} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ i $x_{2n-1} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Označimo sa $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ funkciju na skupu realnih brojeva.

(i) Ako je $x < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ tada je $f(x) > \dfrac{1}{1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(ii) Ako je $x > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ tada je $f(x) < \dfrac{1}{1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Kako vrijedi $a_{n+1} = f(a_n)$, to zaključujemo da su članovi niza naizmjence veći odnosno manji od $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Za $n = 1$ je $x_1 = 1 > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, to slijedi $x_2 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Dakle, neparni su članovi veći, a parni manji od $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Iz $x_{2n} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ slijedi

$$x_{2n}^2 + x_{2n} < \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 1.$$

Zato tvrdnja vrijedi za svaki n, pa specijalno vrijedi i za $n = 997$.

4.3. Funkcija f strogo je rastuća pa za svaki x_1, x_2 vrijedi $f(x_1) < f(x_2)$.

Označimo $y = f(x)$. Tada je zbog uvjeta u zadatku $x = f(y)$.

(i) Za $x < y$ je $f(x) < f(y)$, pa slijedi da je $y < x$, što je kontradikcija.

(ii) Analogno, za $x > y$ je $f(x) > f(y)$, odnosno $y > x$ što je opet kontradikcija.

Dakle, jedino moguće je da bude $x = y$, odnosno $f(x) = x$. Budući da je x bio proizvoljan, to je jedina funkcija s traženim svojstvima $f(x) = x$ za svaki realan broj x.

4.4. Podijelit ćemo sva polja ploče na dva disjunktna skupa. Obojimo redove 1, 3, 5, 7 crvenom, a redove 2, 4, 6, 8 plavom bojom.

Pločica postavljena na ploču može prekrivati ili 3 crvena i 1 plavo polje, ili 3 plava i 1 crveno polje.

Označimo sa x broj pločica koje prekrivaju 3 crvena i 1 plavo polje. Tada $(15 - x)$ pločica prekriva 1 crveno i 3 plava polja. Ukupan broj crvenih polja je 30 (dva rubna crvene boje su izbačena). Da bi prekrivanje bilo moguće, mora vrijediti $3x + (15 - x) = 30$ odakle $x = \frac{15}{2}$. Zato traženo prekrivanje nije moguće.