ELEMENTARNA MATEMATIKA 5

PERIODIČKE FUNKCIJE

P. VRANJKOVIĆ – N. ELEZOVIĆ

CIP – Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i sveučilišna biblioteka, Zagreb

UDK 372.851 (075.3)(079)

VRANJKOVIĆ Petar Periodičke funkcije / Petar Vranjković, Neven Elezović. – Zagreb : Element, 1996. – 92 str. : ilustr. ; 21 cm. – (Elementarna matematika ; 5)

ISBN 953-6098-40-7

1. Elezović, Neven

960312017

ISBN 953-6098-40-7

Petar Vranjković
Neven Elezović

PERIODIČKE FUNKCIJE

Zagreb, 1996.

Glavni urednik
Prof. dr. sc. Neven Elezović

Nakladnik
ELEMENT, Zagreb

Za nakladnika
Sandra Gračan, dipl. inž.

Crteži, slog i prijelom
ELEMENT, Zagreb

Tisak
SPIRIDION BRUSINA, Donja Lomnica

Naklada: 500 primjeraka

PREDGOVOR

Čitatelj smije preskočiti ovaj predgovor, prolistati preostale stranice i ocijeniti sadržaj. Oni koje zanima naše mišljenje i motivacija mogu nastaviti čitati.

Matematički znalci će reći da je tema vrlo 'uska' — što se to zaboga o periodičkim funkcijama dade napisati?! I autori su toga svijesni, stoga ne očekujte previše. Naše su namjere vrlo skromne. Ipak, tema nam se učinila višestruko zanimljivom i korisnom, temom koja zaslužuje određenu pozornost. Razlog je tome svakako što je fenomen periodičnosti vrlo prisutan i važan u svakodnevnome životu. On nam pruža idealnu priliku da učenik proširi svoje znanje i poimanje o *funkcijama*, tim svakako (uz broj) temeljnim pojmom matematike. Ovakva se područja ne stignu obraditi na satovima redovite nastave u srednjoj školi, dok se gotovo pretpostavljaju kao poznata u svakom kursu matematičke analize (ili više matematike) već u prvim godinama studija. Mnogi slični problemi i zadaci pojavljuju se i na raznim natjecanjima iz matematike. Metode njihovog rješavanja gotovo su nepoznate mladim matematičarima.

Ovaj je materijal namijenjen ponajprije njima, kao knjižica laganoga štiva za dodatnu nastavu. Sigurno će biti od koristi svakom budućem studentu prirodoslovnog ili tehničkih fakulteta, no njime želimo zainteresirati i sve ljubitelje matematike.

Nekoliko riječi o sadržaju.

Nakon uvoda daje se definicija periodičke funkcije i neka pojašnjenja s time u svezi, zatim primjeri periodičkih funkcija te se razmatraju neka značajna svojstva tih funkcija. Izložen je bogat niz raznovrsnih i nadamo se zanimljivih zadataka, s detaljnim rješenjima (ponegdje i na više načina). Ovakav 'model': (zadatak – rješenje) naravno, ima i dobrih i loših strana. Loše se mogu jednostavno izbjeći samo ako to čitatelj hoće. . . Naime, zadatak valja pokušati i nastojati riješiti samostalno, a tek nakon više neuspjelih pokušaja (kojih će vremenom biti sve manje!) treba pogledati postupak rješavanja — ne samo rezultat! Za one koji ipak ne mogu odoliti napasti prebrzoga čitanja rješenja, ostavljen je popriličan broj sličnih zadataka za samostalnu vježbu.

Svakako valja ukazati na činjenicu da mnogi učenici pojam periodičnosti isključivo vežu za trigonometrijske funkcije. Čak postoji uvriježeno mišljenje da se svaki izraz s trigonometrijskim funkcijama mora definirati periodičku funkciju. Cilj je, između ostaloga, ovom knjižicom ukloniti te zablude. Stoga su navedene mnoge nestandardne funkcije koje posjeduju svojstvo periodičnosti, kao i neke druge s njima blisko vezane.

Nakon svega, gotovo uvijek ostaju i — pogreške. Nadamo se samo da su rijetke, s dugim periodom ponavljanja. Nemamo ih kome pripisati, osim možda jedan drugome. Svima koji nam ukažu na njih, a dakako i onima koji iznesu svoje primjedbe i prijedloge, bit ćemo zahvalni.

Autori

U Zagrebu i Zadru, ožujka 1996.

SADRŽAJ

Uvod

Zašto periodičnost?!

Periodičke pojave i procesi, kako u našem svakodnevnom životu, tako i u prirodi, tako su česti i obični da ih vrlo često podrazumijevamo i možda zbog toga ne zapažamo kao neobične. U krajnjem slučaju može doći i do nezgode koja će nas podsjetiti na monotoniju periodičnosti kojom se podvrgavaju naši životi. Recimo, upravo onako kao što se dogodilo izvjesnom Englezu koji se zarezao pri brijanju jednoga jutra, samo zato što nije mogao otrpjeti iznenadnu spoznaju da je brijanje periodička funkcija vremena koja se istom monotonijom ponavlja svakog dana.

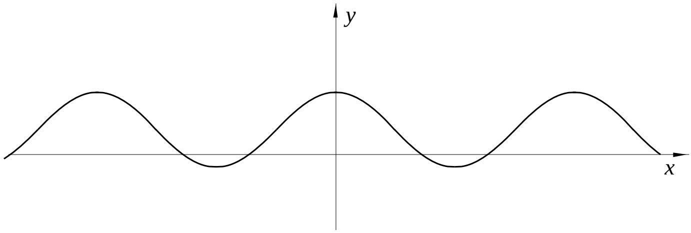
I doista, u približno jednakim vremenskim intervalima mi ponovno radimo iste stvari na približno jednak način. I naše disanje i otkucaji srca periodičke su naravi. Kao i čovjek, tako i priroda robuje periodičnosti. Dan i noć, godišnja doba, položaji planeta, plima i oseka, vrtnja Zemlje oko Sunca, kao i oko svoje osi, svi oni, a i drugi, periodičkog su karaktera. Kod nekih pojava periodičnost je strogo definirana i jednostavno se može uočiti. Kod drugih pak, može se zamijetiti nakon dugo vremena, kao složena pojava, pa se i ne može lako raspoznati (Sunčeve pjege).

Primjene matematike zahtijevale su stvaranje velikog broja specijalnih funkcija od kojih su najjednostavnije trigonometrijske funkcije. Međutim ideja koja leži u temelju njihova značajnog svojstva — periodičnosti — zapravo je tako jednostavna da se ovdje može opisati njezin glavni dio.

Promatrajmo neku periodičku pojavu; npr. prolazak velike kazaljke sata preko oznake $8\,h$. To se događa u točno određenim intervalima od jednoga sata. Prema tome možemo kazati da je položaj velike kazaljke periodička funkcija vremena čiji je period jedan sat. Ovo što smo opisali, može se izraziti i algebarski, ali i o tome kasnije.

Mnoge periodičke pojave prisutne su u znanosti. Valovi i titranja, koji igraju značajnu ulogu u fizici i tehnici, primjeri su takvih pojava. Zato se periodičke funkcije temeljito ispituju već više od 200 godina. Naglasimo i to da su za periodičke pojave i procese trigonometrijske funkcije sinus i kosinus — prirodna abeceda.

Za matematičara val je zgodan izraz za opisivanje periodičnosti nekih funkcija. Ako se neka od tih funkcija prikaže grafički, onda je periodičnost očigledna (sl. 1.)



Sl. 1.

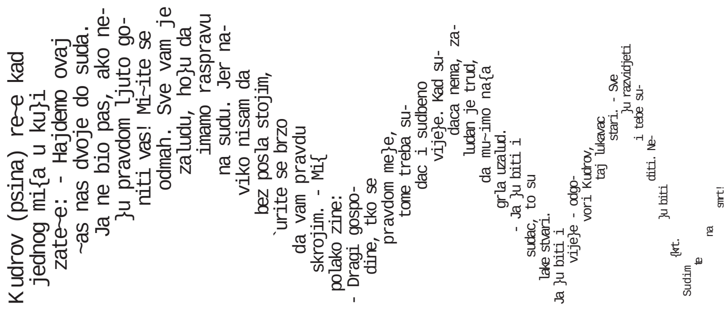
Da se uvjerimo kako graf koji izgleda ‘valovito’ ne predstavlja obavezno val u smislu vala na vodi ili u nekom drugom sredstvu, promotrimo kardiogram. To je električno registriran graf otkucaja srca, a u registracijama posebnih uzbuđenja bilo kakve naravi taj graf izgleda kao presjek stvarno vrlo valovitog mora. Međutim, otkucaji srca nemaju ničega s ‘valovima’ u običnom smislu. Naime, kardiogram zapravo pretstavlja periodičke fluktuacije energije otkucaja srca.

Kao što vidimo, spomenute pojave i procesi su oko nas i u nama, i trebalo je s njima pozabaviti se. Za njihovo teorijsko opisivanje i proučavanje služi nam pojam periodičke funkcije. Taj je pojam značajan, kako za matematiku tako i za druge znanosti.

Možda je zanimljivo da se dio matematike, koji otkriva periodičnost i analizira ih kada je to moguće, zove — harmonijska analiza, zbog svog podrijetla u teoriji zvuka i titrajućih žica. Glazbena nota sastavljena je od svoje temeljne i uzastopnih ‘harmonija’ koji noti daju njenu karakterističnu ‘kvalitetu’. Nadalje, radio-valovi se, kao što znate, upotrebljavaju za prijenos zvukova ljudskih glasova i glazbenih instrumenata. Tako se npr. često glazbeni ton prikazuje sinusoidom.

Ima i drugih valnih pojava koje su isto tako obične kao i već opisani strogo periodički valovi. To su prigušena harmonijska titranja. Amplituda tih titranja nije konstanta kao u slučaju harmonijskog gibanja, već je funkcija vremena koja teži nuli kada vrijeme biva sve veće (teži u beskonačnost); drugim riječima, amplituda postupno opada.

Jedan takav primjer nalazimo u knjizi *Alica u zemlji čudesa* (vjerojatno znate da je njen autor, L. Carrol bio profesor matematike u Oxfordu). U trećem doživljaju pod naslovom *Kaukus trka i druga mišja priča*, Miševa priča je prikazana na jednoj valovitoj krivulji mišjeg repa (sl. 2.).



Sl. 2.

Ali autor se sigurno našalio; budući da je miš plivao u lokvi suza, titraji repa morali bi biti još više prigušeni.

Nadalje, ovdje se može spomenuti još jedna zanimljiva pojava koja se zove rezonancija. To je harmonijsko gibanje ali s naglim rastom amplitude titranja pod djelovanjem čak i vrlo malih vanjskih sila.

Rezonancija ima veliku ulogu u fizici i tehnici. Tako npr. neka građevina ima svoj određeni period titranja koji ovisi samo od svojstva tijela. Ako pak, neka vanjska periodička sila izvede tijelo iz stanja ravnoteže a njen period titranja je približno jednak vlastitom periodu tijela (ili se podudaraju), onda utjecaj te sile, pa čak i kad je mala, može biti vrlo velik tako da se tijelo može i raspasti.

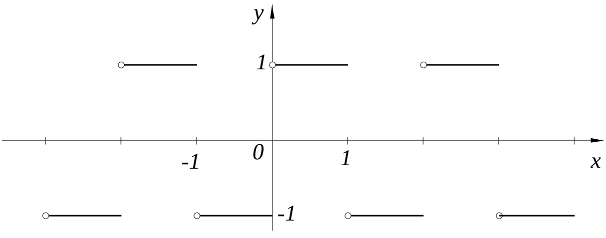
Zato se pri projektiranju građevina, mostova i sl. uzima u obzir čvrstoća tih tijela vezana s pojavom rezonancije. Poznato je da neznatno njihanje elastičnog tijela može izazivati njegov lom. To se objašnjava rezonancijom. Zato vojska preko mosta ne maršira nego ide ‘slobodno’.

Pojava rezonancije kod nekih strojeva može izazvati lom dijelova, što je ranije bio čest slučaj kod pumpa u bušotinama za dobivanje nafte. Zato je zadaća konstruktora da iz krivulja periodičkih sila harmonijskom analizom pronađu kritičnu frekvenciju, te usklade broj okretaja tako da u postrojenju nikako ne dođe do rezonancije.

Periodičke funkcije analiziraju se u dijelu matematičke analize nazvane teorija Fourierovih[1] redova. Ta teorija je nezaobilazna u mnogim fizikalnim teorijama (toplina, svjetlost, zvuk, elektricitet,. . .) Bez obzira što na ovome mjestu, dakako, ne možemo navesti detalje vezane za točan prikaz famoznog Fourierovog teorema, ipak ćemo kazati nekoliko riječi. Uz određena ograničenja radi se o sljedećem: bilo koja 'dobra' periodička funkcija može se prikazati kao zbroj dovoljnog broja periodičkih funkcija oblika a_0 (konstantne funkcije), $a_n \sin nx$ te $b_n \cos nx$, $n \in \mathbf{N}$.

Brojevi $a_0, a_n, b_n \in \mathbf{R}$ ovise o promatranim periodičkim funkcijama, i imaju se izračunati kada je dana jednadžba (formula) same funkcije. Tako npr. na sl. 3. dan je graf koji se opisuje činjenicom da pripada periodičkoj funkciji s s periodom 2 i da vrijedi

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } 0 < x \leqslant 1, \\ -1, & \text{za } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$



Sl. 3.

Fourier u fizici kaže otprilike ovo: bilo koji periodički poremećaj može se razložiti u u zbroj jednostavnih harmonijskih poremećaja koji se prikazuju valovitim sinusnim i kosinusnim krivuljama. Ako pogledate graf na slici 3, možete li povjerovati da se on može razložiti u neprekidne valovite krivulje? A ipak je tako.

I dok smo kod Fouriera, još samo ovo. Kod primjena često je jedna komponenta veća i značajnija fizički od ostalih; njoj odgovara 'temeljni' periodički poremećaj. U prvoj aproksimaciji treba razmatrati samo tu komponentu, jer druge koja se pribrajaju su prema njoj od manje važnosti.

Tako se, unutar utvrđenih granica točnosti, ako znamo osnovnu, može predvidjeti ponavljanje pojava koju ispitujemo, npr. periodičnost Sunčevih pjega.

I na kraju možda valja spomenuti pojam 'gotovo periodičke' funkcije. Ovo je osobito značajan pojam u nekim fizikalnim primjenama. Spomenut

[1] J. B. Fourier, francuski matematičar

ćemo samo toliko: ‘Gotovo periodička’ funkcija $f(x)$ zadovoljava sljedeći uvjet: za svaki po volji mali, broj $\varepsilon > 0$ postoji broj $T \neq 0$ (zovemo ga ‘gotovo period’) takav da za proizvoljni x vrijedi

$$|f(x+T) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

tj. vrijednost $f(x+T)$ jednaka je $f(x)$ s točnošću do ε.

Pojednostavljeno govoreći, to se objašnjava time što iracionalni broj možemo po volji velikom točnošću aproksimirati racionalnim brojem. Recimo još, da što je ε manji tim bolji je ‘gotovo period’ T. Primjer takve pojave je odnos zemaljske prema sunčevoj godini.

1.

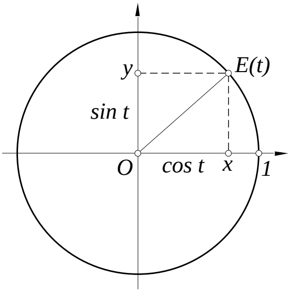
Sinusoida

Periodičnost realnih funkcija. Mnoge fizikalne pojave odlikuju se svojstvom periodičnosti. Tako na primjer svaka 24 sata pravilno se izmjenjuju dan i noć, nakon svake (sunčane) godine Zemlja će se naći na jednakoj udaljenosti od Sunca, nakon svake dvije sekunde klatno sata nalazi se u istome položaju, baš kao i minutna kazaljka po isteku jednoga sata.

Svakako da se periodičnost javlja i u mnogobrojnim drugim situacijama. Stoga je proučavanje periodičnih funkcija važno područje matematičke analize.

Sinus i kosinus funkcija. Najvažniji primjeri periodičnih funkcija trigonometrijske su funkcije.

Neka je $E(t)$ položaj točke na jediničnoj kružnici, kojoj odgovara kut od t radijana (sl **??**).

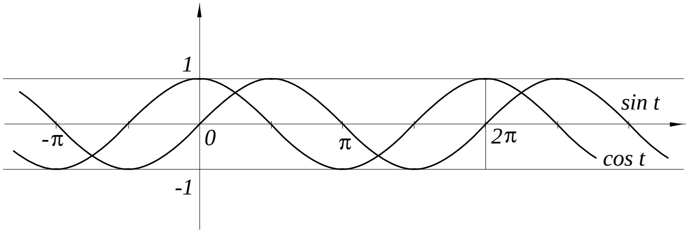


Sl. 1.1. Definicija sinus i kosinus funkcije

Koordinate x i y te točke mijenjaju se s promjenom kuta t. Ovisnost tih koordinata o kutu opisana je **sinus** i **kosinus** funkcijom, jer vrijedi

$$x = \cos t,$$
$$y = \sin t.$$

Predočimo li tu ovisnost u sustavu u kojemu na jednu os nanosimo vrijeme t, dobit ćemo grafove dane na slici **??**.



Sl. 1.2. Graf sinus i kosinus funkcije

Vidimo da ti grafovi imaju svojstvo ponavljanja, graf funkcije na intervalu $[0, 2\pi]$ identičan je onom na intervalu $[2\pi, 4\pi]$ ili pak na intervalu $[-2\pi, 0]$ i sl. Ta je činjenica posljedica toga što za položaj točke na jediničnoj kružnici vrijedi $E(t) = E(t + 2\pi) = E(t + 4\pi) = E(t - 2\pi)$ i sl. Zapišemo li to svojstvo formulom, dobiti ćemo

$$\sin(t + 2\pi) = \sin t,$$
$$\cos(t + 2\pi) = \cos t.$$

Kažemo da su sinus i kosinus **periodičke** funkcije s periodom $T = 2\pi$.

* * *

Zbog svojstva periodičnosti, vrijednost funkcije sinus i kosinus dovoljno je poznavati unutar intervala $[0, 2\pi]$. Ako je x proizvoljan realni broj, tada se vrijednost funkcija u točki x računa formulom

$$\sin x = \sin(x - 2k\pi),$$
$$\cos x = \cos(x - 2k\pi),$$

gdje je k takav cijeli broj da za argument vrijedi $0 \leqslant x - 2k\pi < 2\pi$. Takav k uvijek postoji, dobivamo ga dijeljenjem broja x s 2π.

Primjer 1.1. Izračunajmo vrijednost trigonometrijskih funkcija u nekim točkama (argumenti su zadani u radijanima!):

$$\begin{aligned}
&\sin 21\pi = \sin(21\pi - 20\pi) = \sin\pi = 0,\\
&\sin\Big(-\frac{41\pi}{3}\Big) = \sin\Big(-\frac{41\pi}{3} + 14\pi\Big) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\\
&\cos\Big(-\frac{\pi}{3}\Big) = \cos\Big(-\frac{\pi}{3} + 2\pi) = \cos\Big(\frac{5\pi}{3}\Big) = \frac{1}{2},\\
&\cos(30) = \cos(30 - 8\pi) = \cos(4.867) = 0.154,\\
&\sin(60) = \sin(60 - 18\pi) = \sin(3.451) = -0.305.
\end{aligned}$$

Korištenjem dodatnih svojstava trigonometrijskih funkcija, moguće je njihovo računanje svesti na interval $[0, \frac{\pi}{2}]$. Naime, vrijedi

$$\sin(t + \pi) = -\sin t, \tag{1.1}$$

$$\cos(t + \pi) = -\cos t, \tag{1.2}$$

$$\cos\Big(t + \frac{\pi}{2}\Big) = -\sin t, \tag{1.3}$$

$$\sin\Big(t + \frac{\pi}{2}\Big) = \cos t. \tag{1.4}$$

* * *

Ove formule danas gube na svojoj važnosti, vrijednosti trigonometrijskih funkcija za neki konkretni broj t najčešće nalazimo pritiskom na tipku računala. Ipak, ugodno je znati da u tome trenutku sklop u računalu, prije no što započne računanje same funkcije, svodi taj broj na interval $[0, \frac{\pi}{2}]$, koristeći pri tom gornje formule.

* * *

Uz gore navedena, koristimo često i sljedeća dva svojstva:

$$\sin(-t) = -\sin t, \tag{1.5}$$

$$\cos(-t) = \cos t. \tag{1.6}$$

Kažemo da je funkcija sinus **neparna**, a funkcija kosinus **parna** funkcija (vidi § 3).

Sve gore navedene formule dadu se izvesti iz dviju osnovnih, koje nazivamo **adicijski teoremi** za trigonometrijske funkcije:

$$\sin(t + s) = \sin t\cos s + \cos t\sin s, \tag{1.7}$$

$$\cos(t + s) = \cos t\cos s - \sin t\sin s. \tag{1.8}$$

U tu je svrhu dovoljno poznavati sljedeće karakteristične vrijednosti za sinus i kosinus:

$$\begin{aligned} \sin 0 &= 0, & \cos 0 &= 1, \\ \sin\frac{\pi}{2} &= 1, & \cos\frac{\pi}{2} &= 0, \\ \sin\pi &= 0, & \cos\pi &= -1. \end{aligned}$$

* * *

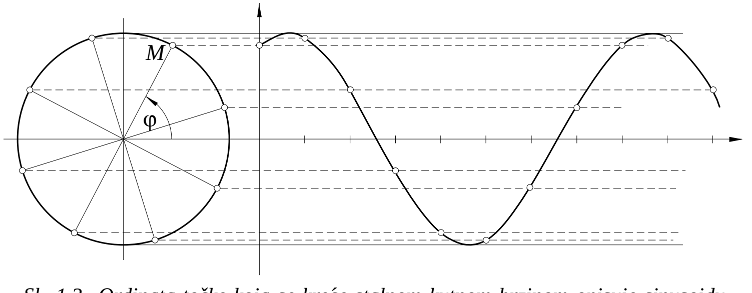
Formula (1.3) kazuje da se kosinus funkcija dade svesti na sinus funkciju. To znači da će za proučavanje obiju biti dovoljno opisati sinus funkciju.

Zapravo, pravilnije je reći da su i sinus i kosinus funkcija tek specijalni slučajevi funkcije koju nazivamo **sinusoida**, a zadana je jednadžbom

$$y = C\sin(\omega t + \varphi). \tag{1.9}$$

Zaista, stavljajući u gornju formulu $C = 1$, $\omega = 1$ dobiti ćemo za $\varphi = 0$ sinus, a za $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ kosinus funkciju.

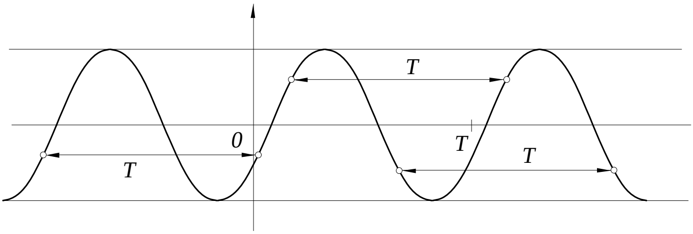
Sinusoida. Fizikalno, sinusoidu dobivamo prateći gibanje točke koja se nalazi na rubu kružnice polumjera C i okreće se stalnom *kutnom brzinom* ω (sl. **??**).



Sl. 1.3. Ordinata točke koja se kreće stalnom kutnom brzinom opisuje sinusoidu

Postavimo koordinatni sustav tako da prolazi središtem kruga. Ako je u početnom trenutku $t = 0$ pravac OM zatvarao kut φ s pozitivnim dijelom koordinatne osi, tada će u trenutku t on zatvarati kut $\omega t + \varphi$. Neka je y ordinata točke M (udaljenost točke do Ox osi). Ta se udaljenost mijenja s vremenom t po zakonu

$$y(t) = C\sin(\omega t + \varphi). \tag{1.10}$$



Sl. 1.4. Graf sinusoide

Graf ove funkcije dan je slikom **??**.

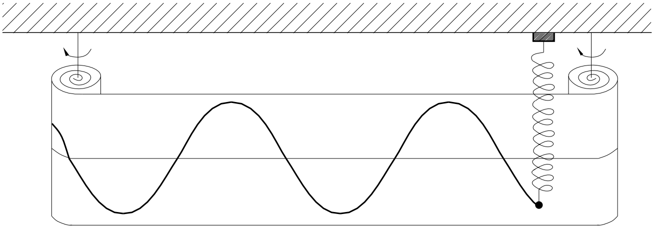
Položaj točke M se mijenja u vremenu. Da naglasimo tu ovisnost, možemo položaj točke označiti s $M(t)$. Točka M će opisati puni krug (i pojaviti se ponovo u početnom položaju) nakon što protekne vrijeme $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, jer je to vrijeme jednog punog okreta. Dakle, vrijedi $M(0) = M(T)$. Primijetimo da će isto vrijediti i za svaki drugi položaj točke, ne samo za početni. Ako se u trenutku t točka nalazi u položaju $M(t)$, tada će po isteku vremena T ona biti u istoj točki, dakle $M(t) = M(t+T)$. Očigledno je da će isto svojstvo imati i ordinata te točke, stoga vrijedi

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin(\omega(t+T) + \varphi).$$

Kažemo da je sinusoida (1.10) **periodička funkcija s periodom** $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Primjer 1.2. Graf sinusoide možemo dobiti na još jedan interesantan način. Zamislimo da je na oprugu obješeno pero i potom opruga pomaknuta iz ravnotežnog položaja i/ ili gurnuta nekom početnom brzinom (sl. **??**). Pretpostaviti ćemo vrlo jednostavni model u kojemu zanemarujemo trenje. Tada će se pod utjecajem sila koje djeluju na pero ono gibati tako da je u svakome trenutku udaljenost pera do ravnotežnog položaja opisana sinusoidom:

$$y(t) = C\sin(\omega t + \varphi).$$



Sl. 1.5.

Graf te sinusoide možemo dobiti tako da bilježimo položaj pera na traku papira koja se namotava stalnom brzinom.

* * *

Konstante koje se javljaju u jednadžbi sinusoide nazivamo ovako:

C — amplituda,
ω — kružna frekvencija,
φ — fazni pomak,
$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ — period.

Primjer 1.3. Nacrtaj funkciju $y = 2\sin(3x - 1)$.

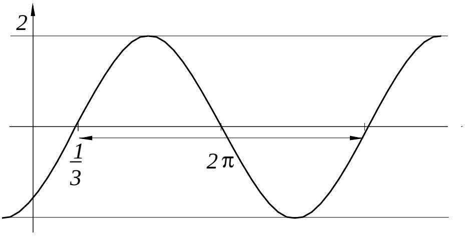
▷ Krivulju crtamo na osnovu sljedeća tri podatka:

1° Period: $T = \dfrac{2\pi}{3}$

2° Amplituda: $C = 2$

3° Nul-točka: $\sin(3x_0 - 1) = 0 \implies 3x_0 - 1 = 0 \implies x_0 = \frac{1}{3}$.

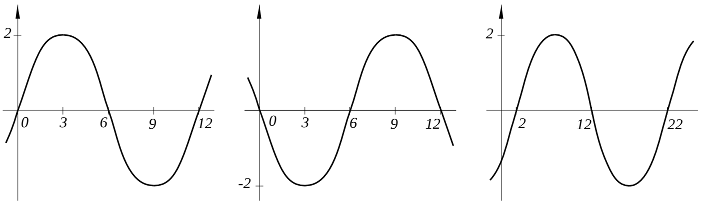
Graf funkcije je sinusoida koja kreće iz točke $\frac{1}{3}$ na osi apscisa i čija je val smješten u intervalu duljine perioda. Izvan toga intervala, slika se periodički ponavlja (v. sl **??**)



Sl. 1.6. Graf sinusoide $y = 2\sin(3x - 1)$

Zadatak 1.4. *Odredi jednadžbe sinusoida prema slici* **??** **a***) –* **c***)*

▷



Sl. 1.7.

a) $f(x) = 2 \sin \dfrac{\pi}{6} x$;

b) $f(x) = 2 \sin \dfrac{\pi}{6}(x - 6) = 2 \sin(\dfrac{\pi}{6} x - \pi)$;

c) $f(x) = 2 \sin \dfrac{\pi}{10}(x - 2) = 2 \sin(\dfrac{\pi}{10} x - \dfrac{\pi}{5})$.

Napomena. Amplituda je uvijek pozitivna, iako mi u zapisu često dozvoljavamo i negativni predznak sinusoide. Tako npr. zapis

$$y = -3 \sin(2x - 1)$$

treba čitati na način:

$$y = -3 \sin(2x - 1) = 3 \sin(2x - 1 - \pi),$$

te je amplituda $C = 3$, a fazni pomak $-1 - \pi$. Uvijek se predznak ispred amplitude može svesti na promjenu faznog pomaka.

$* * *$

Sinusoida je zbroj sinus i kosinus funkcije. Nije očigledno, no istina je da svaku sinusoidu možemo prikazati kao zbroj jedne sinus i jedne kosinus funkcije. Po adicijskom teoremu vrijedi

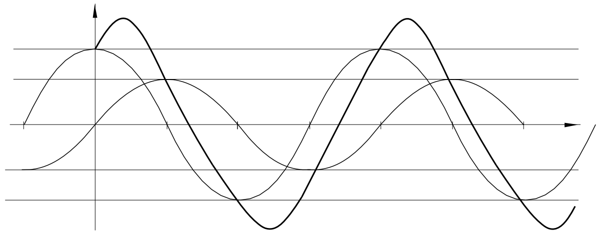
$$\begin{aligned} C \sin(\omega t + \varphi) &= C \sin\varphi \cos\omega t + C \cos\varphi \sin\omega t \\ &= A \cos\omega t + B \sin\omega t \end{aligned}$$

gdje smo označili $A := C \sin\varphi$, $B := C \cos\varphi$. Dakle, svaku sinusoidu možemo prikazati u obliku zbroja sinus i kosinus funkcije, bez faznog pomaka.

Možemo ispisati i obratne veze, ako su A i B poznati, možemo odrediti C i φ, jer vrijedi

$$A^2+B^2=C^2\sin^2\varphi+C^2\cos^2\varphi=C^2 \implies C=\sqrt{A^2+B^2}, \tag{1.11}$$

$$\sin\varphi=\frac{A}{C} \implies \varphi=\arcsin\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{1.12}$$



Sl. 1.8. Nije očigledno da je zbroj sinus funkcije i kosinus funkcije — s različitim amplitudama ali istom frekvencijom — ponovo sinusoida. Njena amplituda iznosi $C=\sqrt{A^2+B^2}$.

* * *

Primijetimo da uvjetom (1.12) kut φ nije jednoznačno određen, jer istom sinusu odgovaraju kutovi u dva kvadranta. Koji je od njih 'pravi' možemo ustanoviti provjerom predznaka koeficijenata A i B.

Pri tome nam služi sljedeća tablica

A	B	kvadrant
$+$	$+$	*I*
$+$	$-$	*II*
$-$	$-$	*III*
$-$	$+$	*IV*

Primjer 1.5. Nacrtaj funkciju $y=\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x$.

▷ Odredimo jednadžbu sinusoide u obliku (1.10). Po formuli (1.11) računamo amplitudu:

$$C=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2.$$

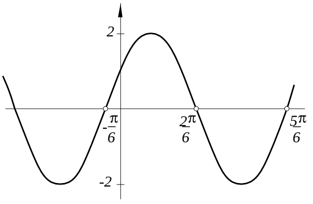
Fazni pomak računamo iz (1.12). kako su oba koeficijenta A i B pozitivna, on se nalazi u prvom kvadrantu. Tako imamo

$$\sin\varphi=\frac{A}{C}=\frac{\sqrt{3}}{2} \implies \varphi=\frac{\pi}{3}.$$

Tražena funkcija ima tako formulu

$$y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Graf ove funkcije dan je na slici **??**.



Sl. 1.9. Graf funkcije $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$

Primjer 1.6. Je li funkcija

$$f(t) = \sin 2t + 2\cos 4t$$

sinusoida? Je li ona periodička?

Odgovor na prvo pitanje je negativan. Zbroj dviju sinus (ili kosinus) funkcija s *različitim* frekvencijama nije nužno sinusoida. No, njihov zbroj može biti periodička funkcija. Tako za ovu funkciju vrijedi

$$\begin{aligned} f(t+2\pi) &= \sin(2t+4\pi) + 2\cos(4t+8\pi) \\ &= \sin(2t) + 2\cos(4t) = f(t), \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Vrijedi čak i

$$\begin{aligned} f(t+\pi) &= \sin(2t+2\pi) + 2\cos(4t+4\pi) \\ &= \sin(2t) + 2\cos(4t) = f(t), \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

i ova funkcija ima svojstvo periodičnosti.

Ovaj primjer ukazuje da je periodičnost potrebno promatrati i za funkcije koje nemaju oblik sinusoide. Mi ćemo to učiniti u sljedećim poglavljima. Pri tom ćemo nastojati odgovoriti na sljedeća pitanja:

- Kako se definira periodičost proizvoljne funkcije?
- Kako se određuje najmanji period takve funkcije?
- Koje operacije i s kakvim funkcijama čuvaju periodičnost?

Zadaci za vježbu

1.1. Nacrtaj funkciju $f(x) = -3\sin(2x+1)$.

1.2. Nacrtaj funkciju $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x$.

1.3. Odredi jednadžbu sinusoide $f(x) = \sin x + \cos x$, a zatim je nacrtaj.

1.4. Odredi jednadžbu sinusoide $f(x) = \sin x - \sqrt{2}\cos x$, a zatim je nacrtaj.

1.5. Nacrtaj sinusoidu $f(x) = 3\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + 3\frac{1}{2}\cos 2x$.

1.6. Nacrtaj sinusoidu $f(x) = -\frac{3}{2}\sin(\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6})$.

1.7. Napiši jednadžbu sinusoide $f(x) = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{3x}{2}) + \sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{3})$. Nacrtaj graf.

1.8. Nacrtaj funkciju $f(x) = -2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{x}{2} + 2\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{x}{2}$.

1.9. Nacrtaj funkciju $f(x) = -\frac{3}{4}\cos(\frac{1}{2} - x)$.

1.10. Nacrtaj funkciju $f(x) = -\frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}x + \frac{\pi}{2} - 1)$.

1.11. Nacrtaj funkciju $f(x) = \sin 3x + |\cos 3x|$.

1.12. Nacrtaj funkciju $f(x) = |\sin 3x| + \sqrt{3}|\cos 3x|$.

1.13. Nacrtaj funkciju $f(x) = |\sin 3x| + \sqrt{3}|\cos 3x|$.

1.14. Napiši jednadžbu sinusoide $f(x) = \cos(\frac{x}{2} + 1) - \sqrt{3}\sin(\frac{x}{2} + 1)$.

1.15. Nacrtaj funkciju $f(x) = |\sin x|\cos x + |\cos x|\sin x$.

1.16. Nacrtaj funkciju $f(x) = 1 - \frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2} - 1)$.

2.

Periodičke funkcije

Pojam periodičnosti, koji je prirodno vezan uz sinusoidu, možemo definirati i za proizvoljnu drugu realnu funkciju.

Definicija. Za funkciju f kažemo da je **periodička** ako postoji realni broj $T > 0$ takav da je za svaki $x \in D(f)$

$$x + T \in D(f) \tag{2.1}$$

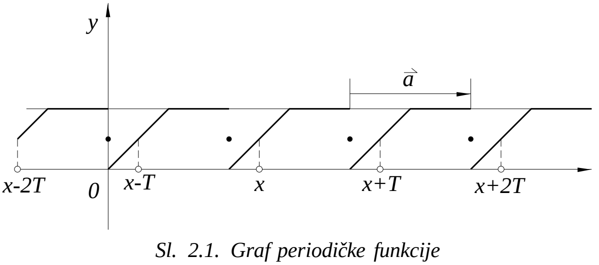
i ako vrijedi

$$f(x) = f(x + T). \tag{2.2}$$

Broj T zove se **period** funkcije f.

* * *

Uvjet (2.1) je trivijalno ispunjen ukoliko je funkcija f definirana na cijelom $\mathbf{R}$. Ako to nije slučaj, tada je taj uvjet u neku ruku posljedica (važnijeg) uvjeta (2.2) jer, da bi (2.2) uopće mogao imati smisla, moraju svi argumenti ležati u području definicije. Stoga se često (jednostavnosti radi) u definiciji periodičnosti zahtijeva da bude ispunjen samo uvjet (2.2), imajući u vidu da je time i postavljen uvjet (2.1) na područje definicije funkcije f.



Sl. 2.1. Graf periodičke funkcije

Mi ćemo često koristiti ovako pojednostavljene definicije periodičnosti.

Na slici **??** dan je primjer grafa jedne periodičke funkcije

Možemo reći da se graf periodičke funkcije preslikava sam u sebe pri translaciji za vektor $\vec{a} = \vec{r}(T, O)$ duljine T, duž osi x.

* * *

Primjer 2.1. Koliki je period funkcije

$$f(x) = \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{3}?$$

Period prve sinusoide je $T_1 = \dfrac{2\pi}{1/2} = 4\pi$, period druge $T_2 = \dfrac{2\pi}{1/3} = 6\pi$. To znači da će se ponašanje prve funkcije ponavljati na svakom intervalu duljine 4π, a druge na svakom intervalu duljine 6π. Želimo li uskladiti ponašanje obiju funkcija, kao jedinicu moramo uzeti interval duljine $T = 12\pi$! Zaista, vrijedi

$$\begin{aligned} f(x+12\pi) &= \sin\left(\frac{x+12\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+12\pi}{3}\right) \\ &= \sin\left(\frac{x}{2} + 6\pi\right) + \sin\left(\frac{x}{3} + 4\pi\right) = \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{3} = f(x). \end{aligned}$$

Primjer 2.2. Je li funkcija

$$f(x) = \sin 2x + \cos 2\pi x$$

periodička?

Oba su pribrojnika periodičke funkcije. Period prve funkcije je $T_1 = \pi$, a period druge $T_2 = 1$. Međutim, njihov zbroj nije periodička funkcija! Tu činjenicu ovoga trenutka ne možemo dokazati, no razlog tome intuitivno možemo naći u tome što *ne postoji* interval čija bi duljina bila višekratnik brojeva T_1 i T_2, poput onoga u prošlome primjeru.

* * *

Periodičnost trigonometrijskih funkcija promatrali smo u prošlome poglavlju. Ipak, ponovimo i utvrdimo to svojstvo, imajući u vidu definiciju danu u ovome poglavlju.

Teorem 2.1. *Funkcije sinus, kosinus, tangens i kotangens periodičke su funkcije.*

Dokaz. Funkcije sinus i kosinus definirane su na čitavom brojevnom pravcu $\mathbf{R}$. Funkcija tangens nije definirana u točkama $\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots\}$, a funkcija tangens u točkama $\{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\}$. Stoga, ako je točka t u domeni bilo koje od ovih funkcija, tada je i $t \pm 2\pi$ također u domeni tih funkcija.

Budući da na jediničnoj kružnici točke $E(t)$, $E(t+2\pi)$, $E(t-2\pi)$ leže na istome mjestu, to vrijedi

$$\sin(t \pm 2\pi) = \sin t, \qquad \cos(t \pm 2\pi) = \cos t,$$
$$\operatorname{tg}(t \pm 2\pi) = \operatorname{tg} t, \qquad \operatorname{ctg}(t \pm 2\pi) = \operatorname{ctg} t.$$

Prema tome, broj 2π period je tih funkcija.

* * *

Primijetimo da vrijedi jednakost

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin\Big(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\Big).$$

Slijedi li odatle da je broj $\dfrac{2\pi}{3}$ period funkcije sinus?

Odgovor je, dakako, negativan. Tako na primjer, ne vrijedi $\sin 0 = \sin\dfrac{2\pi}{3}$.

Primjer 2.3. Funkcija $f(x) = \sin^2 x$ periodička je funkcija s periodom 2π, pošto je definirana za svaki realni broj i vrijedi

$$\sin^2(x \pm 2\pi) = [\sin(x \pm 2\pi)]^2 = [\sin x]^2.$$

Međutim, za svaki realni x vrijedi i sljedeća jednakost

$$\sin^2(x \pm \pi) = [\sin(x \pm \pi)]^2 = [-\sin x]^2 = \sin^2 x$$

te zaključujemo da je $T = \pi$ također period ove funkcije, manji od početnoga perioda 2π.

* * *

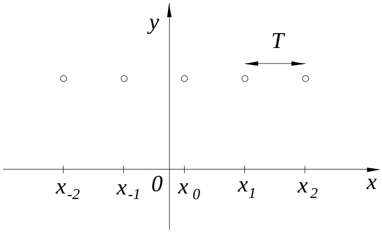
Ako je f periodička funkcija, a $T > 0$ njezin period, onda prema definiciji periodičke funkcije za svaki $x_0 \in D(f)$ vrijedi: $x_0 + T$, $x_0 + 2T \in D(f)$, itd., tj. $x_k = x_0 + kT \in D(f)$, $k \in \mathbf{N}$. Dakle, vrijednost funkcije f u svim točkama mora biti jednaka: $f(x_k) = c$ ne ovisi od k. Nadalje, uzmimo da je za sve ostale x, $x \neq x_k$ funkcija f nedefinirana, pa smo tako došli do najjednostavnijeg primjera periodičke funkcije:

$$f(x) = \begin{cases} c, \ \text{za } x = x_k = x_0 + kT, & k \in \mathbf{Z}, \\ \text{nedefinirana za } x \neq x_k. \end{cases}$$

Graf ovakve funkcije je beskonačan skup točaka

$$\Gamma = \{(x_k, c) : x_k \in D(f), \ c \in \mathbf{R}\};$$

zapravo to je beskonačan skup točaka koje se nalaze na jednakoj udaljenosti (vidi sl. **??**)



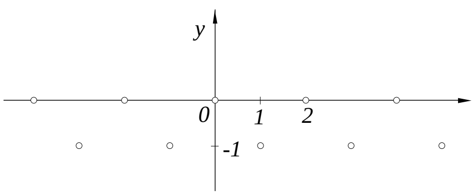
Sl. 2.2.

Primjer 2.4. Funkcija $f(x)$ definirana sa

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ \text{za } x = 2k, \quad k \in \mathbf{Z}, \\ -1, \ \text{za } x = 2k-1, k \in \mathbf{Z}, \\ \text{nedefinirana za ostale vrijednosti} \end{cases}$$

je periodička s periodom 2, jer za svaki $x \in \mathbf{Z}$ vrijedi $f(x+2) = f(x)$.

Graf te funkcije dan je na slici **??**



Sl. 2.3.

* * *

Od osobitoga je interesa poznavati najmanju pozitivnu vrijednost perioda funkcije. Obično, kada govorimo o periodu funkcije, mi mislimo upravo na najmanji pozitivni period funkcije (ako on postoji!). Taj najmanji pozitivni period zove se **temeljni period funkcije**.

Mora li periodička funkcija imati temeljni period? Odgovor na ovo pitanje je negativan!, protuprimjer ćemo dati u § 6. Međutim, pokazat ćemo također da sve periodičke *elementarne* funkcije (različite od konstante) imaju temeljni period.

Za sada ćemo obratiti pozornost na način računanja tog temeljnog perioda.

Teorem 2.2. *Temeljni period funkcije kosinus jednak je* 2π.

Dokaz. Neka je T_0 temeljni period funkcije kosinus. Onda za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$\cos(x + T_0) = \cos x,$$

pa za $x = \frac{\pi}{2}$ dobivamo

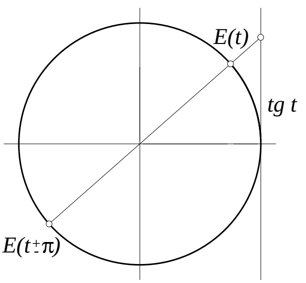
$$\cos(\tfrac{\pi}{2} + T_0) = \cos\tfrac{\pi}{2}\sin T_0 + \sin\tfrac{\pi}{2}\cos T_0 = \cos T_0 = 1.$$

No, na jediničnoj kružnici samo točka $E(0)$ ima apscisu jednaku jedinici. Budući da je najmanji pozitivni broj t za koji je $E(t) = E(0)$ jednak 2π, onda je $T_0 = 2\pi$.

Dokaži da je temeljni period sinusa također jednak 2π. (Napravi dokaz analogan gornjem, ili pak iskoristi vezu $\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ između sinus i kosinus funkcije.)

Teorem 2.3. *Temeljni period funkcije tangens jednak je* π.

Dokaz. Za svaki $t \in \mathbf{R}$ točke $E(t)$ i $E(t \pm \pi)$ nalaze se na jediničnoj kružnici i simetrično su položene s obzirom na ishodište koordinatnog sustava (vidi sl. **??**).



Sl. 2.4. Periodičnost funkcije tangens

Prema tome, odgovarajuće koordinate tih točaka su suprotnih predznaka, pa vrijedi

$$\sin t = y, \quad \cos t = x, \quad \sin(t \pm \pi) = -y, \quad \cos(t \pm \pi) = -x.$$

Onda je

$$\operatorname{tg} t = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{tg}(t \pm \pi) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x}.$$

Stoga je π period funkcije tangens. Pokažimo da je to najmanji period. Neka je T bilo koji period te funkcije, onda je $\operatorname{tg} T = \operatorname{tg}(0+T) = \operatorname{tg} 0 = 0$. No, kako na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ tangens nije nigdje jednak nuli, to je $T \geqslant \pi$, pa je π doista temeljni period funkcije tangens.

Dokaži da je temeljni period funkcije kotangens također jednak π.

* * *

Periodičku funkciju f perioda T dovoljno je poznavati samo na intervalu $[0, T\rangle$ jer za $x \in D(f)$ postoji jedinstveni broj k i broj $x_0 \in [0, T\rangle$ takvi da je $x = kT + x_0$. sada imamo

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(x_0 + T) = f((x_0 + T) + T) \\ &= f(x_0 + 2T) = \ldots = f(x_0 + kT) = f(x). \end{aligned}$$

Graf takve funkcije dobiva se iz grafa funkcije $f|_{[0,T\rangle}$ (restrikcije funkcije f na interval $[0, T\rangle$) translacijom udesno za cjelobrojne kratnike od T.

Ponekad se kaže da smo funkciju f "periodički produžili" izvan intervala $[0, T\rangle$. Više o produženju bit će kazano u sljedećem poglavlju.

Teorem 2.4. *Ako je T period funkcije f, onda je i nT, $n \in \mathbf{N}$, također period te funkcije.*

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indunkcijom.

1) Baza indukcije. Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi jer je $f(x+1\cdot T) = f(x)$, zbog periodičnosti od f.

2) Korak indukcije. Neka je broj nT period od f. Tada za svaki $x \in D(f)$ vrijedi $f(x + nT) = f(x)$. Dokažimo da je i $(n+1)T$ period od f.

$$\begin{aligned} f(x + (n+1)T) &= f(x + nT + T) = (\text{zbog periodičnosti od } f) \\ &= f(x + nT) = (\text{zbog pretpostavke indukcije}) = f(x), \end{aligned}$$

a to je i trebalo dokazati.

Teorem 2.5. *Ako je T_0 temeljni period funkcije f, onda ona nema drugih perioda osim kT_0, $k \in \mathbf{N}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji period T_1 funkcije f takav da T_1/T_0 nije cijeli broj. Onda T_1 možemo prikazati u obliku $T_1 = kT_0 + T_2$, gdje je k cijeli broj i $0 < T_2 < T_0$. Budući su T_0 i T_1 periodi funkcije f, onda za svaki $x \in D(f)$ vrijedi

$$f(x) = f(x + T_1) = f(x + kT_0 + T_2) = f(x + T_2).$$

Odavde vidimo da je pozitivni broj T_2, koji je manji od T_0, period funkcije f. To je u proturječju s pretpostavkom da je T_0 temeljni period funkcije f. Prema tome, naša je pretpostavka neistinita pa je T_1/T_0 cijeli broj.

* * *

Teorem 2.6. *Ako je T temeljni period funkcije f, onda je $\dfrac{T}{|a|}$ temeljni period funkcije $f(ax)$.*

Dokaz. Definirajmo novu funkciju g formulom $g(x) := f(ax)$. Onda za bilo koji broj $x+s \in D(g)$ vrijedi

$$g(x+s) = f(a(x+s)) = f(ax+as).$$

Budući da je T temeljni period funkcije f, to je najmanji pozitivni broj za koji vrijedi $f(ax+as) = f(ax)$ broj $as = T$. Sada imamo

$$f(x+s) = f(ax+as) = f(ax+T) = f(ax) = g(x),$$

a to znači da je $s = \dfrac{T}{|a|}$ temeljni period funkcije $g(x) = f(ax)$.

* * *

Sada bismo mogli postaviti pitanje: Kako dokazati neperiodičnost neke funkcije? U tu je svrhu, recimo, dovoljno istaknuti neka svojstva koja poriodička funkcija mora imati. Pokaže li se da dana funkcija nema ta svojstva onda ona nije periodička.

Teorem 2.7. *Ako je f periodička funkcija s periodom T, onda vrijedi:*

1) $x_0 \in D(f) \implies x_0 + kT \in D(f)$, $k \in \mathbf{N}$,
2) $x_0 \notin D(f) \implies x_0 + kT \notin D(f)$, $k \in \mathbf{N}$.

Ovo svojstvo neposredno izlazi iz same definicije periodičke funkcije.

Posljedica. Domena periodičke funkcije neograničen je skup.

Neka je $D(f)$ domena periodičke funkcije i neka joj je period T. Neka je $x \in D(f)$ proizvoljan. Tada za bilo koji $k \in \mathbf{N}$ vrijedi $x \pm kT \in D(f)$ (jer je f periodička funkcija). No, kako je k proizvoljan prirodni broj, to su brojevi $x + kt$ po volji veliki. Prema tome $D(f)$ ne može biti ograničen skup.

Primjer 2.5. Dokaži da su funkcije:
1) $f(x) = \sin\sqrt{x^2 - 3x + 2}$,
2) $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 - x - 2}$
neperiodičke.

$\triangleright$ 1) Budući da je $D(f) = [1, 2]$, tj. ograničen je skup, to f ne može biti periodička funkcija.

2) $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\}$. Da bi g bila periodička, ne bi smjela biti definirana niti u točkama $-1+kT$, $2+kT$, $k \in \mathbf{N}$. Zato g nije periodička funkcija.

Teorem 2.8. *Nema je $f(x)$ periodička funkcija i $a \in \mathbf{R}$. Jednadžba $f(x) = a$ ili nema rješenja ili ih ima beskonačno mnogo.*

Ako je $f(x)$ periodička funkcija s periodom T, onda iz jednakosti $f(x + kT) = f(x)$, $\quad k \in \mathbf{Z}$ odmah izlazi teorem.

Posljedica. Periodička funkcija ne može biti rastuća ili padajuća na čitavoj domeni.

Primjer 2.6. Dokaži da su neperiodičke ove funkcije:
1) $f(x) = 3^{-x}$,
2) $g(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 2}{x^2 - 6x + 8}$,
3) $h(x) = \cos 2x + \cos(x\sqrt{3})$.

$\triangleright$ 1) Poznato je da je $f(x) = 3^{-x}$ padajuća funkcija za svaki $x \in \mathbf{R}$, pa ne može biti periodička.

2) Neka je $a \in \mathbf{R}$. Jednadžba $\dfrac{x^2 - 5x + 2}{x^2 - 6x + 8} = a$ ne može imati više od dva rješenja. (Zašto?) To drugim rječima znači da funkcija g sve svoje jednake vrijednosti prima u najviše 2 točke, pa prema tome ne može biti periodička.

3) Uočimo da je $f(0) = 2$, pa riješimo jednadžbu

$$\cos 2x + \cos(x\sqrt{3}) = 2.$$

Budući da je $\cos t \leqslant 1$, ta jednadžba je ekvivalentna sa sustavom

$$\cos 2x = 1, \qquad \cos(x\sqrt{3}) = 1.$$

Prva jednadžba ima rješenje $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, a druga $x = \dfrac{2l\pi}{\sqrt{3}}$, $l \in \mathbf{Z}$, pa je lako vidjeti da je jedinstveno rješenje sustava $x = 0$. To znači da jednadžba ima samo jedno rješenje, pa f ne može biti periodička funkcija.

Teorem 2.9. *Ako je $f(x)$ periodička funkcija onda jednadžba $f(x+T)=f(x)$, gdje T uzimamo kao nepoznanicu , a x kao parametar, ima u krajnjem slučaju jedno neništično rješenje $T=T_0$, za sve vrijednosti parametra $x \in D(f)$.*

Ovaj teorem je definicija periodičke funkcije izražena na drugi način: poznato je da, ako je $f(x)$ periodička funkcija onda postoji takav realan broj $T_0 \neq 0$ da za svaki $x \in D(f)$ vrijedi $f(x+T_0)=f(x)$, što zapravo znači da je broj $T_0 \neq 0$ rješenje jednadžbe $f(x+T)=f(x)$ za svako značenje parametra $x \in D(f)$.

I ovim je teoremom vezan sljedeći standardni način dokazivanja neperiodičnosti funkcije $f(x)$: ako možemo naći takve dvije vrijednosti argumenta $x=a$ i $x=b$ da jednadžba (u T)

$$f(a+T)=f(a), \qquad f(b+T)=f(b)$$

nemaju opće neništično rješenje $T=T_0$, onda funkcija f nije periodička.

Primjer 2.7. Je li funkcija $f(x)=\cos x+\sin(x\sqrt{2})$ periodička?

▷ Neka postoji broj $T \neq 0$ takav da je

$$\cos(x+T)+\sin(\sqrt{2}(x+T))=\cos x+\sin(x\sqrt{2})$$

za sve $x \in \mathbf{R}$. Uvrstimo u tu jednakost $x=0$, zatim $x=-T$, pa imamo

$$\cos T+\sin(T\sqrt{2})=1, \qquad \cos T-\sin(T\sqrt{2})=1.$$

Zbrajanjem ovih jednakosti izlazi $\cos T=1$, pa je $T=2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, a njihovim oduzimanjem dobivamo $\sin(T\sqrt{2})=0$, $T=\dfrac{l\pi}{\sqrt{2}}$, $\quad l \in \mathbf{Z}$. Sada se lako uvjeravamo da je jedinstveno rješenje $T=0$, a to znači da je f neperiodična funkcija.

Teorem 2.10. *Ako za $a \in \mathbf{R}$ i periodičku funkciju $f(x)$ s periodom T na nekom intervalu $[a,a+T]$ vrijedi $|f(x)| \leqslant M$, onda je ta nejednakost ispunjena za svaki $x \in D(f)$.*

Posebno, za periodičku funkciju $f(x)$ definiranu i neprekinutu na čitavom $\mathbf{R}$, uvijek postoji broj $M>0$ takav da gornja nejednakost vrijedi za svaki $x \in \mathbf{R}$.

Dokaz. Dokažimo sada teorem. Neka je $f(x)$ periodička funkcija s periodom T i neka dana nejednakost vrijedi za $x \in [a,a+T]$. Budući da je f periodička funkcija onda nejednakost vrijedi i za $x \in$

$[a+kT, a+(k+1)T]$, $k \in \mathbf{Z}$. Međutim, svaka vrijednost argumenta x pripada nekom od tih intervala, pa prema tome dana nejednakost vrijedi za sve vrijednosti od x.

Primjer 2.8. Funkcija $f(x) = x \cdot \cos(x^2)$ je neperiodička.

$\triangleright$ Pretpostavimo da je $f(x)$ periodička funkcija perioda $T > 0$. Budući da je $D(f) = \mathbf{R}$, a za $x \in [0, T]$ vrijedi

$$|x \cdot \cos(x^2)| \leqslant |x| \leqslant T, \quad \text{tj.} \quad |f(x)| \leqslant T,$$

onda prema teoremu 2.9. za svaki $x \in \mathbf{R}$ moralo bi biti ispunjeno $|f(x)| \leqslant T$.

Međutim, nije tako, npr. za $x = \sqrt{2k\pi}$, čim $k \in \mathbf{N}$ zadovolji nejednakost $k > \dfrac{T^2}{2\pi}$.

Teorem 2.11. *Ako je periodička funkcija derivabilna u svakoj točki svoje domene onda je njena derivacija također periodička funkcija s periodom T.*

Dokaz. Neka je $f(x)$ periodička funkcija s periodom T, i neka ona ima derivaciju $f'(x)$ u svakoj točki $x \in D(f)$. Onda vrijedi $D(f') = D(f)$, pa iz toga izlazi, da ako je $x \in D(f')$ onda $x+T \in D(f')$. Još moramo utvrditi da za svaki $x \in D(f')$ vrijedi $f'(x+T) = f'(x)$. U tu svrhu funkciju $f(x+T)$ možemo shvatiti kao složenu funkciju, pa deriviranjem jednakosti $f(x+T) = f(x)$ imamo $f'(x+T) \cdot (x+T)' = f'(x)$, tj. $f'(x+T) = f'(x)$ za svaki $x \in D(f)$. To znači da je $f'(x)$ periodička funkcija perioda T.

Primjer 2.9. Funkcije
1) $f(x) = \sin(x^2)$,
2) $g(x) = \sin 2x + \sin(x\sqrt{3})$
su neperiodičke.

$\triangleright$ 1) Derivacija funkcije f glasi $f'(x) = 2x\cos(x^2)$. Analogno kao u primjeru 2.7. pokaži da je f' neperiodička funkcija, pa prema teoremu 2.11. nije periodička ni funkcija $f(x)$.

2) Derivacija funkcije g glasi

$$g'(x) = 2\cos 2x + \sqrt{3}\cos(x\sqrt{3}).$$

Slično, kao u primjeru 2.6. 3) pokaži da je g' neperiodička funkcija, pa prema teoremu 2.11. ni g nije periodička funkcija.

Riješeni zadaci

2.1. Neka je P skup svih perioda funkcije $f(x)$. Ako su T_1, $T_2 \in P$, $T_1 + T_2 \neq 0$, onda je $T_1 + T_2 \in P$. Dokaži.

▷ Neka je $x_2 = x_1 + T_1$. Budući da je T_1 period od f, onda postoji $f(x_2)$ i vrijedi $f(x_2) = f(x_1 + T_1) = f(x_1)$. No i T_2 je period od f, pa postoji $f(x_2 + T_2)$ i vrijedi $f(x_2 + T_2) = f(x_2) = f(x_1 + T_1) = f(x_1)$, odnosno $f(x_1 + T_1 + T_2) = f(x_1)$. Kako je po pretpostavci $T_1 + T_2 \neq 0$ time je pokazano da je $T_1 + T_2$ period od f.

2.2. Dokaži da je broj 1 period funkcije

$$f(x) = \frac{\cos 2\pi x}{0.25 \cdot \sin 2\pi(x - 0.5)}.$$

▷ Ako je $x \in D(f)$, onda je $x \pm 1 \in D(f)$ (što ćemo provjeriti i računom!),

$$\begin{aligned} f(x \pm 1) &= \frac{\cos 2\pi(x \pm 1)}{0.25 \cdot \sin 2\pi(x \pm 1 - 0.5)} \\ &= \frac{\cos(2\pi x \pm 2\pi)}{0.25 \cdot \sin(2\pi(x - 0.5) \pm 2\pi)} \\ &= \frac{\cos 2\pi x}{0.25 \cdot \sin 2\pi(x - 0.5)} = f(x). \end{aligned}$$

2.3. Je li funkcija $f(x) = a + b\sin(cx + d)$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ periodička?

▷ Da, i to bez obzira na vrijednosti koeficijenata. Period joj je ili $2\pi/c$ (za $c \neq 0$) ili svaki pozitivni broj (ako je $c = 0$).

2.4. Dokaži da je broj π period funkcije

$$f(x) = |\cos x| - \log\cos 2x.$$

▷ Provjeravamo (2.2):

$$\begin{aligned} f(x \pm \pi) &= |\cos(x \pm \pi)| - \log\cos 2(x \pm \pi) \\ &= |-\cos x| - \log\cos(2x \pm 2\pi) \\ &= |\cos x| - \log\cos 2x = f(x). \end{aligned}$$

Kako glase ostali periodi funkcije f.

2.5. Jesu li sljedeće funkcije periodičke

1) $f(x) = \ln(\ln(\cos x))$,
2) $f(x) = \sin(\ln x)$,
3) $f(x) = \cos(\ln(\cos x))$?

▷ 1) Ne, jer je $D(f) = \emptyset$. Naime, vrijedi $\cos x \leqslant 1$ te je $\ln(\cos x) \leqslant 0$ i zato $\ln(\ln(\cos x))$ nije definirano niti za jedan x.

2) Ne. Jedina nul-točka funkcije je $x = 1$.

3) Da. Period je 2π.

2.6. Je li funkcija $f(x) = 5x - 4$ periodička?

▷ Ne. Najjednostavnije je promotriti tobožnji identitet $f(x) = f(x+T)$ koji se svodi na $5x - 4 = 5x + 5T - 4$ odakle slijedi $T = 0$. Zato ne postoji pozitivni period.

2.7. Pokaži da funkcija $f(x) = x^5$ nije periodička.

▷ Ako je funkcija periodička, tada za svaki $x \in \mathbf{R}$ mora vrijediti $f(x) = f(x+T)$, odnosno

$$x^5 = (x+T)^5.$$

Uvrstimo ovdje $x = 0$. Dobivamo $0 = T^5$ te je $T = 0$, što znači da f nije periodička.

2.8. Odredi temeljni period (ako postoji) funkcije

$$f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{tg} 2(x-1)}.$$

▷ Neka je T period od f. Onda za svaki $x \in D(f)$ vrijedi

$$\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2(x+T-1)} = \sqrt[3]{\operatorname{tg} 2(x-1)}.$$

tj.

$$\operatorname{tg} 2(x+T-1) = \operatorname{tg} 2(x-1).$$

Odavde, za $x = 1$ slijedi $\operatorname{tg} 2T = 0$, tj. $T = k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{N}$. Najmanja pozitivna vrijednost je $T = \frac{\pi}{2}$.

Ovime nismo dokazali da je $T = \frac{\pi}{2}$ *zaista* period. To je istina, no to tek trebamo provjeriti uvrštavanjem u jednadžbu funkcije. nakon što smo utvrdili da T jeste period, gornji račun nam osigurava da je to *temeljni* period.

2.9. Je li funkcija $f(x) = \sqrt{|2 \sin 3\pi(x+0.5)|}$ periodička?

▷ Vrijedi $D(f) = \mathbf{R}$. Mogući period T funkcije f potražit ćemo iz identiteta

$$\sqrt{|2 \sin 3\pi(x+0.5+T)|} = \sqrt{|2 \sin 3\pi(x+0.5)|}$$

Posebno, za $x = -0.5$ mora vrijediti

$$\sqrt{|2 \sin 3\pi T|} = 0$$

i odavde $T = \frac{k}{3}$, $k \in \mathbf{N}$. Najmanja pozitivna vrijednost je $T = \frac{1}{3}$. Provjerimo je li to period funkcije f:

$$\begin{aligned} f\left(x+\tfrac{1}{3}\right) &= \sqrt{|2 \sin 3\pi(x+0.5+\tfrac{1}{3})|} \\ &= \sqrt{|2 \sin(3\pi(x+0.5)+\pi)|} \\ &= \sqrt{|-2 \sin(3\pi(x+0.5)|} \\ &= \sqrt{|2 \sin(3\pi(x+0.5)|} = f(x). \end{aligned}$$

Prema tome, $\frac{1}{3}$ temeljni je period dane funkcije.

2.10. Dokaži da je broj 2π temeljni period funkcije $f(x) = \left|\cos \dfrac{x}{2}\right|$.

▷ Broj 2π jeste period ove funkcije, pošto imamo

$$\left|\cos\frac{x+2\pi}{2}\right| = \left|\cos\left(\frac{x}{2}+\pi\right)\right| = \left|-\cos\frac{x}{2}\right| = \left|\cos\frac{x}{2}\right|.$$

Dokažimo da je to temeljni period od f. Pretpostavimo suprotno: postoji broj T takav da je $0 < T < 2\pi$ i

$$\left|\cos\frac{x+T}{2}\right| = \left|\cos\frac{x}{2}\right|.$$

Posebno, za $x = \pi$ mora biti

$$\left|\cos\frac{\pi+T}{2}\right| = 0,$$

tj.

$$\sin\frac{T}{2} = 0,$$

a to je nemoguće ukoliko je $0 < T < 2\pi$. Stoga je T temeljni period.

2.11. Dokaži da je funkcija $f(x) = \sin^4 x$ periodička i odredi joj temeljni period.

▷ Broj $T = \pi$ period je ove funkcije:

$$f(x+T) = \sin^4(x+\pi) = (-\sin x)^4 = f(x).$$

Pokažimo da je to temeljni period. Vrijedi $f(0) = 0$. Prva sljedeća nul točka funkcije f pozitivno je rješenje jednadžbe $\sin^4 x = 0$, i iznosi $x = \pi$. To znači da se u toj točki prvi put ponavlja vrijednost funkcije i zato njen period mora biti barem π. Stoga je $T = \pi$ temeljni period.

2.12. Je li funkcija $f(x) = e^{\sin x}$ periodička?

▷ Promotrimo identitet $f(x) = f(x+T)$:

$$e^{\sin(x+T)} = e^{\sin x} \implies \sin(x+T) = \sin x.$$

Specijalno, za $x = 0$ imamo $\sin T = 0$ i odavde $T = k\pi$, $k \in \mathbf{N}$. Najmanja vrijednost $T = \pi$ *nije* period (uvrsti $x = \frac{\pi}{2}$!), dok sljedeća $T = 2\pi$ jest. To je temeljni period funkcije.

2.13. Odredi temeljni period (ako postoji) funkcije $f(x) = \cos^{2n} x$.

▷ Uvrstimo $x = \frac{\pi}{2}$ u jednadžbu $f(x) = f(x+T)$:

$$\cos^{2n}(\frac{\pi}{2}+T) = \cos^{2n}\frac{\pi}{2} = 0.$$

Odavde je $T = k\pi$, $k \in \mathbf{N}$. Najmanja moguća vrijednost $T = \pi$ period je ove funkcije. Provjeri!

2.14. Odredi temeljni period (ako postoji) funkcije $f(x) = \sin^{2n-1} x$, $n \in \mathbf{N}$.

▷ Jednadžba $f(x) = f(x+T)$ daje

$$\sin^{2n-1}(x+T) = \sin^{2n-1} x, \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Posebno, za $x = 0$ dobivamo

$$\sin^{2n-1} T = 0 \implies \sin T = 0,$$

te je $T = k\pi$, $k \in \mathbf{N}$. Provjerimo je li $T = \pi$ period dane funkcije:

$$f(x+\pi) = \sin^{2n-1}(x+\pi) = (-\sin x)^{2n-1} = -\sin^{2n-1} x = -f(x),$$

te π nije period. Za $T = 2\pi$ imamo

$$\sin^{2n-1}(x+2\pi) = \sin^{2n-1} x,$$

te je 2π tenmeljni period.

2.15. Odredi temeljni period (ako postoji) funkcije $f(x) = |\cos x|$.

▷ *1. način.* Iz jednakosti

$$|\cos(x+T)| = |\cos x|, \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

za $x = \frac{\pi}{2}$ slijedi $\cos(\frac{\pi}{2} + T) = 0$, tj. $\sin T = 0$ te je $T = k\pi$, $k \in \mathbf{N}$. Za $k = 1$ dobivamo $T = \pi$. Provjera daje:

$$|\cos(x+\pi)| = |-\cos x| = |\cos x|$$

pa je to temeljni period.

2. način. Budući da je $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, to je

$$|\cos x| = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$$

pa je temeljni period dane funkcije π.

* * *

2.16. Neka je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcija i $a \in \mathbf{R}^+$ takvi da vrijedi $f(x+a) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Pokaži da je f periodička.

▷ Pokažimo da je $2a$ period.

$$f(x+2a) = f((x+a)+a) = -f(x+a) = f(x).$$

2.17. Neka je $a \in \mathbf{R}^+$ i $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve funkcije da je f neparna, g parna i $f(x) = g(x+a)$. Dokaži da je g periodička funkcija i odredi joj period.

▷ Vrijedi

$$g(x+4a) = g(x+3a+a) = f(x+3a) = -f(-x-3a)$$

(jer je f neparna)

$$= -g(-x-3a+a) = -g(-x-2a) = -g(x+2a)$$

(jer je g parna)

$$= -f(x+a) = f(-x-a) = g(-x) = g(x).$$

Prema tome, g je periodička funkcija s periodom $4a$.

2.18. Ako za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi $f(x+1) = \dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$, pokaži da je f periodička funkcija.

▷ Izračunajmo vrijednost funkcije f u argumentu $x+2$:

$$f(x+2) = \frac{1-f(x+1)}{1+f(x+1)} = \frac{1-\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}}{1+\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}} = \frac{\dfrac{1+f(x)-1+f(x)}{1+f(x)}}{\dfrac{1+f(x)+1-f(x)}{1+f(x)}} = f(x).$$

Dakle, vrijedi $f(x+2) = f(x)$ za svaki $x \in \mathbf{R}$ te je f periodička s periodom 2.

2.19. Ako za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi $f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2}f(x)$, pokaži da je f periodička funkcija.

▷ Po uvjetu zadatka je

$$f(x+1) = \sqrt{2}f(x) - f(x-1).$$

Dalje računamo

$$\begin{aligned}
f(x+2) &= f((x+1)+1) = \sqrt{2}f(x+1)-f(x) = \sqrt{2}[\sqrt{2}f(x)-f(x-1)]-f(x)\\
&= 2f(x)-\sqrt{2}f(x-1)-f(x) = f(x)-\sqrt{2}f(x-1),\\
f(x+4) &= f((x+2)+2) = f(x+2)-\sqrt{2}f(x+1)\\
&= f(x)-\sqrt{2}f(x-1)-\sqrt{2}[\sqrt{2}f(x)-f(x-1)]\\
&= f(x)-\sqrt{2}f(x-1)-2f(x)+\sqrt{2}f(x-1) = -f(x).
\end{aligned}$$

Iz ove jednakosti, prema zadatku 2.1, slijedi da je f periodička funkcija s periodom $T = 8$.

Zadaci za vježbu

2.20. Neka je P skup svih perioda funkcije $f(x)$. Ako su T_1, $T_2 \in P$ i $T_1 \neq T_2$, onda je $T_1 - T_2 \in P$. Dokaži.

2.21. Neka je P skup svih perioda funkcije $f(x)$. Ako su $T_1, T_2 \in P$ i $k \cdot T_1 + l \cdot T_2 \neq 0$, $k, l \in \mathbf{Z}$, onda je $kT_1 + lT_2 \in P$. Dokaži.

2.22. Koje su od sljedećih funkcija periodičke?

1) $f(x) = \sin^4 x$; **2)** $f(x) = x \operatorname{tg} x$; **3)** $f(x) = 2\operatorname{ctg} x + 1$;

4) $f(x) = \log \sin x$; **5)** $f(x) = \sin \sin x$; **6)** $f(x) = |\sin(x + \frac{\pi}{3})|$?

2.23. Odredi temeljni period ovih funkcija

1) $f(x) = \sin(2x+3)$; **2)** $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$;

3) $f(x) = 3\sin(4\pi x + 1)$; **4)** $f(x) = \cos|x|$;

5) $f(x) = \sin x \cos 3x$; **6)** $f(x) = 2^{|\cos(\pi x/2)|}$;

7) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$;

8) $f(x) = 2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - 3\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$.

2.24. Dokaži da su sljedeće funkcije periodičke i odredi im temeljne periode:

1) $f(x) = 3\cos^3 x - 4\cos 2x$; **2)** $f(x) = 5\cos\dfrac{3x}{4} + \sin\dfrac{3x}{2}$;

3) $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$; **4)** $f(x) = \sin x + \sin^3 x$;

2.25. Funkcija f zadovoljava identitet

$$f(x+1) = \frac{f(x) - 5}{f(x) - 3}, \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Pokaži da je f periodička i odredi joj period.

2.26. Funkcija f zadovoljava identitet

$$f(x+k) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}, \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

za neki $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Pokaži da je f periodička i odredi joj period.

2.27. Pokaži da sljedeće funkcije nisu periodičke:

1) $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$; **2)** $f(x) = x + \sin x$;

3) $f(x) = \dfrac{2\cos 2x}{1 + \sin^2(x\sqrt{2})}$; **4)** $f(x) = \cos\sqrt[3]{x}$;

5) $f(x) = \sin\sqrt{|x|}$; **6)** $f(x) = \sqrt{\log_5\dfrac{5x - x^2}{4}}$;

7) $f(x) = x^2 - 4 + \ln(-x)$; **8)** $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$;

9) $f(x) = 7x - \sin^3(2x)$; **10)** $f(x) = 5^{x+1} - 5$;

11) $f(x) = |x^3|$; **12)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$;

13) $f(x) = \cos x + \cos(x\sqrt{2}) + \cos(x\sqrt{3})$;

14) $f(x) = 3x\sin 2x$.

2.28. Za koje vrijednosti $a \in \mathbf{Z}$ funkcija $f(x) = \cos ax \sin(5x/a)$ ima period 3π?

2.29. Funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana sa

$$f(x) = a_0 + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + \beta_2\sin 2x) + \dots$$
$$+ (a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

periodička je funkcija perioda 2π. Dokaži!

2.30. Neka je $a \in \mathbf{R}^+$ i $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve funkcije da je f parna, g neparna i $f(x+a) = g(x-a)$. Dokaži da je g periodička funkcija s periodom $8a$.

2.31. Neka je f realna funkcija definirana za svaki $x \in \mathbf{R}$ i neka za svaki x vrijedi

$$f(x+a) = \tfrac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2},$$

gdje je $a \in \mathbf{R}^+$. Dokaži da je f periodička funkcija perioda $2a$.

2.32. Neka su $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ i neka za sve $x, y \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$f(x+y) = f(x-y) - 2g(x)g(y).$$

Ako je f periodička funkcija, dokaži da je i g periodička funkcija.

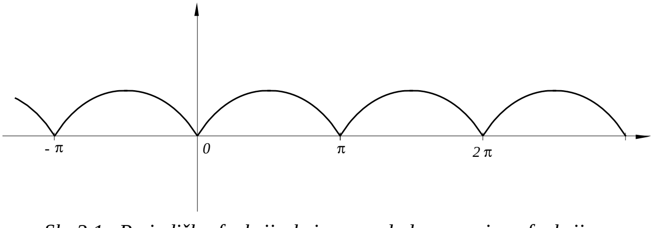
2.33. Ako za funkciju f vrijedi $f(x+T) = k \cdot f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, za neki $k \in \mathbf{N}$ i $T > 0$, dokaži da se f može prikazati u obliku $f(x) = a^x \cdot g(x)$, pri čemu je g periodička funkcija s periodom T. Pokaži da vrijedi i obrat.

3.
Periodičko proširenje

Neka je $[a, b\rangle$ interval duljine T i $f : [a, b\rangle \to \mathbf{R}$ proizvoljna funkcija. Želimo odrediti *periodičku* funkciju perioda T, označimo je imenom F, čije se vrijednosti na intervalu $[a, b\rangle$ podudaraju s onima funkcije f. Kako ćemo postupiti?

Primjer 3.1. Neka je $f(x) = \sin x$, $0 \leqslant x < \pi$. Kako izgleda periodička funkcija perioda π koja se podudara s funkcijom sinus na intervalu $[0, \pi\rangle$?

Najlakše je nacrtati njen graf. Dovoljno je graf početne funkcije nanijeti lijevo i desno na svakom intervalu duljine π (sl. **??**).



Sl. 3.1. Periodička funkcija koja se podudara sa sinus funkcijom na intervalu $[0, \pi\rangle$

Teže je (a ponekad vrlo teško) odrediti njenu eksplicitnu formulu. (Na sreću, ta nam formula najčešće i ne treba.) U ovome primjeru, za $x \in [-\pi, 0\rangle$ mora vrijediti

$$F(x) = F(x + \pi) = f(x + \pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x = |\sin x|.$$

Kako je $|\sin x| = \sin x$ i na intervalu $[0, \pi\rangle$, a na svim se ostalim intervalima duljine π situacija ponavlja, to vrijedi

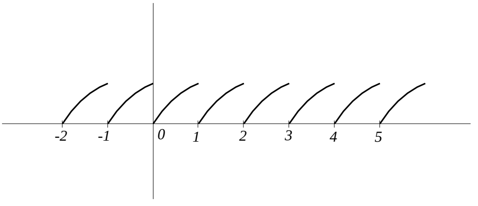
$$F(x) = |\sin x|.$$

* * *

Funkciju F nazivamo **periodičkim proširenjem** funkcije f .

Primjer 3.2. Neka je ponovo $f(x) = \sin x$, ali promatrana na intervalu $[0, 1\rangle$ duljine 1. Kako izgleda periodičko proširenje ove funkcije?

Graf ove funkcije dana je u sl. **??**



Sl. 3.2. Periodičko proširenje sinus funkcije s intervala $[0, 1\rangle$

Formulu ovoga proširenja moguće je eksplicitno napisati:

$$F(x) = \sin\{x\}$$

gdje je $\{x\}$ decimalni dio broja x. Naime, vrijednost proširenja u točki x podudara se s vrijednošću funkcije sinus u točki x' iz intervala $[0, 1\rangle$ koja 'odgovara' točki x; onoj za koju vrijedi $x = x' + k$, za neki cijeli broj k. No to je upravo decimalni dio broja x.

Više o ovakvim primjerima ćemo govoriti u petom poglavlju.

Konstrukcija periodičkog proširenja. Neka je f definirana na intervalu $[a, b\rangle$ duljine T. Kako ćemo opisati periodičko proširenje ove funkcije u općenitom slučaju? Pretpostaviti ćemo, jednostavnosti radi da je početni interval $[a, b\rangle = [0, T\rangle$, jer će to uglavnom i biti slučaj u svim periodičkim proširenjima. Općenitiju situaciju čitatelj će moći lako sam opisati.

Vrijednost proširenja u proizvoljnoj točki x dobivamo na sljedeći način. Za svaki $x \in D(F)$ jednoznačno je određena točka x_0 in $[0, T\rangle$ za koju vrijedi

$$x = x_0 + k \cdot T$$

za neki cijeli broj k. Tu točku (odnosno realni broj koji joj odgovara) dobivamo naprosto *dijeljenjem* broja x s T; k je kvocijent (cjelobrojan), a x_0 ostatak dijeljenja. Za ostatak pri dijeljenju uvijek vrijedi $0 \leqslant x_0 < T$. Sada mora biti, zbog pretpostavljene periodičnosti proširenja

$$F(x) = F(x_0 + k \cdot T) = F(x_0) = f(x_0).$$

Prema tome, periodičko proširenje definira se na način

$$F(x) = f(x - kT)$$

gdje je $k \in \mathbf{Z}$ odabran tako da bude $0 < x - kT < T$.

Parne, neparne funkcije i periodičnost. Funkcija f je **parna**, ako vrijedi

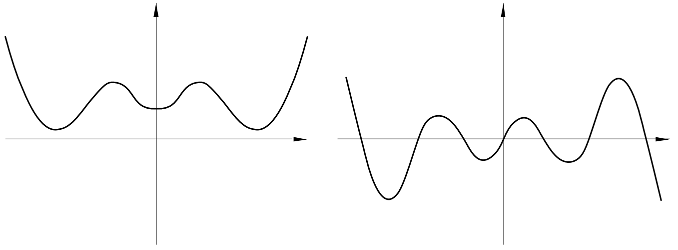
$$f(-x) = f(x)$$

za svaki realni x iz domene funkcije f. (Ta domena stoga mora biti simetrična sa središtem u ishodištu.) Graf parne funkcije simetričan je s obzirom na os Oy.

Funkcija f je **neparna**, ako vrijedi

$$f(-x) = -f(x).$$

Njen je graf simetričan s obzirom na ishodište koordinatnog sustava.



Sl. 3.3. Graf parne funkcije (lijevo) i neparne funkcije (desno)

Primjer 3.3. Funkcije 3, $2x^2$, $3x^4$, $\cos x$, $\sin(x^2)$ su parne. Funkcije $3x - 2x^3$, $\sin x$, $x + \operatorname{tg} x$ su neparne. Funkcija e^x niti je parna, niti neparna (i 'većina' funkcija je takva).

Primjer 3.4. Ako je f proizvoljna funkcija, tada je funkcija definirana sa

$$f_p(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

parna, dok je

$$f_n(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

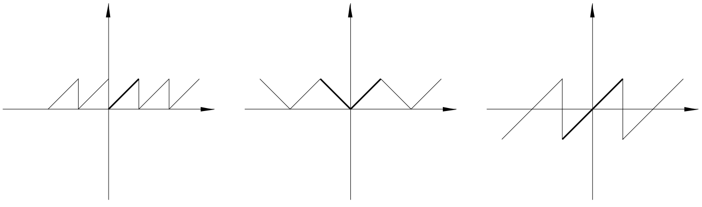
neparna (*provjeri*!). Pri tom vrijedi

$$f(x) = f_p(x) + f_n(x).$$

Dakle, svaka se funkcija može rastaviti na zbroj parne i neparne funkcije.

Funkcija f koja je zadana na intervalu $[0, b\rangle$ može se proširiti tako da njeno periodičko proširenje bude parna ili pak neparna funkcija, na sljedeći način: najprije funkciju definiramo na intervalu $\langle -b, 0\rangle$ tako da ona bude parna odnosno neparna na intervalu $\langle -b, b\rangle$, a zatim periodički proširimo dobivenu funkciju na čitav $\mathbf{R}$, računajući da je $T = 2b$.

Primjer 3.5. Neka je $f(x) = x$, $0 \leqslant x < 1$. Odredi i skiciraj
1° periodičko proširenje,
2° parno periodičko proširenje,
3° neparno periodičko proširenje ove funkcije.



Sl. 3.4. Tri proširenja iste početne funkcije. Uoči da prvo nije niti parna niti neparna funkcija dok je drugo parna a treće neparna funkcija. Primjeti da je period prve funkcije $T = 1$, dok druga i treća imaju period $T = 2$.

Rješenje je skicirano na slici **??**.

Možemo li odrediti eksplicitne formule ovih funkcija? Iako to pitanje nije od presudne važnosti, pokušajmo odgovoriti nanj.

Ad 1° Za prvu funkciju vrijedi formula dana u općoj konstrukciji:

$$F(x) = f(x - k) = x - k$$

gdje je k takav cijeli broj da je $0 \leqslant x - k < 1$. No to svojsvo ima broj $k = \lfloor x \rfloor$ (najveći cijeli dio broja x). Zato je

$$F(x) = x - \lfloor x \rfloor = \{x\}.$$

Ad 2° Prvo smo dužni funkciju definirati na intervalu $\langle -1, 0]$ tako da bude parna:

$$F(x) = -x, \qquad -1 < x \leqslant 0.$$

U rubnim točkama stavimo $F(1) = F(-1) = 1$. Tada će vrijediti

$$F(x) = |x|, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Za proizvoljni drugi x pišemo

$$F(x) = |x - 2k|.$$

gdje je k takav cijeli broj da je $-1 \leqslant x - 2k < 1$.

Spomenimo da ova funkcija ima i drugi prikaz, na koji ćemo se osvrnuti u sljedećem poglavlju.

Ad 3° sada je

$$F(x) = x, \qquad -1 < x < 1.$$

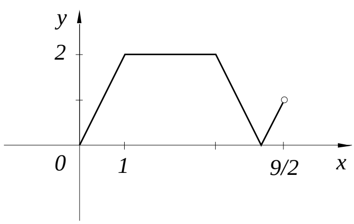
U rubnim točkama funkcija nije definirana (možemo je definirati po svojoj volji) Obično stavljamo $F(1) = 1$, no još češće (iz razloga u koje sada ne možemo ulaziti) $F(1) = 0$. Za proizvoljan x stavljamo kao i gore

$$F(x) = x - 2k,$$

gdje je k takav cijeli broj za koji vrijedi $-1 < x - 2k < 1$.

Riješeni zadaci

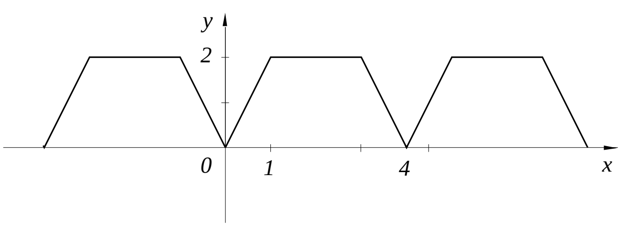
3.1.* Funkcija $f(x)$ je zadana na intervalu $[0, \frac{9}{2}\rangle$ grafom na slici



Sl. 3.5.

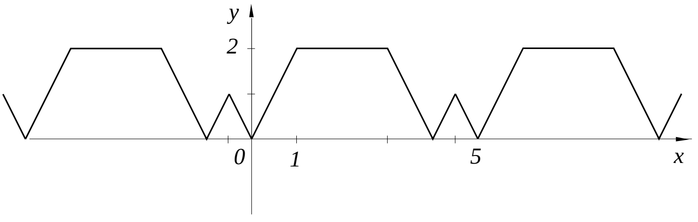
Odredi dva moguća produženja ove funkcije za sve ostale $x \in \mathbf{R}$ tako da dobiješ periodičku funkciju s temeljnim periodom 1) $T_0 = 4$, 2) $T_0 = 5$.

▷ 1)



Sl. 3.6.

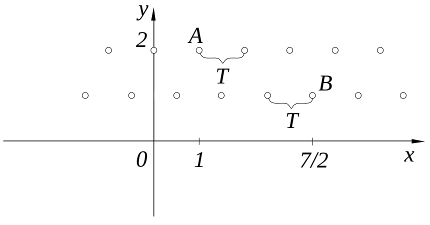
2)



Sl. 3.7.

3.2. Funkcija $f(x)$ zadana je s 2 točke:
1) $A = (1, 2)$, $B(\frac{7}{2}, 1)$ 2) $A = (a, b)$, $B(c, d)$.
Proširi funkciju f do periodičke funkcije F (ne nužno svuda definirane). Koji je temeljni period funkcije F?

▷ 1)



Sl. 3.8.

2) Neka je $T > 0$. Promatrajmo ove brojeve $a_k = a + kT$, $k \in \mathbf{Z}$, $c_l = c + lT$, $l \in \mathbf{Z}$, i stavimo $f(a_k) = f(a) = b$, $f(c_l) = f(c) = d$ za sve $k, l \in \mathbf{Z}$.

Ako su te relacije takve da se ne može dogoditi da je $x = a_k = c_l$ i $f(x) = b \neq f(x) = d$, onda će ta funkcija biti periodička s temeljnim periodom T. Ako bi za neke k, l bilo $a_k = c_l$, onda se zadana funkcija f ne može proširiti do periodičke funkcije s periodom T (zašto?). Naime, jednakost $a_k = c_l$ daje $a + kT = c + lT$ $(k - l)T = c - a$ tj.

$$T = \frac{c - a}{m}, \qquad m \in \mathbf{N} \tag{1}$$

Prema tome, dana funkcija f može se proširiti do periodičke funkcije s temeljnim periodom T za svaki $T > 0$ osim za one T za koje vrijedi (1).

3.3. Dana je funkcija $f(x) = 2 - x^2$, $x \in [0, 1\rangle$. Odredi i skiciraj

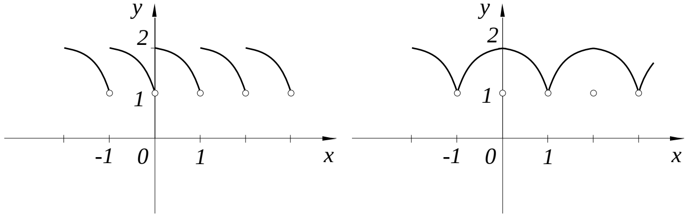
1) periodičko proširenje,

2) parno periodičko proširenje

▷ 1) $F(x) = f(x-k) = 2-(x-k)^2$, $0 \leqslant x-k < 1$, $k \in \mathbf{Z}$. 2) Najprije funkciju valja definirati na intervalu $\langle -1, 0]$ tako da bude parna:

$F(x) = 2 - x^2$, $x \in \langle -1, 0]$. Na krajevima intervala stavimo $F(-1) = F(1) = 1$. Tada je

$F(x) = 2 - (x-2k)^2$, $-1 < x - 2k < 1$; $k \in \mathbf{Z}$.



Sl. 3.9.

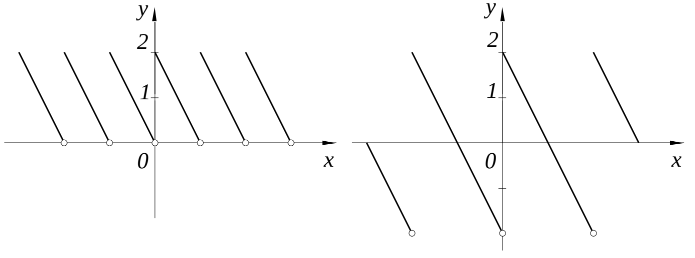
3.4. Neka je $f(x) = -2x$, $-1 \leqslant x < 0$. Odredi i skiciraj

1) periodičko proširenje

2) neparno periodičko proširenje.

▷ 1) $F(x) = f(x-k) = -2(x-k)$, $-1 \leqslant x - k < 0$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) $F(x) = -2x$, $-1 < x < 1$, $F(1) = 2 = F(-1)$. Za proizvoljni x stavljamo $F(x) = -2(x-2k)$, $-1 < x - 2k < 1$, $k \in \mathbf{Z}$.



Sl. 3.10.

3.5. Dana je funkcija $f(x)$ sa

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Odredi neparno periodičko proširenje ove funkcije.

▷

$F(x) = -\dfrac{\pi}{2}$, $-\pi < x < 0$ $F(x) = 0$

Za proizvoljni x stavljamo

$$F(x)=\frac{\pi}{2},\quad 0<x-2k\pi<\pi,\quad k\in\mathbf{Z}$$
$$F(x)=-\frac{\pi}{2},\quad -\pi<x-2kp<0,\quad k\in\mathbf{Z}$$
$$F(x)=0,\quad x=k\pi,\quad k\in\mathbf{Z}$$

što možemo pisati ovako

$$F(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, & (2k-1)\pi<x<2k\pi,\\ 0, & x=k\pi,\\ \frac{\pi}{2}, & 2k\pi<x<(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

Nacrtaj graf!

Zadaci za vježbu

3.6. Dana je funkcija $f(x)$ sa

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in[0,\frac{\pi}{2}],\ x\in[\frac{3\pi}{2},2\pi],\\ 0, & x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}].\end{cases}$$

Produži funkciju f do periodičke funkcije definirane na čitavom $\mathbf{R}$.

3.7. Dana je funkcija $f(x)=x^2-1$ na intervalu $[0,2\rangle$. Odredi i skiciraj:

1) periodičko proširenje,

2) parno periodičko proširenje.

3.8. Dana je funkcija $f(x)=2x-1$ na intervalu $\langle 0,1]$. Nađi:

1) parno periodičko proširenje

2) neparno periodičko proširenje.

3.9. Pokaži da je rastav funkcije

$$f(x)=f_p(x)+f_n(x)$$

na zbroj parne i neparne funkcije jedinstven.

3.10. Neka je P polinom. Dokaži:

1) P je parna funkcija ako i samo ako ima samo parne potencije;

2) P je neparna funkcija ako i samo ako ima samo neparne potencije.

3.11. Dokaži sljedeću **tablicu množenja, zbrajanja i komponiranja** funkcija:

$$\begin{gathered}
\text{parna} + \text{parna} = \text{parna}\\
\text{parna} \times \text{parna} = \text{parna}\\
\text{parna} \circ \text{parna} = \text{parna}\\
\text{neparna} + \text{neparna} = \text{neparna}\\
\text{neparna} \times \text{neparna} = \text{parna}\\
\text{neparna} \circ \text{neparna} = \text{neparna}\\
\text{neparna} \times \text{parna} = \text{neparna}\\
\text{parna} \circ \text{neparna} = \text{parna}\\
\text{neparna} \circ \text{parna} = \text{parna}
\end{gathered}$$

3.12. Neka je f bijekcija i neparna funkcija. Dokaži da je onda i inverzna funkcija f^{-1} također neparna funkcija.

3.13. Dokaži da je jedina funkcija definirana na čitavom $\mathbf{R}$, koja je istodobno i parna i neparna funkcija $f(x) = 0$.

3.14. Dana je funkcija $f(x)$ sa

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \\ -|\sin x|, & 2\pi < x < 4\pi. \end{cases}$$

Produži funkciju $f(x)$ do periodičke funkcije definirane na čitavom $\mathbf{R}$.

3.15. Funkciju $f(x) = x^2$, $0 < x \leqslant 2$ produži do periodičke funkcije definirane na čitavom $\mathbf{R}$. Nađi eksplicitnu formulu te funkcije. (Odgovor: $(x + 2 + 2\lfloor -\frac{x}{2} \rfloor)^2$).

3.16. Nacrtaj graf periodičke funkcije s periodom $T = 2$, koja je dana formulom

$$F(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 - x, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Odredi njenu eksplicitnu formulu na intervalu $[2k - 1, 2k + 1]$.

3.17. Dana je funkcija $f(x) = 2(x-1)^2$ na intervalu $[0, 2]$. Produži funkciju f do periodičke funkcije definirane na čitavom $\mathbf{R}$. Napiši njenu eksplicitnu formulu na intervalu $[2k, 2k + 2]$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.18. Dana je funkcija $f(x)$ sa

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & \pi \leqslant x \leqslant 2\pi, \\ -(x - 2\pi)^2, & 2\pi \leqslant x \leqslant 3\pi. \end{cases}$$

Produži ovu funkciju do periodičke funkcije definirane na čitavom $\mathbf{R}$. Napiši njenu eksplicitnu formulu na intervalu $[k\pi, (k + 3)\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.19. Nacrtaj graf periodičke funkcije s periodom $T = \pi$, koja je dana formulom

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}, \\ -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Odredi njenu ekplicitnu formulu na intervalu $[k\pi, (k+1)\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.20. Dana je funkcija $f(x)$ na intervalu $[0, 5]$ formulom

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1, 4 \leqslant x \leqslant 5, \\ x-1, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1, & 2 \leqslant x \leqslant 3, \\ -x+4, & 3 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$$

Produži funkciju f do periodičke funkcije definirane na čitavom $\mathbf{R}$. Napiši njenu eksplicitnu formulu na intervalu $[5k, 5(k+1)]$, $k \in \mathbf{Z}$.

4.

Operacije s periodičkim funkcijama

Krenuvši od jednostavnih funkcija algebarskim operacijama ili komponiranjem funkcija možemo stvarati sve složenije i složenije funkcije. Ako su sve ili bar neke početne funkcije periodičke, pod kakvim će se uvjetima periodičnost čuvati?

Navedimo nekoliko primjera.

Primjer 4.1. 1° Zbroj dviju periodičkih funkcija istoga temeljnog perioda periodička je funkcija istoga temeljnog perioda:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin(x + \tfrac{\pi}{3}).$$

2° Zbroj dviju periodičkih funkcija istoga temeljnog perioda periodička je funkcija *drugoga* temeljnog perioda:

$$(\sin x + \sin 2x) + (-\sin x) = \sin 2x.$$

U prvoj je zagradi periodička funkcija perioda 2π, u drugoj također, dok je njihov zbroj periodička funkcija temeljnoga perioda π.

3° Zbroj periodičkih funkcija *različitoga* temeljnoga perioda periodička je funkcija:

$$\sin 2x + \cos 3x.$$

Prvi je pribrojnik periodička funkcija perioda π, druga perioda $2\pi/3$. Zbroj je periodička funkcija perioda 2π.

4° Zbroj periodičkih funkcija različitoga perioda nije periodička funkcija:

$$\sin x + \sin \pi x.$$

5° Kompozicija periodičke funkcije s neperiodičkom je periodička (tamo gdje je definirana):

$$\log(\sin x).$$

6° Kompozicija periodičke funkcije s neperiodičkom nije periodička:

$$\sin(x^2).$$

Analogni se primjeri mogu naći i za umnožak odnosno kvocijent periodičkih funkcija.

* * *

Pokušajmo sistematizirati svojstva periodičkih funkcija iskazanih u ovim primjerima. Krenimo s funkcijama istoga perioda.

U sljedećim teoremima nužno je zahtijevati da periodičke funkcije s kojima vršimo neke algebarske operacije imaju *isto* područje definicije. Zbog jednostavnosti iskaza teorema, pretpostavljat ćemo da su sve funkcije definirane na čitavom $\mathbf{R}$.

Teorem 4.1. *Neka su f i g periodičke funkcije perioda T. Tada su funkcije $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, f/g (tamo gdje je $g\neq 0$) periodičke perioda T.*

Dokaz. Dokaz je trivijalan i prepuštamo ga čitatelju. Međutim ovdje je važno spomenuti da se pri svim ovim operacijama *temeljni* period funkcije može promijeniti (smanjiti!). Primjer za zbroj (razliku) dan je u 2°. Kao primjer za umnožak (kvocijent) mogu poslužiti sinus i kosinus funkcije koje su perioda 2π, dok je njihov umnožak i kvocijent periodičak funkcija perioda π:

$$\sin x\cdot\cos x=\tfrac{1}{2}\sin 2x,\qquad \frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg} x.$$

S tim u vezi važno je naglasiti da *ne postoji* općeniti postupak koji bi nam ukazao koliki će biti *temeljni* period zbroja, razlike, umnoška ili kvocijenta periodičkih funkcija.

Teorem 4.2. *Neka je f periodička funkcija perioda T i g proizvoljna funkcija takva da je definirana kompozicija $h(x)=g(f(x))$. Tada je h periodička funkcija istoga perioda T.*

Dokaz. Dokaz je ponovo trivijalan:

$$h(x+T)=g(f(x+T))=g(f(x))=h(x).$$

* * *

I ovdje je važno primijetiti da se temeljni period *može umanjiti*. Evo primjera. Neka je $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$. Njihova kompozicija je

$$h(x) = g(f(x)) = (\sin x)^2$$

periodička funkcija temeljnoga perioda π. Također, ne postoji način da unaprijed predvidimo da li će se temeljni period umanjiti niti koliki će biti. Stoga je korisno izvježbati određivanje temeljnih perioda kompozicija na nizu primjera.

Primjer 4.2. Neka je f periodička funkcija perioda T, a g proizvoljna funkcija. Za obrnutu kompoziciju $f(g(x))$ nećemo iskazati teorem o eventualnoj periodičnosti *jer taj nije istinit*. Evo primjera za gore navedene funkcije f i g; funkcija

$$h(x) = f(g(x)) = \sin(x^2)$$

nije periodička.

* * *

Kažimo sada što se događa kad krećemo s periodičkim funkcijama različitoga (temeljnoga) perioda.

Primjeri navedeni u drugome poglavlju sugeriraju da se mogu dogoditi dvije bitno različite situacije: zbroj periodičkih funkcija može, ali ne mora biti periodička funkcija (isto vrijedi i za proizvoljnu drugu operaciju). Svojstvo periodičnosti će ovisiti o međusobnom omjeru temeljnih perioda.

Definicija. Neka su T_1 i T_2 periodi periodičkih funkcija f i g. Za njih kažemo da su **sumjerljivi** ako je kvocijent T_1/T_2 racionalan broj.

Ako su T_1 i T_2 sumjerljivi, tada postoje *prirodni* brojevi p i q takvi da vrijedi

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q}.$$

Tada je $qT_1 = pT_2$. Stoga je

$$T = qT_1 = pT_2$$

zajednički period obiju funkcija (višekratnik perioda je period!). Time možemo primjeniti teorem 4.1 i dobivamo:

Teorem 4.3. *Zbroj, razlika, umnožak i kvocijent periodičkih funkcija sa sumjerljivim periodima ponovo je periodička funkcija.*

Period te funkcije dobiva se gornjim postupkom. Temeljni period može pak biti i manji.

Primjer 4.3. Evo primjera za gornji teorem.

f	g	zajednički period	primjer funkcije
π	$\pi/3$	π	$\operatorname{tg} x + \cos 6x$
4π	6π	12π	$\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{3}$
2π	$\sqrt{2}\pi$	ne postoji	$\cos x + \sin \sqrt{2}\, x$

* * *

Obrat ovoga teorema također je istinit: Zbroj dviju periodičkih funkcija periodička je funkcija ako i samo ako su im periodi sumjerljivi! Dokaz toga prelazi međutim nivo našeg razmatranja. Dat ćemo ga u posljednjem poglavlju.

Riješeni zadaci

4.1. Dokaži da je funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ periodička i nađi joj temeljni period.

▷ Temeljni period funkcije tangens, baš kao i kotangens je π. Stoga je funkcija f periodička s periodom π. Da bismo utvrdili da joj je to temeljni period, potrebno je funkciju prikazati u drugome obliku. Vrijedi

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

Budući da je temeljni period funkcije $\sin 2x$ jednak π, to je π temeljni period promatrane funkcije.

4.2. Odredi funkciju $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koja nije periodička, ali je $x \mapsto f(x)^2$ periodička.

▷ Takva je npr. funkcija

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Kvadrat ove funkcije je konstantna funkcija, koja je periodička.

Koristeći ovu ideju možemo naći i primjer neperiodičke funkcije za koju je $f(x)^2$ periodička, različita od konstante! Definirajmo funkciju f ovako:

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x, & x \in [2k, 2k+1] \text{ za neki } k \in \mathbf{Z}, \\ \sin x, & x \in [2k-1, 2k] \text{ za neki } k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Njen je kvadrat periodička funkcija $f(x)^2 = \sin^2 x$ perioda π. Uvjerite se da f nije periodička! (Jedini kandidat za period $T = 2\pi$ otpada, nacrtajte sliku!)

4.3. Odredi period funkcije $f(x) = \cos(\sin(\sin x))$.

▷ Stavimo $x = 0$ u jednadžbu $f(x+T) = f(x)$:

$$\cos(\sin(\sin(0+T)) = \cos(\sin(\sin 0)) = 1.$$

Zato je $\sin(\sin T) = 2k\pi$ što može biti samo ako je $\sin(\sin T) = 0$. Slično, odavde je $\sin T = 0$ te konačno $T = k\pi$, $k \in \mathbf{N}$. Lako je provjeriti da je $T = \pi$ temeljni period.

4.4. Odredi temeljni period funkcije $f(x) = \sin 3\pi x + 2\cos\frac{\pi}{2}x$.

▷ *1. način* Neka je T period od f. Onda za svaki $x \in \mathbf{R}$ mora biti

$$\sin 3(x+T) + 2\cos\tfrac{\pi}{2}(x+T) = \sin 3\pi x + 2\cos\tfrac{\pi}{2}x.$$

Ako u ovu jednakost stavimo $x = 0$, pa zatim $x = -T$, dobivamo

$$\sin 3\pi T + 2\cos\tfrac{\pi}{2}T = 2,$$
$$-\sin 3\pi T + 2\cos\tfrac{\pi}{2}T = 2.$$

Nakon zbrajanja tih jednakosti izlazi

$$\cos\frac{\pi T}{2} = 1.$$

te je $T = 4k$, $k \in \mathbf{N}$. Ako temeljni period postoji, on je neki od ovih brojeva. Provjeravamo najprije najmanji među njima. $T = 4$ daje

$$\begin{aligned} f(x+4) &= \sin 3\pi(x+4) + 2\cos\frac{\pi}{2}(x+4) \\ &= \sin(3\pi x + 12\pi) + 2\cos(\frac{\pi}{2}x + 2\pi) \\ &= \sin 3\pi x + 2\cos\frac{\pi}{2}x = f(x) \end{aligned}$$

i to jest temeljni period.

2. način. Za funkciju $f_1(x) = \sin 3\pi x$ temeljni period je $T_1 = \frac{2}{3}$. temeljni period funkcije $f_2(x) = 2\cos\frac{\pi}{2}x$ je $T_2 = 4$. Ova su dva broja sumjerljiva, jer je $6T_1 = T_2$. Stoga je $T = T_2$ period funkcije f. (Time nismo provjerili da je to *temeljni period*. Detaljniji pogled na funkciju — pribrojnici se sastoje od samo jednoga člana — omogućava nam zaključiti da je taj period temeljni.)

4.5. Odredi temeljni period funkcije $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$.

▷ Iz jednakosti

$$|\sin(x+T)| + |\cos(x+T)| = |\sin x| + |\cos x|$$

za $x = 0$ izlazi
$$|\sin T| + |\cos T| = 1.$$
Kvadriranjem ove jednakosti dobivamo
$$2|\sin T| \cdot |\cos T| = 1 \implies |\sin 2T| = 1.$$
Odavde je $T = k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{N}$. Provjerimo je li $T = \frac{\pi}{2}$ period funkcije f.
$$\begin{aligned} f(x + \frac{\pi}{2}) &= |\sin(x + \frac{\pi}{2})| + |\cos(x + \frac{\pi}{2})| \\ &= |\cos x| + |-\sin x| = \cos x| = |\sin x| = f(x). \end{aligned}$$
Zaključujemo da je $T = \frac{\pi}{2}$ temeljni period.

4.6. Ako je funkcija $f(x) = \cos x + \cos a_1x + \cos a_2x + \ldots + \cos a_nx$ periodička, onda su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ racionalni brojevi. Dokaži!

▷ Neka je $T > 0$ period funkcije f. Tada vrijedi za svaki $x \in \mathbf{R}$:
$$\begin{aligned} \cos(x + T) + \cos a_1(x + T) + \ldots + \cos a_n(x + T) \\ = \cos x + \cos a_1x + \ldots + \cos a_nx \end{aligned}$$
odnosno
$$\begin{aligned} [\cos(x + T) - \cos x] + [\cos a_1(x + T) - \cos a_1x] + \ldots \\ + [\cos a_n(x + T) - \cos a_nx] = 0 \end{aligned}$$
Posebno, za $x = 0$ mora vrijediti
$$[1 - \cos T] + [1 - \cos a_1T] + \ldots + [1 - \cos a_nT] = 0$$
tj.
$$2\sin^2\frac{T}{2} + 2\sin^2\frac{a_1T}{2} + \ldots + 2\sin^2\frac{a_nT}{2} = 0.$$
Svi su pribrojnici pozitivni, pa mora biti
$$\sin\frac{T}{2} = \sin\frac{a_1T}{2} + \ldots = \sin\frac{a_nT}{2} = 0.$$
Odavde slijedi
$$T = 2k\pi,\ a_1T = 2k_1\pi, \ldots, a_nT = 2k_n\pi$$
za neke cjelobrojne $k, k_1, \ldots, k_n$. Eliminacijom broja T dobivamo
$$a_1 = \frac{k_1}{k},\ a_2 = \frac{k_2}{k}, \ldots,\ a_n = \frac{k_n}{k}$$
a to znači da su brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ racionalni.

4.7. Je li funkcija $f(x) = \cos(\sqrt{2}x) + \cos(\sqrt{3}x)$ periodička?

▷ Uvrstimo u identitet
$$\cos(\sqrt{2}(x + T)) + \cos(\sqrt{3}(x + T)) = \cos(\sqrt{2}x) + \cos(\sqrt{3}x)$$
vrijednost $x = 0$:
$$\cos(\sqrt{2}T) + \cos(\sqrt{3}T) = 2.$$

Oba pribrojnika moraju biti jednaka 1. Stoga je

$$\sqrt{2}T = 2k\pi, \qquad \sqrt{3}T = 2n\pi, \qquad \text{za neke } k, n \in \mathbf{Z}.$$

Dijeljenjem ovih jednakosti zaključujemo da za neke cjelobrojne k i n vrijedi

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{k}{n}$$

što je nemoguće, jer je s lijeve strane iracionalan broj.

4.8. Dokaži da funkcija $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ nije periodička.

▷ Funkcija nije definirana *samo* u točki $x = 0$ zato ne može biti periodička.

4.9. Dokaži da funkcija $f(x) = \cos\sqrt{x}$ nije periodička.

▷ *1. način.* Pretpostavimo da je T period funkcije. tada mora vrijediti

$$\cos\sqrt{x+T} = \cos\sqrt{x}$$

za svaki realni broj x. Stoga možemo pisati

$$\sqrt{x+T} = \pm x + 2k\pi, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

Kvadriranjem dobivamo identitet

$$T = \pm 4k\pi\sqrt{x} + 4k^2\pi^2$$

koji bi trebao vrijediti za svaki pozitivni x, što je nemoguće.

2. način. Maksimum funkcije f (jednak 1) postiže se u točkama $\sqrt{x} = 2k\pi$, odnosno $x = 4k^2\pi^2$. Kako razlika tih točaka nije stalna već se povećava s k, to znači da se razmak između dva uzastopna maksimuma povećava te funkcija ne može biti periodička.

3. način. Područje definicije funkcije je $D(f) = \mathbf{R}^+$. Takva funkcija ne može biti periodička jer za $x < T$ broj $x - T$ nije više u domeni!

4.10. Odredi sve $a \in \mathbf{R}$ takve da je funkcija $f(x) = \cos(ax) + \cos x$ periodička.

▷ Iz osnovne relacije

$$\cos a(x+T) + \cos(x+T) = \cos ax + \cos x$$

za $x = 0$ slijedi

$$\cos aT + \cos T = 2.$$

Ova je jednakost ispunjena samo ako su oba pribrojnika jednaka 1. Odavde slijedi

$$aT = 2k\pi, \qquad T = 2n\pi, \qquad \text{za neke } k, n \in \mathbf{Z}.$$

Odavde slijedi $a = \frac{k}{n}$, a je racionalni broj.

4.11. Odredi temeljni period funkcije $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$.

▷ Danu funkciju možemo pisatu u obliku

$$f(x) = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^2 x \sin^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.$$

Lako je provjeriti da je temeljni period ove funkcije $\pi/2$.

4.12. Je li funkcija $f(x) = \sin|x|$ periodička?

▷ Ne. To je parna funkcija koja za pozitivne x izgleda poput sinusa. Nacrtaj sliku!

4.13. Je li funkcija $f(x) = |\sin|x||$ periodička? Ako jest, odredi joj temeljni period.

▷ Za pozitivni x vrijedi $|\sin|x|| = |\sin x|$. Za negativni x je $|\sin|x|| = |-\sin x| = |\sin x|$. Zato je $f(x) = |\sin x|$. To je periodička funkcija temeljnoga perioda π. Provjeri!

4.14. Je li moguće:

1) da zbroj dviju svuda definiranih periodičkih funkcija bude neperiodička funkcija?

2) da zbroj dviju svuda definiranih neperiodičkih funkcija bude periodička funkcija?

3) da zbroj svuda definirane neperiodičke i svuda definirane periodičke funkcije bude periodička funkcija?

▷ 1) Da, npr. $f(x) = \cos x$, $g(x) = \cos(x\sqrt{2})$. $D(f) = D(g) = \mathbf{R}$, $T_1 = 2\pi$, $T_2 = \sqrt{2}\pi$; $f(x) + g(x) = \cos x + \cos(x\sqrt{2})$ je neperiodička funkcija.

2) Da, npr. $f(x) = e^x + 2\sin x$, $g(x) = -e^x$, $D(f) = D(g) = \mathbf{R}$; $f(x) + g(x) = 2\sin x$, a to je periodička funkcija.

3) Da, npr. $f(x) = \cos x + \cos(x\sqrt{3})$, $g(x0 = 2 - \cos(x\sqrt{3})$, $f(x) + g(x) = 2 + \cos x$ je periodička funkcija.

4.15. Dokaži da je funkcija $f(x) = \sqrt{e^{2\cos(\sqrt{x})^2}}$ neperiodička.

▷ Pretpostavimo da je $f(x)$ periodička funkcija. Onda moraju biti periodičke i ove funkcije:

$$f_1(x) = (f(x))^2 = e^{2\cos(\sqrt{x})^2},$$

$$f_2(x) = \ln f_1(x) = 2\cos(\sqrt{x})^2.$$

Međutim, $D(f_2) = [0, = \infty\rangle$, pa f_2 ne može biti periodička funkcija. To znači da ni $f(x)$ nije periodička funkcija.

4.16. Dokaži da funkcija $f = \cos x \cdot \cos(x\sqrt{2})$ nije periodička.

▷ Uočimo da funkcija f za $x = 0$ prima vrijednost 1, pa riješimo jednadžbu

$$\cos x \cdot \cos(x\sqrt{2}) = 1. \tag{4.1}$$

Dalje je:

1) $\cos x = 1, \qquad \cos(x\sqrt{2}) = 1$;

ili

2) $\cos x = -1, \qquad \cos(x\sqrt{2}) = -1$.

1) $x = 2k\pi$ i $x\sqrt{2} = 2l\pi$, $k, l \in \mathbf{Z}$. Ako za neke k, l, $x \neq 0$ zadovolji obje jednadžbe, onda nakon dijeljenja imamo $\sqrt{2} = \frac{l}{k} \in \mathbf{Q}$, a to je proturječje. To ipak znači da u slučaju 1) imamo jedino rješenje $x = 0$.

2) Analognim postupkom možemo pokazati da u ovom slučaju uopće nemamo rješenje(uvjeri se u to!).

Prema tome iumamo $f(x) = 1$ samo za $x = 0$, drugim riječima jednadžba (1) ima samo jedno rješenje. To znači da funkcija f prima vrijednost 1 samo jednom, pa ne može biti periodička.

4.17. Dokaži da funkcija $f(x) = \sin \cdot \sin(x\sqrt{2})$ nije periodička.

▷ Najprije primjetimo da rasuđivanje provedemo u §.16. zadatku ovdje ne ide (uvjeri se!). Zato moramo postupiti drugačije.

Potražimo nultočke funkcije $f(x)$, tj. nađimo sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je $f(x) = 0$. Iz $\sin x \cdot \sin(x\sqrt{2}) = 0$ izlazi $\sin x = 0$ ili $\sin(x\sqrt{2}) = 0$, tj. $x = a_k = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ ili $x = b_l = \dfrac{l\pi}{\sqrt{2}}$, $l \in \mathbf{Z}$.

Pretpostavimo sada da je f periodička funkcija s periodom T. Ako je $f(T) = f(0+T) = f(0) = 0$, onda je ili $T = a_{k_0}$ ili $T = b_{l_0}$ za neke $k_0, l_0 \neq 0$. Uzmimo najprije slučaj da je $T = a_{k_0}$. Kako je $f(b_1 + T) = f(b_1) = 0$, to broj $b_1 + T = b_1 + a_{k_0}$ mora biti ili a_k ili b_l. U prvom slučaju imamo $b_1 + a_{k_0} = a_k$, tj. $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} + \pi \cdot k_0 = \pi k$, paje $\frac{1}{\sqrt{2}} = k - k_0$, odnosno $\sqrt{2} = \dfrac{1}{k - k_0} \in \mathbf{Q}$, što je proturiječje. U drugom slučaju imamo $b_1 + a_{k_0} = b_l$ tj. $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} + \pi \cdot k_0 = \dfrac{\pi \cdot l}{\sqrt{2}}$, pa je $\dfrac{l-1}{\sqrt{2}} = k_0$, odnosno $\sqrt{2} = \dfrac{l-1}{k_0} \in \mathbf{Q}$, šrto je opet proturječje. Analognim postupkom bi u slučaju $T = b_{l_0}$ došli do proturječja (uradi to!). Prema tome, naša pretpostavka da je f periodička funkcija mora se oboriti.

Zadaci za vježbu

4.18. Nacrtaj graf funkcije $m(x) = \min\{\sin x, \cos x\}$, $x \in \mathbf{R}$, i odredi joj period.

4.19. Nađi temeljni period (ako postoji) funkcije:

1) $f(x) = \cos 4x + \operatorname{tg} 3x$;

2) $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}$;

3) $f(x) = \sqrt{\sin(\cos x)}$;

4) $f(x) = |\sin x| + |\sin(x+1)| + |\sin(x+2)|$;

5) $f(x) = \cos x - \ln \cos x$;

6) $f(x) = 9\cos^2 12 + 12\cos^2 9x$.

4.20. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = \dfrac{|\sin x|}{2\cos x} + \dfrac{\sin x}{2|\cos x|}$. Koji je period te funkcije?

4.21. Dokaži da nisu periodičke ove funkcije:

1) $f(x) = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$;

2) $f(x) = \frac{1}{2}(2^x - 2^{-x})$;

3) $f(x) = \cos ax + \sin x$, a je iracionalan broj;

4) $f(x) = \cos \sqrt[3]{|x|^2}$;

5) $f(x) = \sqrt{3^{\sin(x^2)}}$.

4.22. Je li funkcija $f(x) = \sin \dfrac{\pi}{2^x}$ periodička?

4.23. Je li funkcija $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} + \sqrt{\ln \cos x}$ periodička?

4.24. Nađi temeljni period (ako postoji) funkcije

$$f(x) = 4\cos^3 x \cdot \sin 3x + 4\sin^3 \cdot \cos 3x.$$

4.25. Dokaži da je funkcija $f(x) = \sin \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \sin(x\sqrt{2})$ periodička i nađi joj temeljni period.

4.26. Je li funkcija $f(x) = e^{\sqrt{|\cos x - 1}}$ periodička? Nacrtaj sliku.

4.27. Je li funkcija $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x}$ periodička?

4.28. Je li funkcija $f(x)=\sqrt{\ln\frac{1}{|\sin x|}}$ periodička?

4.29. Funkcija $f(x)=\cos(ax+\sin bx)$, $a,b\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ je periodička ako i samo ako je $\frac{a}{b}\in\mathbf{Q}$. Dokaži.

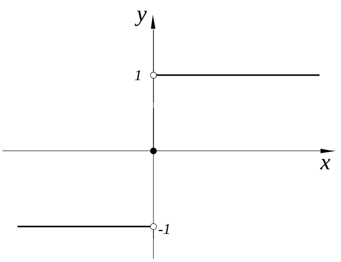
5.

Nestandardni primjeri periodičkih funkcija

Funkcija signum. Funkcija signum (predznak) označava se simbolom sgn i definira formulom

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Njen graf dan je na slici **??**.



Sl. 5.1. Graf funkcije signum

Dakako, ova funkcija nije periodička. Međutim, komponiranjem ove funkcije s periodičkim funkcijama možemo izvesti interesantne periodičke funkcije.

Primjer 5.1. Funkcija $f(x) = \sin \pi x$ periodička je funkcija s periodom 2. Njena kompozicija s funkcijom signum periodička je funkcija perioda 2:

$$h(x) = \operatorname{sgn}(\sin x).$$

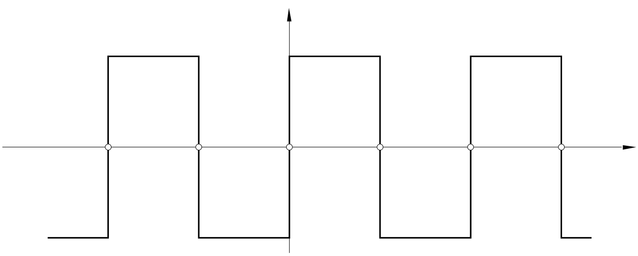
Kako ona izgleda? Kako vrijedi

$$\sin \pi x \begin{cases} < 0, & -1 < x < 0, \\ = 0, & x = 0, \\ > 0, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

to eksplicitna formula ove funkcije, na intervalu duljine jednog perioda glasi:

$$h(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Na drugim intervalima funkcija izgleda poput periodičkog proširenja ove funkcije (sl. **??**).



Sl. 5.2. Graf funkcije $\operatorname{sgn}(\sin \pi x)$. *Vertikalne crte, dakako, ne pripadaju grafu funkcije — nacrtane su stoga jer uljepšavaju ovakve slike!*

Ova je funkcija neparna, jer je kompozicija dviju neparnih funkcija.

* * *

Ako je f proizvoljna periodička funkcija, tada je kompozicija $\operatorname{sgn}(f(x))$ uvijek periodička funkcija, definirana formulom

$$\operatorname{sgn}(f(x)) = \begin{cases} -1, & f(x) < 0, \\ 0, & f(x) = 0, \\ 1, & f(x) > 0. \end{cases}$$

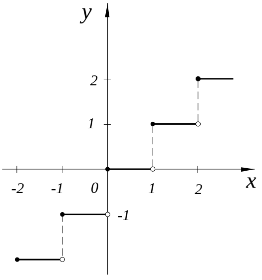
Uvrsti ovdje neke druge primjere funkcija f i izračunaj eksplicitnu formulu ove kompozicije. Primjeti da će ona biti konstantna, ukoliko je f stalnoga predznaka.

* * *

Funkcija najveći cijeli dio. Neka je x proizvoljan realni broj. Funkcija **najveći cijeli dio** broja x označava se s $\lfloor x \rfloor$ i definira kao *najveći cijeli broj* $\leqslant x$.

Tako, na primjer, vrijedi $\lfloor 2.5 \rfloor = 2$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor = -2$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$, $\lfloor -3 \rfloor = -3$ i slično.

Graf funkcije najveći cijeli dio dan je na slici **??**.



Sl. 5.3. Graf funkcije najveći cijeli dio stepenasta je funkcija

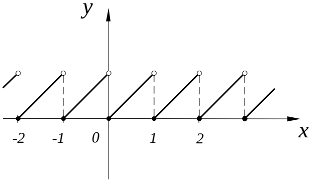
Najveći cijeli dio ne definira periodičku funkciju, međutim, razlika broja i njegovog najvećeg cijelog dijela to jeste!

Decimalni dio broja x označavamo simbolom $\{x\}$ i definiramo formulom:

$$\{x\} := x - \lfloor x \rfloor.$$

Tako na primjer vrijedi $\{1.53\} = 0.53$, $\{\frac{9}{4}\} = 2$, $\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - 1$, $\{3\} = 0$ ali $\{-1.2\} = 0.8$, $\{-\frac{1}{3}\} = \frac{2}{3}$ i slično.

Graf ove funkcije dan je na slici **??**



Sl. 5.4. Decimalni dio broja x definira periodičku funkciju

Decimalni dio predstavlja periodičko proširenje funkcije

$$f(x) = x, \qquad 0 \leqslant x < 1.$$

* * *

Zadatak 5.2. Odredi temeljni period funkcije

$$f(x) = 1 + 3\{x + 0.25\}.$$

$\triangleright$ Vrijedi $D(f) = \mathbf{R}$. Neka je T period dane funkcije. Onda vrijedi

$$1 + 3\{x + 0.25 + T\} = 1 + 3\{x + 0.25\}, \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Specijalno, za $x = -0.25$ imamo $\{T\} = 0$. Zato je T cjelobrojan. Uzmimo $T = 1$ i provjerimo je li to period od f.

$$f(x+1) = 1 + 3\{x + 0.25 + 1\} = 1 + 3\{x + 0.25\} = f(x).$$

Stoga je $T = 1$ temeljni period dane funkcije.

Zadatak 5.3. Pokaži da funkcija $f(x) = \{x\} + \sin x$ nije periodička.

$\triangleright$ Period funkcije $\{x\}$ je 1, period sinusa 2π. Ova dva broja nisu sumjerljiva, zato njihov zbroj nije periodička funkcija.

Tu činjenicu možemo direktno provjeriti na sljedeći način. Pretpostavimo da je funkcija periodička, s periodom T. Iz identiteta

$$\{x + T\} + \sin(x + T) = \{x\} + \sin x$$

uvrštavanjem brojeva $x = 0$ i $x = -T$ slijedi

$$\{T\} + \sin T = 0,$$
$$\{-T\} - \sin T = 0.$$

Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo $\{T\} + \{-T\} = 0$. kako su oba pribrojnika nenegativna, to mora biti $\{T\} = 0$ te je T cjelobrojan. Iz prve jednakosti sada čitamo $\sin T = 0$ i odavde $T = k\pi$, za neki $k \in \mathbf{Z}$. Međutim, nijedan takav nije cjelobrojan (osim $T = 0$ kojeg ne uzimamo u obzir).

* * *

Arcus funkcije. Arcus (čitaj: arkus) funkcije inverzne su funkcije trigonometrijskim. Označavamo ih simbolima $\arcsin$, $\arccos$, $\operatorname{arc\,tg}$, $\operatorname{arc\,ctg}$ i nazivamo (redom) arcus sinus, arcus kosinus, arcus tangens i arcus kotangens. Za nas će (pri proučavanju periodičkih funkcija) biti interesantne funkcije arcus sinus i arcus kosinus.

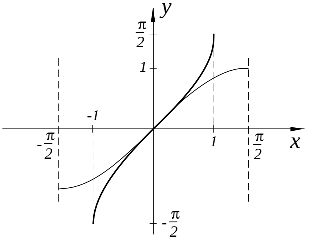
Opišimo kako dobivamo funkciju arcus sinus. Njena je definicija:

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y.$$

Kako sinus poprima vrijednost unutar intervala $[-1, 1]$, to slijedi da je funkcija arcus sinus definirana na intervalu $[-1, 1]$. Vrijednost funkcije u točki x odgovara onome y za koji je $\sin y = x$. Međutim, poznato nam je da jednadžba

$$\sin y = x \tag{5.1}$$

ima beskonačno mnogo rješenja y. Da bismo mogli odrediti funkciju arcus sinus jednoznačno, moramo se ograničiti samo na ona rješenja koja leže unutar intervala $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Naime, za svaki $x \in [-1, 1]$ jednadžba (5.1) ima *jedinstveno* rješenje unutar toga intervala. To rješenje vrijednost je funkcije arcus sinus u točki x. Graf funkcije arcus sinus dan je na slici **??**.

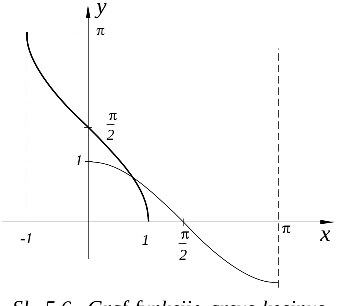


Sl. 5.5. Graf funkcije arcus sinus

Na primjer, $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{\pi}{6}$.

$* \ * \ *$

Slično se dobiva i funkcija arcus kosinus. I ona je definirana na intervalu $[-1, 1]$, ali poprima vrijednosti unutar intervala $[0, \pi]$ (sl **??**).



Sl. 5.6. Graf funkcije arcus kosinus

$* \ * \ *$

U kakvoj su vezi ove funkcije s periodičkim funkcijama. Njihova kompozicija s periodičkom funkcijom ponovo je periodička funkcija, po teoremu 4.2.

Stavimo

$$f(x) = \arcsin(\sin x).$$

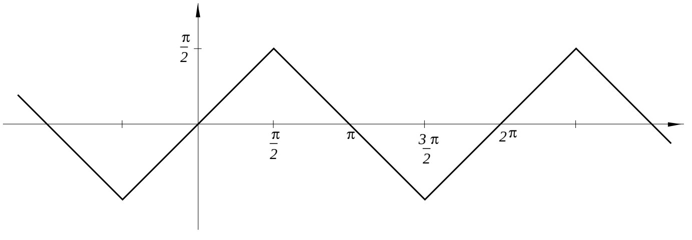
Ovo je periodička funkcija perioda 2π! Ona je neparna funkcija jer su i sinus i arcus sinus neparne funkcije. Moramo odrediti njenu formulu na intervalu $[0, \pi]$. Na intervalu $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ona glasi

$$f(x) = \arcsin(\sin x) = x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

jer su tu arcus sinus i sinus inverzne funkcije! Da bismo odredili funkciju u potpunosti, još moramo odrediti njenu vrijednost na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Za broj x iz tog intervala vrijedi $\sin x = \sin(\pi - x)$, pri čemu je $0 \leqslant \pi - x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Zato je

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\pi - x) = \pi - x, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi.$$

Zaključujemo da funkcija f predstavlja periodičko proširenje ove funkcije. Njen je graf dan na slici **??**.



Sl. 5.7. Graf funkcije $\arcsin(\sin x)$

Kolika je vrijednost ove funkcije recimo u točki $x = 20$? Računanući džepnim računalom dobivamo

$$\arcsin(\sin 20) = 1.150.$$

Mi znamo da je ova vrijednost dobivena iz formule

$$f(x) = \begin{cases} x - 2k\pi, & \text{ako je } -\frac{\pi}{2} \leqslant x - 2k\pi \leqslant \frac{\pi}{2}; \\ \pi - (x - 2k\pi), & \text{ako je } -\pi < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2} \\ & \quad \text{ili } \frac{\pi}{2} < x - 2k\pi < \pi. \end{cases}$$

gdje je k takav cijeli broj da vrijedi $-\pi < x - 2k\pi < \pi$. Dakle, $k = 3$ i pošto je $-\frac{\pi}{2} < 20 - 6\pi < \frac{\pi}{2}$,

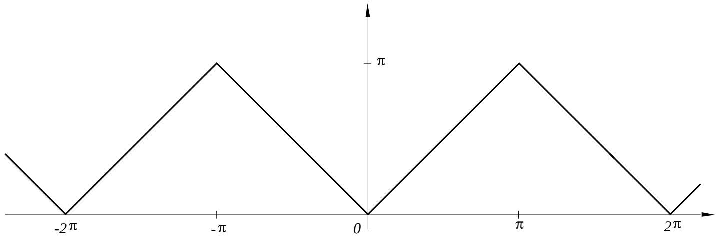
$$f(20) = 20 - 6\pi.$$

* * *

Slično se može kazati i za funkciju $\arccos(\cos x)$. I to je periodička funkcija perioda 2π, koja na intervalu $0 \leqslant x \leqslant \pi$ ima formulu

$$\arccos(\cos x) = x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Kako je ta funkcija parna (jer je kosinus parna funkcija), to ona predstavlja parno periodičko proširenje funkcije dane gornjom formulom. Graf je dan na slici **??**.



Sl. 5.8. Graf funkcije $\arccos(\cos x)$

Formula za računanje vrijednosti ove funkcije glasi

$$\arccos(\cos x) = |x - 2k\pi|$$

gdje je k cijeli broj za koji vrijedi $-\pi < x - 2k\pi \leqslant \pi$.

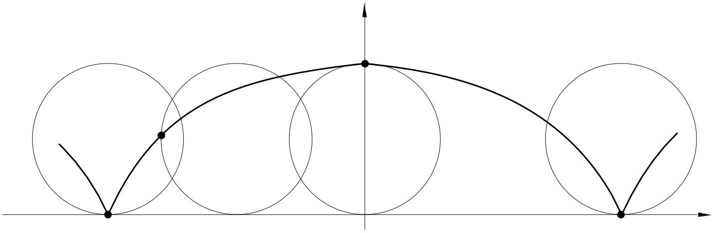
Evo vrijednosti funkcije u nekim točkama

$$\arccos(\cos \tfrac{17\pi}{3}) = |\tfrac{17\pi}{3} - 6\pi| = \tfrac{\pi}{3},$$
$$\arccos(\cos -\tfrac{15\pi}{2}) = |-\tfrac{15\pi}{2} + 8\pi| = \tfrac{\pi}{2},$$
$$\arccos(5) = |5 - 2\pi| = 2\pi - 5 = 1.283$$

Provjerite ove račune na kalkulatoru (prebacivši ga prethodno na računanje trigonometrisjkih funkcija u radijanima).

* * *

Cikloida. Kotač polumjera A okreće se kutnom brzinom ω kotrljajući se po ravnoj podlozi. Na rubu kotača polumjera A uočimo točku M. U svakome trenutku bilježimo udaljenost točke M do podloge. Funkcija koja prati tu ovisnost naziva se **cikloida**. Njen graf dan je slikom **??**.



Sl. 5.9. Graf cikloide

Cikloida je periodička funkcija perioda $2\pi/\omega$, jer će nakon jednog punog okreta kotača točka doći u početni položaj i gibanje će se ponoviti.

Riješeni zadaci

5.1. Pokaži da je funkcija $f(x) = \operatorname{sgn}\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}$ periodička i nađi joj eksplicitnu formulu.

▷ Budući da je $\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}} = |\sin x|$, a to je periodička funkcija, onda je i f periodička funkcija. Eksplicitna formula ove funkcije glasi

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in Ze\}; \\ 0, & x = k\pi, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

5.2. Je li funkcija $f(x) = \operatorname{sgn}\sqrt{\ln \sin \dfrac{\pi x}{2}}$ periodička? Ako je, nađi joj eksplicitnu formulu.

▷ Domena funkcije $\sqrt{\ln \sin \dfrac{\pi x}{2}}$ je skup $\{1+4k : k \in \mathbf{Z}\}$. To je periodička funkcija perioda 4. Eksplicitna formula glasi

$$F(x) = 0, \quad x \in \{1+4k : k \in \mathbf{Z}\}.$$

5.3. Nađi eksplicitnu formulu kompozicije $f(x) = \operatorname{sgn} 2^{\cos \frac{x-1}{2} - \frac{\pi}{2}}$.

▷ Kako je $2^{\cos \frac{x-1}{2} - \frac{\pi}{2}}$ periodička funkcija i pozitivna je za svaki $x \in \mathbf{R}$, to je $f(x)$ konstantna funkcija, pa njezina eksplicitna formula glasi $F(x) = 1$, $x \in \mathbf{R}$.

5.4. Dana je funkcija $f(x) = \operatorname{sgn}(\ln\cos x)$. Odredi eksplicitnu formulu funkcije f i nacrtaj joj graf.

▷ Funkcija $\ln\cos x$ periodička je funkcija s periodom 2π. Njena kompozicija s funkcijom signum periodička je funkcija perioda 2π.

$$\ln\cos x = \begin{cases} < 0, & -\frac{\pi}{2} < x < 0, 0 < x, \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

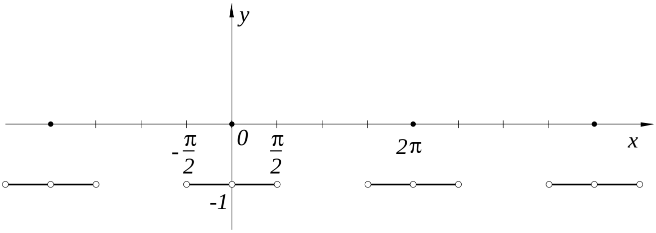
Eksplicitna formula ove funkcije glasi:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\frac{\pi}{2} < x < 0, 0 < x < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Eksplicitna formula periodičkog proširenja ove funkcije glasi:

$$F(x) = \begin{cases} -1, & -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < 2k\pi, 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \\ 0, & x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Graf funkcije je na slici



Sl. 5.10.

5.5. Dana je funkcija $f(x) = \operatorname{sgn}\dfrac{\sin x + \sin 3x}{\sqrt{2\cos 2x + 2}}$. Odredi eksplicitnu formulu ove funkcije.

▷ Funkcija $g(x) = \dfrac{\sin x + \sin 3x}{\sqrt{2\cos 2x + 2}}$ periodička je funkcija s periodom 2π (dokaži!). Njena kompozicija s funkcijom signum periodička je funkcija perioda 2π.

Budući da vrijedi

$$g(x) = \begin{cases} < 0, & -\pi < x <= \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < x < 0; \\ = 0, & x = -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi; \\ > 0, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x < \pi, \end{cases}$$

onda eksplicitna formula periodickog proširenja ove funkcije glasi:

$$F(x) = \begin{cases} -1, & (2k-1)\pi < x < -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < 2k\pi; \\ 0, & x = k \cdot \frac{\pi}{2}; \\ 1, & 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

5.6. Tramvaj polazi sa neke postaje svakih 10 minuta.

1) Naći zavisnost vremena čekanja tramvaja od vremena dolaska putnika na postaju.

▷

1) Neka je x vrijeme dolaska putnika na postaju, a $f(x)$ vrijeme čekanja tramvaja u minutama. Onda je $f(x) = 10\{1 - \frac{1}{10}x\}$. Nacrtaj sliku.

5.7. Pokaži da je funkcija $f(x) = 2\cos(\pi x + 1) + \{x\}$ periodička.

▷ Period funkcije $2\cos(\pi x + 1)$ je 2, a funkcije $\{x\}$ je 1. Budući da su brojevi 1 i 2 sumjerljivi, ta je f periodička funkcija. Njezin temeljni period je 2.

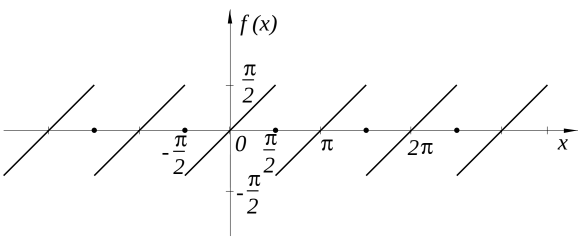
5.8. Neka je f parna funkcija temeljnog perioda 2π definirana za svaki $x \in \mathbf{R}$. Dokaži da postoji funkcija g definirana za svaki $x \in \mathbf{R}$, takva da vrijedi $f(x) = g(\cos x)$.

▷ Stavimo $t = \cos x$, pa je $x = \arccos t$, odnosno $f(\arccos t) = g(t)$. Tako imamo

$$g(x) = \begin{cases} f(\arccos x), & |x| \leqslant 1; \\ \text{proizvoljno}, & |x| > 1. \end{cases}$$

5.9. Dana je funkcija $f(x) = x$, $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$. Odredi i nacrtaj neparno periodičko proširenje funkcije f.

▷ $F(x) = x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Za proizvoljni x uzimamo $F(x) = x - k\pi$, $-\frac{\pi}{2} < x - k\pi < \frac{\pi}{2}$. U krajevima intervala funkcija nije definirana pa stavljamo $F(x) = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.



Sl. 5.11.

Napomenimo da je ovo (zapravo) graf funkcije $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$.

5.10. Je li funkcija $f(x) = \arccos(|\sin x| + \ln \cos^2 x)$?

▷ Da, to je kompozicija funkcija arkus kosinus s periodičkom funkcijom $|\sin x| + \ln \cos^2 x$ perioda π (provjeri!).

5.11. Nađi temeljni period (ako postoji) funkcije $f(x) = \arccos(\sin \frac{\pi}{2}\{x\} - 1) + \arcsin(\cos \frac{3\pi}{4}\{x\} + 1)$.

▷ Period funkcije $\arccos(\sin \frac{\pi}{2}\{x\} - 1)$ je 4, a funkcije $\arcsin(\cos \frac{3\pi}{4}\{x\} + 1)$ je $\frac{8}{3}$. Budući da su brojevi 4 i $\frac{8}{3}$ sumjerljivi, to je temeljni period funkcije f broj 8.

5.12. Dokaži da primitivna funkcija periodičke funkcije ne mora biti periodička funkcija.

▷ Neka je $f(x)$ periodička funkcija i neka ona ima primitivnu funkciju $F(x)$. Onda vrijedi:

$$\int f(x)dx = \{F(x) = c : c \in \mathbf{R}\},$$

ili kraće (i češće) pisano

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Kako je c proizvoljna konstanta, to njenim izborom možemo, ali i ne moramo dobiti periodičku funkciju.

Tako npr. za $f(x) = 5 + 2\cos x$ primitivna funkcija neće biti periodička funkcija.

Zadaci za vježbu

5.13. Je li funkcija $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 + 1)$ periodička?

5.14. Je li funkcija $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos|x|)$ periodička?

5.15. Nađi eksplicitnu formulu kompozicije $f(x) = \operatorname{sgn}(|\sin x| + |\cos x|)$.

5.16. je li funkcija $f(x) = \lfloor x \rfloor$ periodička?

5.17. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = \operatorname{sgn}\dfrac{|\sin x|}{\sin x}$.

5.18. Odredi temeljni period funkcije

1) $f(x) = (x - \lfloor x \rfloor)\sin(3\pi x)$;

2) $f(x) = \lfloor 3x \rfloor - \lfloor 5x \rfloor$;

3) $f(x) = \{x^2\} - 2\{x\} + 4$;

4) $f(x) = \cos 2\pi(x - \lfloor x \rfloor) + x - \lfloor x \rfloor$;

5) $f(x) = \arccos(\sin(\sqrt{2}\{x\} - \sqrt{3})) - \sin\left(\dfrac{\{x\}}{\sqrt{2}} + \sqrt{3}\right)$;

6) $f(x) = \arcsin 2$;

7) $f(x) = \arcsin(\cos(\ln(\cos x)))$;

8) $f(x) = \arccos(\sin(\cos(\cos x)))$.

5.19. Je su li periodičke funkcije 1) $f(x) = a\{x\}$; 2) $f(x) = \{ax\}$; $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$?

5.20. Dokaži da nisu periodičke ove funkcije

1) $f(x) = 2\{x\} + \cos 2x$;

2) $f(x) = \ln(\operatorname{tg} \operatorname{arc\,tg} e^x)$;

3) $f(x) = \sqrt{\arcsin \log_2 x}$;

4) $f(x) = 2 \arcsin(\frac{1}{2} \cos x^2)$;

5) $f(x) = e^{\sqrt{\arcsin \cos \sqrt{x}}}$.

5.21. Dana je funkcija $f(x)$ sa

$$f(x) = \begin{cases} 2\sin(\arcsin x), & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Proširi funkciju f na ostale $x \in \mathbf{R}$ tako da bude periodička.

5.22. Za kakav je realan broj a funkcija $f(x) = \lfloor x \rfloor - \lfloor ax \rfloor$ periodička?

5.23. Je li funkcija $f(x) = \dfrac{1}{\{x\}}$ periodička?

6.

Postojanje temeljnoga perioda

U ovome ćemo poglavlju dati primjere i dokaze nekih teorema vezanih uz postojanje temeljnoga perioda.

Konstanta. Konstantna funkcija, $f(x) = c$ periodička je funkcija jer za svaki $x \in \mathbf{R}$ i *svaki* $T > 0$ vrijedi

$$f(x+T) = c = f(x).$$

Odmah zaključujemo da ova funkcija nema temeljnoga perioda, jer *ne postoji najmanji pozitivni broj*.

No ta je funkcija izuzetak, a ne pravilo. Vrijedi sljedeći

Teorem 6.1. *Ako je f periodička funkcija koja je neprekinuta barem u jednoj točki, različita od konstante, tada f ima temeljni period.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno: f nema temeljnoga perioda. Neka je x_0 točka neprekinutosti funkcije f. Kako je f različita od konstante, to postoji x_1 takav da je $f(x_0) \neq f(x_1)$.

Konstruirajmo sada niz brojeva na sljedeći način. Za svaki prirodni broj n pronađimo (1) period T_n manji od $2/n$ (što možemo jer funkcija nema temeljnoga perioda) i (2) broj x_n takav da je $x_n = x + k \cdot T_n \in [x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}]$ (što ožemo jer je ovo interval duljine $\frac{2}{n}$ oko točke x_0, a broj T_n manji je od duljine intervala).

Primjetimo da za ovako konstruirani niz brojeva vrijedi $x_n \to x_0$ kad $n \to \infty$, te, zbog periodičnosti funkcije f, $f(x_n) = f(x_1 + kT_n) = f(x_1)$. No kako je po pretpostavci f neprekinuta u x_0, mora vrijediti $f(x_0) = \lim f(x_n) = f(x_1)$, jer $x_n \to x_0$. Dobili smo proturječje s početnom pretpostavkom $f(x_1) \neq f(x_0)$. Prema tome, f ima temeljni period.

Primjer 6.1. Naći temeljni period (ako postoji) funkcije

$$f(x) = \cos^2 x + \cos^2(x+a) - 2\cos a\cos(x+a)\cos x, \quad a \in \mathbf{R}.$$

▷ Transformirajmo funkciju na oblik

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos x[\cos x - \cos a\cos(x+a)] \\
&\qquad\qquad + \cos(x+a)[\cos(x+a) - \cos a\cos x] \\
&= \cos^2 x - \cos x\cos a\cos(x+a) - \sin x\sin a\cos(x+a) \\
&= \cos^2 x - \cos(x+a)\cos(x-a) \\
&= \cos^2 x - \tfrac{1}{2}(\cos 2x + \cos 2a) \\
&= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2a.
\end{aligned}$$

Kako je $f(x)$ konstanta, ona nema temeljnoga perioda.

* * *

Želimo li pronaći periodičku funkciju različitu od konstante, a koja nema temeljnoga perioda, po ovom teoremu ona nužno mora biti prekinuta u svakoj točki.

Takva funkcija zaista postoji. Evo primjera. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Tvrdimo da je period ove funkcije svaki *racionalni* broj $T > 0$. Neka je $T > 0$ proizvoljan racionalan broj. Pri računanju vrijednost funkcije u točki $x + T$, postoje sljedeće dvije mogućnosti:

$$\begin{aligned}
x \in \mathbf{Q} &\implies x + T \in \mathbf{Q} \quad \text{te je } f(x+T) = 1 = f(x), \\
x \notin \mathbf{Q} &\implies x + T \notin \mathbf{Q} \quad \text{te je } f(x+T) = 0 = f(x).
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je uvijek $f(x+T) = f(x)$ te je f periodička s periodom T. Kako nema najmanjega racionalnoga broja, to f nema temeljnoga perioda.

Primjer 6.2. Ne postoji periodička funkcija kojoj je svaki iracionalni broj period, a racionalni ne.

▷ Pretpostavimo da takva funkcija postoji. Među periodima te funkcije su npr. $T_1 = \sqrt{3}$ i $T_2 = 1 - \sqrt{3}$. Kako je zbroj perioda period, među periodima mora biti i $T_1 + T_2 = 1 \in \mathbf{Q}$, što je u suprotnosti s uvjetom u zadatku.

Zadatak 6.3. Dokaži da nijedan polinom stupnja većeg od nula ne može biti periodička funkcija.

▷ *1. način.* Neka je polinom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0, \qquad a_n \neq 0$$

stupnja $n > 0$. Za $x = 0$ on poprima vrijednost $P(0) = a_0$. Pretpostavimo da je P periodička funkcija s periodom T. Onda bi za svaki $m \in \mathbf{N}$ vrijedilo $P(x+mT) = P(x)$, što za $x = 0$ daje $P(mT) = a_0$. No, tada bi vrijedilo i

$$\lim_{m\to\infty} P(mT) = a_0. \tag{1}$$

S druge strane, možemo pisati

$$\begin{aligned} P(mT) &= a_n(mT)^n + a_{n-1}(mT)^{n-1} + \ldots + a_0 \\ &= (mT)^n\Big(a_n + \frac{a_{n-1}}{mT} + \frac{a_{n-2}}{(mT)^2} + \ldots + \frac{a_0}{(mT)^n}\Big). \end{aligned}$$

Sada za $n > 0$ i $a_n > 0$ dobivamo

$$\lim_{m\to\infty} P(mT) = +\infty,$$

a za $a_n < 0$ izlazi $\lim_{m\to\infty} P(mT) = -\infty$, što je u oba slučaja u suprotnosti s (1). Znači, jedini periodički polinomi su konstante $P(x) = a_0$.

2. način. Pretpostavimo da je P periodička funkcija. Onda, prema teoremu 2.10 i njegova derivacija $P'(x)$ je periodička funkcija. Dalje slijedi da je i $P''(x)$ također periodička funkcija, itd. tako ćemo doći do $(n-1)$-ve derivacije polinoma $P(x)$:

$$P_{(n-1)}(x) = n!a_n x + (n-1)!a_{n-1}.$$

Ovo je pak afina funkcija koja na čitavoj domeni $\mathbf{R}$ ili raste ili pada, pa ne može biti periodička funkcija.

3. način Jednadžba $P(x) = c$ ima, za broj c koji se nalazi u području vrijednosti funkcije, najmanje jedno, a najviše n različitih rješenja. Zato P ne može biti periodička funkcija.

Teorem 6.2. *Ako je* $f(x)$ *periodička funkcija definirana na čitavom* $\mathbf{R}$ *i različita od konstante, onda ne postoji* $\lim_{x\to\infty} f(\frac{1}{x})$.

Dokaz. Označimo sa $g(x) = f(\frac{1}{x})$ i pretpostavimo suprotno, tj.

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = a. \tag{6.22}$$

Najprije se uvjerimo da funkcija $g(x)$ bar za jednu vrijednost $x > 0$ prima vrijednost različitu od a. Posebno, ako je $g(x) = a$ za bilo koji $x > 0$, onda je $f(x) = g(\frac{1}{x}) = a$ za sve $x > 0$. No u tom slučaju zbog periodičnosti funkcije $f(x)$ izlazi da je $f(x)$ konstanta na čitavom $\mathbf{R}$, a to je u suprotnosti sa uvjetom iz teorema. Prema tome postoji $x_0 > 0$ takav da vrijedi $g(x_0) = b \neq a$. Uzmimo $\epsilon\frac{1}{2}|a-b| > 0$. Prema definiciji limesa iz (1) izlazi da postoji broj $\delta > 0$ takav da je za svaki $x \neq 0$ za koji vrijedi

$$|x - 0| < \delta \tag{6.33}$$

ispunjena nejednakost

$$|g(x) - a| < \epsilon. \tag{6.44}$$

Međutim, za dovoljno veliko $k \in \mathbf{Z}$ broj

$$x_1 = \frac{x_0}{1 + kTx_0}$$

zadovoljava (3) (takav najmanji k, za $x_0 > 0$ izlazi iz nejednadžbe

$$\frac{x_0}{1 + kTx_0} < \delta),$$

a $x = x_0$ ne zadovoljava nejednakost (4):

$$\begin{aligned} g(x_1) &= g(\frac{x_0}{1 + kTx_0}) = f(\frac{1 + kTx_0}{x_0}) = f(\frac{1}{x_0} + kT) \\ &= f(\frac{1}{x_0}) = g(x_0) = b. \end{aligned}$$

Prema tome

$$|g(x_1) - a| = |b - a| > \frac{1}{2}|b - a| = \epsilon.$$

Time smo došli u suprotnost s relacijom (2), što znači da ne postoji $\lim_{x\to 0} f(\frac{1}{x})$.

Primjer 6.4. Dokaži da je funkcija $f(x) = \sin\ln(1 + x^2)$ neperiodička.

▷ Derivacija funkcije $f(x)$ glasi

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} \cdot \cos\ln\frac{1 + x^2}{x^2}.$$

Dalje imamo:

$$|g(x)| = \left|\frac{2x}{1 + x^2}\right| \cos\ln\frac{1 = x^2}{x^2} \leqslant \left|\frac{2x}{1 + x^2}\right| \leqslant 2|x|,$$

a odatle izlazi $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Kako je funkcija $f'(x)$ definirana na čitavom $\mathbf{R}$ i različita je od od konstante, prema teoremu 6.2. ona je neperiodična, pa je i sama funkcija $f(x)$ neperiodička.

Zadaci za vježbu

6.1. Jesu li istinite tvrdnje:
1) Ako funkcija ima jedan period, onda ih ima beskonačno mnogo;
2) Ako funkcija ima beskonačno mnogo perioda, onda ona ima temeljni period;

6.2. Je li funkcija $f(x) = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$ periodička?

6.3. Je li funkcija $f(x) = \lfloor 2x \rfloor + \{2x\} - 2x$ periodička?

6.4. Ako za periodičku funkciju f i $k \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ vrijedi $f(kx) = kf(x)$ za svaki $x \in \mathbf{R}$, onda ona nema temeljnog perioda. Dokaži!

6.5. Je li funkcija $f(x) = \dfrac{2\sin x}{\sqrt{3} + \sin^2(\sqrt{2}x)}$ periodička?

6.6. Dokaži da funkcija $f(x) = \sin(2x + \cos(x\sqrt{2}))$ nije periodička.

6.7. Dokaži da funcija $f(x) = \sqrt{\lfloor x \rfloor - 1} + \sqrt{\{x\} - 1}$ nije periodička.

6.8. Je li funkcija $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ periodička?

6.9. Je li funkcija $f(x) = \arcsin(\{x\}) + 1$ periodička? Ako jest nađi joj temeljni period.

6.10. Neka su $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ neprekinute periodičke funkcije sa zajedničkim periodom T i neka je

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

Dokaži da za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi $f(x) = g(x)$.

7.

Fourierov red

Sinusoida je najvažniji primjer periodičke funkcije. Sinusoidu specijalnoga oblika

$$c_n \sin(nx + \varphi_n)$$

nazivamo n-tim harmonikom. Njen je temeljni period $\dfrac{2\pi}{n}$. Kako je višekratnik perioda ponovo period, to je 2π zajednički period svih harmonika.

Pokazali smo u §1 da se ta sinusoida dade prikazati u obliku

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Period funkcija $\cos nx$ i $\sin nx$ također iznosi $\dfrac{2\pi}{n}$. 2π je zajednički period ovih funkcija.

Niz

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

nazivamo **osnovni trigonometrijski sistem**. Prema tome je i suma (konačnog ili beskonačnog) reda

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots \quad (7.1)$$

periodička funkcija s periodom 2π (ukoliko suma postoji!). Ovaj red se naziva **(trigonometrijski) Fourierov red** funkcije f. Brojeve $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots,$ $b_1, \dots, b_n, \dots$ nazivamo **koeficijentima Fourierovog reda**.

* * *

Prirodno je postaviti obrnuto pitanje: ako je zadana periodična funkcija f, može li se ona prikazati u obliku (7.1). Taj je prikaz vrlo važan, pošto nam omogućava da proizvoljnu periodičnu funkciju prikazujemo preko harmonika. S takvim se prikazom mogu uspješno rješavati mnogi problemi. Mi ćemo se zadržati samo na elementarnim primjerima i primjenama.

Odgovoriti ćemo na sljedeća dva pitanja:

1) Koje periodičke funkcije se mogu prikazati u obliku reda (7.1)? Vrijedi li jednakost u (7.1) u svakoj točki x?

2) Ako postoji Fourierov red od f oblika (7.1), kako se računaju koeficijenti a_n, b_n?

Pokazuje se da je jednostavnije odgovoriti na drugo pitanje.

Koeficijenti trigonometrijskog Fourierovog reda. Računanje koeficijenata a_n i b_n zasniva se na sljedećem svojstvu trigonometrijskih funkcija.

Teorem 7.1. *Za trigonometrijske funkcije vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \begin{cases} 2\pi\,, & n=0,\\ 0\,, & n>0;\end{cases}\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = 0;\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\ \sin nx\,dx = \begin{cases} 0\,, & m\neq n,\\ \pi\,, & m=n;\end{cases}\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\ \cos nx\,dx = \begin{cases} 0\,, & m\neq n,\\ \pi\,, & m=n;\end{cases}\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\ \cos nx\,dx = 0.
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Dokaz. Pri računanju integrala koristimo se formulama

$$\sin mx \sin nx = \frac{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x}{2},$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x}{2},$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{2}.$$

Tako npr. imamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \;\sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{2}dx$$
$$= \left(-\frac{\cos(m+n)}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)}{2(m-n)}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Ostali se integrali računaju na sličan način. Korisno je pri tome promotriti odvojeno slučajeve $m = n$ i $m \neq n$.

Pretpostavimo sada da se f može prikazati u obliku reda:

$$f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos mx + b_m \sin mx). \tag{7.3}$$

Tada integriranjem dobivamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0\pi + \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,dx + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\,dx\right] = a_0\pi,$$

pri čemu smo iskoristili relacije (7.2). Analogno, množenjem prikaza (7.3) s $\cos nx$ i potom integriranjem, uz pomoć relacija (7.2) dobivamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\;\cos nx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\;\cos nx\,dx + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\;\cos nx\,dx\right] = a_n\pi.$$

Na sličan način imamo i

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\;\sin nx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\;\sin nx\,dx + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\;\sin nx\,dx\right] = b_n\pi.$$

Dobili smo:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\;\cos nx\,dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\;\sin nx\,dx. \end{aligned} \tag{7.4}$$

* * *

Iako čitatelj možda neće naći zamjerki na ovaj izvod formula (7.4), moramo naglasiti da je on samo *formalan*, pošto nisu opravdani svi koraci postupka (postojanje reda te zamjena poretka integracije i sumacije). Ovakav je način izvođenja te formule, koristeći svojstva trigonometrijskih funkcija, dao Euler[1] 1777. god. i one se stoga ponekad nazivaju **Eulerove formule**.

* * *

Prvo je pitanje mnogo kompliciranije. Trebalo je proteći stotinjak godina dok nije dan zadovoljavajući odgovor. Ni dan-danas ne znamo koje se sve funkcije mogu prikazati u obliku Fourierovog reda. Ipak, taj je prikaz moguć za široku klasu elementarnih funkcija. Opišimo tu klasu.

Neka je $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ zadana funkcija. Pretpostavimo da interval $[a, b]$ možemo podijeliti na nekoliko dijelova tako da na svakom od njih vrijedi:

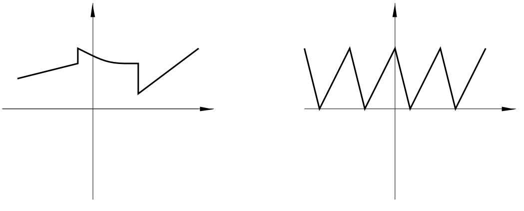
1) f je neprekidna,

2) f ima konačne limese na krajevima intervala,

3) f ima najviše konačno mnogo ekstrema.

Kažemo da tada f zadovoljava **Dirichletove uvjete**.

U točkama prekida funkcija može imati proizvoljnu vrijednost. Mi ćemo pretpostavljati da je u tim točkama vrijednost funkcije jednaka polovini vrijednosti s lijeva i s desna te točke. Na slici **??** prikazane su neke funkcije koje zadovoljavaju Dirichletove uvjete.



Sl. 7.1. Primjeri funkcija koje zadovoljavaju Dirichletove uvjete

Sada možemo iskazati osnovni teorem:

Teorem 7.2. *Neka je f periodička funkcija s periodom 2π koja zadovoljava Dirichletove uvjete. Tada se ona može prikazati u obliku Fouriero-*

[1] Leonhard Euler (1707–1783), švicarski matematičar

vog reda

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots \quad (7.1)$$

i jednakost vrijedi u svakoj točki x. Koeficijenti se računaju formulama (7.4).

Dokaz ovoga teorema je složen i na ovome mjestu ga moramo preskočiti.

* * *

Prije no što damo primjer prikaza periodičke funkcije, korisno je izvesti analogne formule za periodičke funkcije s proizvoljnim periodom.

Neka je sada f periodička s periodom $T = 2L$. Funkcija $g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ je periodička s periodom 2π:

$$g(x+2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}x + T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = g(x)\,.$$

Da bismo odredili Fourierov red za funkciju f, napisati ćemo najprije Fourierov red za funkciju g, i zatim iskoristiti vezu

$$f(x) = g\left(\frac{2\pi x}{T}\right) = g\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

Tako dobivamo

$$f(x) = g\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (7.5)$$

Koeficijente računamo formulama:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L\xi}{\pi}\right)d\xi = \left[\begin{array}{c} L\xi/\pi = x \\ d\xi = \pi/L\,dx \end{array}\right]$$
$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\,\cos n\xi\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L\xi}{\pi}\right)\cos n\xi\,d\xi$$
$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad (7.6)$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\,\sin n\xi\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L\xi}{\pi}\right)\,\sin n\xi\,d\xi \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.
\end{aligned}
$$

* * *

Ako je f zadana na nekom intervalu, tada u Fourierov red rastavljamo njeno periodičko proširenje. Fourierov red će se podudarati s funkcijom na početnom intervalu, a van njega s periodičkim proširenjem početne funkcije.

Primjer 7.1. Funkciju $f(x) = x$ razvij u Fourierov red na intervalu $(0,1)$.

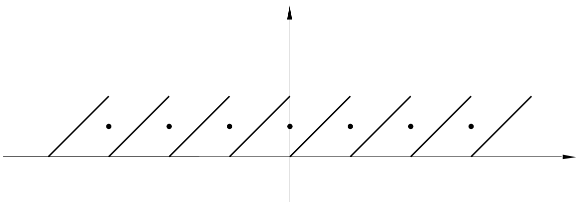
▷ Period iznosi $T = 1$. Koeficijente računamo po formuli

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 1\,, \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\,\cos\frac{2n\pi x}{T}\,dx = 2\int_0^1 x\,\cos 2n\pi x\,dx \\
&= \begin{bmatrix} u = x & dv = \cos 2n\pi x\,dx \\ du = dx & v = \dfrac{\sin 2n\pi x}{2n\pi} \end{bmatrix} \\
&= 2\left(x\cdot\frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi}\bigg|_0^1 - \frac{1}{2n\pi}\int_0^1 \sin 2n\pi x\,dx\right) = 0\,, \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\,\sin\frac{2n\pi x}{T}\,dx = 2\int_0^1 x\,\sin 2n\pi x\,dx \\
&= \begin{bmatrix} u = x & dv = \sin 2n\pi x\,dx \\ du = dx & v = -\dfrac{\cos 2n\pi x}{2n\pi} \end{bmatrix} \\
&= 2\left(-x\cdot\frac{\cos 2n\pi x}{2n\pi}\bigg|_0^1 + \frac{1}{2n\pi}\int_0^1 \cos 2n\pi x\,dx\right) = -\frac{1}{n\pi}.
\end{aligned}
$$

Zato je

$$
f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}\,\sin 2n\pi x.
$$

Graf Fourierovog reda f dan je na slici **??**

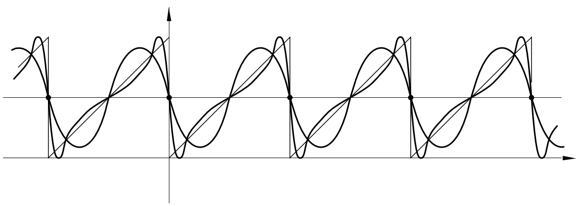


Sl. 7.2.

Interesantno je grafički prikazati sumu nekoliko prvih članova reda. Na taj ćemo način dobivati sve bolje i bolje aproksimacije početne funkcije. Nekoliko prvih suma Fourierovog reda u ovome primjeru glasi

$$
\begin{aligned}
S_0 &= \frac{1}{2}\,,\\
S_1 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\,\sin 2\pi x\,,\\
S_2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\,\sin 2\pi x - \frac{1}{2\pi}\,\sin 4\pi x\,.
\end{aligned}
$$

Na slici **??** nacrtani su periodičko proširenje funkcije f i aproksimacija te funkcije s prve tri parcijalne sume njenog Fourierovog reda.



Sl. 7.3. Aproksimacija funkcije s nekoliko prvih parcijalnih suma njenog Fourierovog reda

Fourierov red parnih i neparnih funkcija. Ako je funkcija f, definirana na simetričnom intervalu $[-L, L]$, parna, odnosno neparna, tada će njen Fourierov red sadržavati samo kosinus, odnosno sinus članove:

1. Ako je $f(x) = f(-x)$ za svaki x, tj. f parna funkcija, tada je $b_n = 0$ za svaki n i

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n \geqslant 0,\\
f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}.
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

Razlog tome je što se koeficijent b_n računa po formuli

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

a pod integralom je neparna funkcija te je integral jednak nuli.

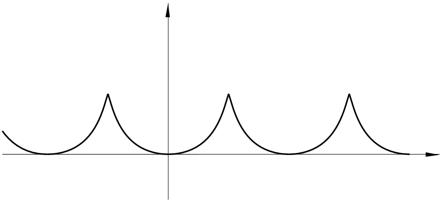
2. Ako je $f(-x) = -f(x)$ za svaki x, tj. f neparna funkcija, tada je $a_n = 0$ za svaki n i

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n \geqslant 1, \\ f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Kažemo da smo funkciju f razvili u Fourierov red po kosinus, odnosno sinus funkcjama.

Ako je f definirana u početku na intervalu $[0, L]$, mi ju možemo razviti u red po kosinus odnosno sinus funkcijama tako da ju nadopunimo na intervalu $[-L, 0]$ do parne odnosno neparne funkcije.

Primjer 7.2. Razvij u Fourierov red funkciju definiranu na intervalu $[-1, 1]$ formulom $f(x) = x^2$ (slika **??**).



Sl. 7.4. Fourierov red parne funkcije sadržavat će samo kosinus članove

▷ Funkcija f je parna. Vrijedi $L = 1$. Po formuli 7.7 dobivamo koeficijente

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx = 2\int_0^1 x^2\,\cos n\pi x\,dx = \frac{2}{3}, \\ a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 2\int_0^1 x^2\,\cos n\pi x\,dx. \end{aligned}$$

Nakon uzastopne parcijalne integracije dobivamo

$$a_n = \frac{4}{\pi^2 n^2}(-1)^n.$$

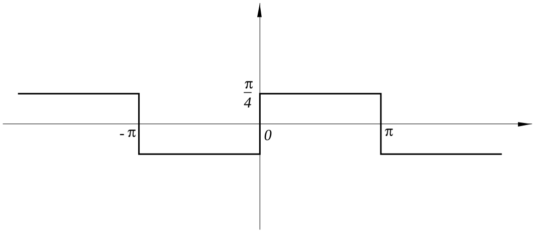
Prema tome, Fourierov red funkcije f glasi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x \\ &= \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \pi x - \frac{\cos 2\pi x}{2^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} - \dots \right). \end{aligned}$$

* * *

Uvrštavajući neku konkretnu vrijednost broja x u prikaz funkcije preko njenog Fourierovog reda možemo dobiti interesantne neelementarne sume. Pogledajmo jednu takvu u sljedećem primjeru.

Primjer 7.3. Funkciju $f(x) = \pi/4$ razvij u Fourierov red na intervalu $(0, \pi)$ po sinus funkcijama. Pomoću dobivenog razvoja sumiraj redove
(a) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$; **(b)** $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \dots$



Sl. 7.5. Fourierov red neparne funkcije sadržavat će samo neparne članove

▷ Računamo po formuli (7.8):

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} \sin nx \, dx = \frac{1}{2n} \left[1 - (-1)^n \right].$$

Dakle, $b_{2n} = 0$, $b_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$. Zato

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots, \qquad 0 < x < \pi.$$

Specijalno, za $x = \dfrac{\pi}{2}$ dobivamo

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Za $x = \dfrac{\pi}{3}$ dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{5}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) + \frac{1}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{9}\cdot 0 + \dots\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \dots\Big)\end{aligned}$$

i suma reda pod (b) iznosi $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Primjer 7.4. Funkciju $f(x) = x$ razvij u intervalu $[0,\pi]$
1) po kosinus funkcijama; 2) po sinus funkcijama.
Koristeći razvoj u 1) izračunaj sumu reda $1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dots$

▷ 1) Shvatimo funkciju f kao parnu na intervalu $[-\pi,\pi]$. Dakle, $L = \pi$ i po (7.7):

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \pi\,,\\ a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,\cos nx\,dx\\ &= \frac{2}{\pi}\bigg(x\,\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx\,dx\bigg)\\ &= \frac{2}{n^2\pi}\,\cos nx\bigg|_0^\pi = \frac{2}{n^2\,\pi}\,[\cos n\pi - 1].\end{aligned}$$

Dakle,

$$a_{2n} = 0\,, \qquad a_{2n+1} = -\frac{4}{(2n+1)^2\,\pi}\,.$$

Tako smo dobili:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\,\cos(2n+1)x\,, \qquad 0 \leqslant x < \pi. \tag{7.9}$$

Na intervalu $[-\pi,0]$ ovaj red predstavlja funkciju $-x$.

Stavljajući u $x = 0$, dobivamo

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

B. Po formuli ,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,\sin nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-x\,\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx\,dx\right) \\ &= -\frac{2}{n}\cos n\pi = \frac{2}{\pi}(-1)^{n+1}\,, \end{aligned}$$

te je

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\sin nx\,, \qquad 0 < x < \pi\,.$$

Zadaci za vježbu

7.1. Razvij u Fourierov red sljedeće periodičke funkcije

1) $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$; **2)** $f(x) = \cos\dfrac{x}{3}$;

3) $f(x) = |\sin x|$; **4)** $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$;

5) $f(x) = \sin^2 x$.

Odgovor.

1) $\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n\,\sin nx}{4n^2-1}$;

2) $\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}\left(\dfrac{3}{2} + 27\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\cos nx}{9n^2-1}\right)$;

3) $\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \dfrac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \dfrac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \dots\right)$;

4) $\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\cos(2n+1)x$;

5) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$.

7.2. Razvij u Fourierov red perioda $2L$ funkciju zadanu na intervalu $(-L, L)$ formulom

1) $f(x) = |x| - 5$, $-2 < x < 2$;

2) $f(x) = 5x - 3$, $-5 < x < 5$;

3) $f(x) = 3 - |x|,\ -5 < x < 5;$

4) $f(x) = 2x - 3,\ -3 < x < 3;$

5) $f(x) = \begin{cases} 0\,, & -L < x \leqslant 0, \\ \sin\dfrac{\pi x}{L}\,, & 0 < x < L; \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} 0\,, & -L < x < 0, \\ A & 0 < x < L. \end{cases}$

7) $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0, \\ 3, & 0 < x < \pi; \end{cases}$

8) $f(x) = \begin{cases} A, & -\pi < x < 0, \\ B, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

Odgovor.

1) $-4 - \dfrac{8}{\pi^2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}\ \cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{2};$

2) $-3 + \dfrac{50}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\,\dfrac{1}{n}\ \sin\dfrac{\pi n x}{5};$

3) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{20}{\pi^2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}\ \cos(2n+1)\dfrac{\pi x}{5};$

4) $-3 + \dfrac{12}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\ \sin\dfrac{\pi n x}{3};$

5) $\dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{2}\ \sin\dfrac{\pi x}{L} - \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2 - 1}\ \cos\dfrac{n\pi x}{L};$

6) $\dfrac{A}{2} + \dfrac{2A}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1}\ \sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{L};$

7) $2 + \dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sin(2n-1)x}{2n+1};$

8) $\dfrac{A+B}{2} + \dfrac{2(B-A)}{\pi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$

7.3. Razvij u Fourierov red na intervalu $(-\pi, \pi)$ sljedeće parne odnosno neparne funkcije

1) $f(x) = |x|;$ **2)** $f(x) = |\cos x|;$

3) $f(x) = x;$ **4)** $f(x) = x^3.$

Odgovor.

1) $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2};$

2) $\dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2};$

3) $-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\sin nx}{n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\dfrac{12}{n^3}-\dfrac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx$.

7.4. Razvij u Fourierov red na intervalu $(-\pi,\pi)$

1) $f(x)=\begin{cases} -2x\,, & -\pi<x<0, \\ 3x\,, & 0<x<\pi; \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}\,, & -\pi<x<0, \\ >\,, & 0<x<\pi; \end{cases}$

3) $f(x)=2x-3,\ -\pi<x<\pi$;

4) $f(x)=\begin{cases} -x\,, & -\pi<x<0, \\ 0\,, & 0<x<\pi; \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} 0\,, & -\pi<x<0, \\ \sin x\,, & 0<x<\pi. \end{cases}$

Odgovor.

1) $\dfrac{5\pi}{4}-\dfrac{10}{\pi}\left(\dfrac{\cos x}{1^2}+\dfrac{\cos 3x}{3^2}+\dots\right)+\left(\dfrac{\sin x}{1}-\dfrac{\sin 2x}{2}+\dfrac{\sin 3x}{3}-\dots\right)$;

2) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$;

3) $-3+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n}$;

4) $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n}$;

5) $\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{4n^2+1}$.

7.5. Funkciju $f(x)=x^2$ razvij u Fourierov red na intervalu $\langle 0,2\pi\rangle$. Pomoću dobivenog razvoja sumiraj red

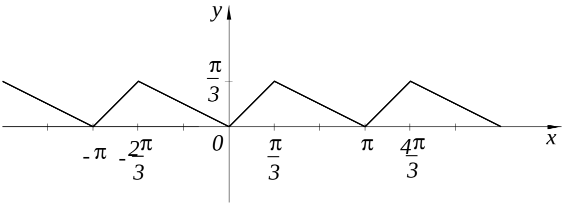
$$S=1-\frac{1}{3^2}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\ldots.$$

Odgovor.

$$x^2=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx.$$

Za $x=\pi$ odatle dobivamo $S=\dfrac{\pi^2}{12}$.

7.6. Razviju Fourierov red funkciju čiji je graf na slici:



Sl. 7.6.

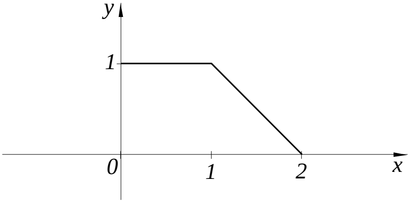
Odgovor.

$$\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{3}\times\left(\cos\frac{n\pi}{3}\sin 2nx-\sin\frac{n\pi}{3}\cos 2nx\right)$$

$$=\frac{\pi}{6}+\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\left(\frac{\sin 2x}{1^2}-\sin\frac{4x}{2^2}+\frac{\sin 8x}{4^2}-\frac{\sin 10x}{5^2}+\dots\right)$$

$$-\frac{9}{8\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1^2}+\frac{\cos 4x}{2^2}+\frac{\cos 8x}{4^2}+\frac{\cos 10x}{5^2}=\dots\right).$$

7.7. Dana je funkcija $f(x)$ na intervalu $\langle 0,2]$ grafom na slici:



Sl. 7.7.

Proširi funkciju f da bude parna periodička s periodom $2L=4$ i razvij je u Fourierov red.

Odgovor.
$\frac{3}{4}+\frac{4}{\pi^2}(\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{2}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3^3}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2}-\frac{2}{6^2}\cos\frac{6\pi x}{2}+\dots);$