1.

Aritmetički niz i primjene

1.1. Za prirodan broj n izračunajte zbroj

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

▷ Možemo napisati

$$\begin{array}{lllllll} S_n = 1 & +2 & +3 + \ldots & +(n-2) & +(n-1) & +n \\ S_n = n & +n-1 & +n-2 + \ldots & +3 & +2 & +1 \end{array}$$

Zbrajanjem ovih dviju jednakosti slijedi

$$2 \cdot S_n = (n+1) + (n-1+2) + (n-2+3) + \ldots + (3+n-2) + (2+n-1) + (1+n).$$

Svaki je pribrojnik jednak $n + 1$. Njihov je broj očito jednak n, pa je $2S_n = n(n+1)$. Zato

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

* * *

Nađenu formulu za zbroj početnih n prirodnih brojeva često ćemo koristiti u daljnjem tekstu. Označavat ćemo ju s

$$S_n^1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1.2. Izračunajte zbroj

$$S = n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+k), \quad n, k \in \mathbf{N}.$$

▷ *1. način.* Iz svakoga pribrojnika možemo izdvojiti broj n:

$$\begin{aligned}S &= n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+k)\\ &= (\underbrace{n + n + \ldots + n}_{k+1 \text{ pribrojnik}}) + (1 + 2 + \ldots + k)\\ &= (k+1)n + \tfrac{1}{2}k(k+1) = \tfrac{1}{2}(k+1)(2n+k).\end{aligned}$$

2. način. Upotrijebiti ćemo formulu za zbroj prvih nekoliko prirodnih brojeva, jer je

$$\begin{aligned}S &= (1 + 2 + \ldots + (n-1) + n + (n+1) + \ldots + (n+k)\\ &\qquad - [1 + 2 + \ldots + (n-1)]\\ &= S^1_{n+k} - S^1_{n-1}\\ &= \tfrac{1}{2}(n+k)(n+k+1) - \tfrac{1}{2}(n-1)n\\ &= \tfrac{1}{2}(2kn + k^2 + 2n + k) = \tfrac{1}{2}(k+1)(2n+k).\end{aligned}$$

1.3. Izračunajte zbroj

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + [a + (n-1)d],$$

gdje su $a, d \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.

▷ Možemo napisati

$$\begin{aligned}S &= (\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ pribrojnika}}) + d(1 + 2 + \ldots + n - 1)\\ &= na + \tfrac{1}{2}(n-1)nd = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]\end{aligned}$$

* * *

Zbroj ovakva oblika vrlo je važan, te ćemo se njime malo podrobnije pozabaviti.

* * *

Definicija. Funkcija $a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ definirana formulom

$$a(n) = dn + c, \qquad d, c \in \mathbf{R},$$

zove se **aritmetički niz** ili **aritmetički slijed**.

Uobičajeno je pisati a_n umjesto $a(n)$, taj broj nazivamo **opći** ili n**-ti član** niza.

Aritmetički niz ima ova svojstva.

1) Razlika svakoga člana (osim prvoga) i njemu prethodnoga člana stalan je broj, jednak d i zove se **razlika** niza. Zaista:

$$a_{n+1} - a_n = d(n+1) + c - (dn + c) = d.$$

2) Svaki je član aritmetičkoga niza (osim prvoga) aritmetička sredina susjednih članova (odatle i naziv). Pokažimo to:

$$\begin{aligned} a_{n-1} + a_{n+1} &= d(n-1) + c + d(n+1) + c \\ &= 2(dn + c) = 2a_n \end{aligned}$$

3) Aritmetički je niz zadan prvim članom (a_1) i razlikom (d). Imamo naime $a_1 = d + c$ te je $c = a_1 - d$ i sada

$$a_n = dn + c = dn + a_1 - d = a_1 + (n-1)d.$$

4) Ako su $m, n \in \mathbf{N}$, $m < n$, tada je

$$a_n = a_m + (n-m)d,$$

što se lako pokaže:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + (m-1)d + (n-m)d = a_m + (n-m)d.$$

Iz ovog neposredno slijedi

$$a_n + md = a_m + nd.$$

5) Ako je $d = 0$, tada je $a_n = c$ za svaki $n \in \mathbf{N}$, pa su svi članovi niza jednaki. Takav se niz zove **stalan** ili **konstantan** niz.

Ako se u definiciji niza (slijeda) umjesto skupa $\mathbf{N}$ uzme skup $\mathbf{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ (tj. skup početnih n prirodnih brojeva), tada govorimo o **konačnom nizu** ili **slogu**.

1.4. Izračunajte zbroj početnih n članova aritmetičkog niza.

▷ Traženi zbroj

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

možemo, korištenjem znaka sumacije, zapisati u obliku

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Ovdje je k indeks sumacije (koji može biti izabran proizvoljno). On se mijenja u granicama od 1 do n, povećavajući se u svakom pribrojniku za

1.

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(dk+c) = d\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} c \\
&= d\cdot S_n^1 + nc = \tfrac{1}{2}n(n+1)d + nc = \frac{n}{2}\Big[(n+1)d + 2c\Big] \\
&= \frac{n}{2}\Big(d + c + nd + c\Big) = \frac{n}{2}\Big(a_1 + a_n).
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$S_n = \frac{n}{2}\Big(a_1 + a_n\Big),$$

ili,

$$S_n = \frac{n}{2}\Big[2a_1 + (n-1)d\Big].$$

* * *

Koju ćemo od ovih dviju formula upotrijebiti zavisi o tome kako je niz zadan. Tako na pr. u zadatku:

- Izračunajte zbroj početnih 100 članova aritmetičkoga niza 3, 7, 11, 15,...;

imamo $a_1 = 3$, $d = 4$, $n = 100$, pa je

$$S_{100} = \frac{100}{2}(2\cdot 3 + 99\cdot 4) = 20\,100.$$

dok, na pr. u zadatku

- Izračunajte zbroj svih višekratnika broja 7 manjih od 1000;

računamo ovako: najveći višekratnik broja 7 manji od 1000 jest $994 = 142\cdot 7$, te je $a_1 = 7$, $n = 142$, $a_n = 994$, stoga

$$S_{142} = \frac{142}{2}(7 + 994) = 71\,071.$$

1.5. Nađite izraz za zbroj početnih n neparnih prirodnih brojeva

$\triangleright$ Tražimo zbroj $S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$. Radi se o aritmetičkom nizu kojemu je $a_1 = 1$, $d = 2$ te je

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2.$$

1.6. Nađite izraz za zbroj početnih n parnih prirodnih brojeva.

$\triangleright$

$$S_n = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 2S_n^1 = n(n+1).$$

1.7. Je li broj 7 286 905 431 827 561 234 789 348 512 zbroj n početnih neparnih prirodnih brojeva?

$\triangleright$ Nije, jer kvadrat prirodnoga broja ne završava znamenkom 2 (vidi zad. 1.5.).

1.8. Ako od x početnih neparnih prirodnih brojeva odstranimo prvih y brojeva ($y < x$), zbroj preostalih brojeva je 380. Odredite x i y.

$\triangleright$ Zadatak vodi na diofantsku jednadžbu

$$x^2 - y^2 = 380$$

koju možemo napisati u obliku

$$(x-y)(x+y) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 19.$$

Budući da su brojevi $x - y$, $x + y$ iste parnosti, moguća su dva slučaja

1) $x - y = 10$, $x + y = 38$, odakle je $x = 24$, $y = 14$.

2) $x - y = 2$, $x + y = 190$, odakle je $x = 96$, $y = 94$.

Vidimo da zadatak ima dva rješenja.

1.9. Brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ članovi su aritmetičkoga niza, ($a_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$). Izračunajte:

$$S = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n}.$$

$\triangleright$ Neka je $a_{k+1} - a_k = d$. Tada je

$$\begin{aligned} d \cdot S &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d}{a_ka_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1} - a_k}{a_ka_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right) \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_1}{a_1a_n} \end{aligned}$$

kako je $a_n - a_1 = (n-1)d$, to slijedi tražena formula

$$S = \frac{n-1}{a_1a_n}.$$

1.10. Pozitivni brojevi a_1, a_2,..., a_n članovi su aritmetičkoga niza. Izračunajte

$$S=\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}.$$

▷ Racionalizirajmo svaki nazivnik. Dobivamo

$$S=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_2}+\ldots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n-a_{n-1}}.$$

Budući je niz aritmetički, svaki je nazivnik jednak razlici niza d, te je

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{d}\Big(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}\Big)\\&=\frac{1}{d}\Big(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}\Big)=\frac{1}{d}\cdot\frac{a_n-a_1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}.\end{aligned}$$

1.11. Dokažite da za zbrojeve početnih n, $2n$, $3n$ članova aritmetičkoga niza vrijedi

$$S_{3n}=3(S_{2n}-S_n).$$

▷ Računajmo desnu stranu

$$\begin{aligned}3(S_{2n}-S_n)&=3\left(\frac{2n}{2}(a_1+a_{2n})-\frac{n}{2}(a_1+a_n)\right)\\&=\frac{3n}{2}\Big(2a_1+2a_{2n}-a_1-a_n\Big)=\frac{3n}{2}\Big(2a_1+2(2n-1)d-(n-1)d\Big)\\&=\frac{3n}{2}\Big(a_1+a_1+(3n-1)d\Big)=\frac{3n}{2}\Big(a_1+a_{3n}\Big)=S_{3n}.\end{aligned}$$

1.12. Neka S_p znači zbroj početnih p članova aritmetičkoga niza. Dokažite da vrijedi

$$\frac{S_m-S_n}{S_{m+n}}=\frac{m-n}{m+n}.$$

▷ Računamo ovako:

$$\begin{aligned}\frac{S_m-S_n}{S_{m+n}}&=\frac{\frac{m}{2}\Big[2a_1+(m-1)d\Big]-\frac{n}{2}\Big[2a_1+(n-1)d\Big]}{\frac{m+n}{2}\Big[2a_1+(m+n-1)d\Big]}\\&=\frac{m(2a_1+md-d)-n(2a_1+nd-d)}{(m+n)[2a_1+(m+n)d-d]}\\&=\frac{2a_1(m-n)+d(m^2-n^2)-d(m-n)}{(m+n)[2a_1+(m+n)d-d]}\end{aligned}$$

$$= \frac{(m-n)[2a_1+(m+n)d-d]}{(m+n)[2a_1+(m+n)d-d]} = \frac{m-n}{m+n}.$$

1.13. Neka su S_p S_q, S_r redom zbrojevi prvih p, q, r članova aritmetičkoga niza. Dokažite da vrijedi

$$S = \frac{S_p}{p}(q-r) + \frac{S_q}{q}(r-p) + \frac{S_r}{r}(p-q) = 0.$$

▷ Budući je $S_p = \frac{p}{2}(a_1+a_p)$, to je $\frac{S_p}{p} = \frac{1}{2}(a_1+a_p)$, slično za S_q i S_r. Zato je

$$\begin{aligned} 2S &= (a_1+a_p)(q-r)+(a_1+a_q)(r-p)+(a_1+a_r)(p-q) \\ &= qa_p - ra_p + ra_q - pa_q + pa_r - qa_r \\ &= p(a_r-a_q)+q(a_p-a_r)+r(a_q-a_p). \end{aligned}$$

Vrijedi: $a_r - a_q = (r-q)d$, $a_p - a_r = (p-r)d$, $a_q - a_p = (q-p)d$. Zato je

$$\begin{aligned} 2S &= p(r-q)d + q(p-r)d + r(q-p)d \\ &= d[(pr-pq+pq-qr+rq-pr) = 0. \end{aligned}$$

1.14. Izračunajte zbroj kvadrata početnih n prirodnih brojeva.

▷ Uvedimo oznaku

$$S_n^k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k, \qquad k, n \in \mathbf{N}.$$

Treba izračunati $S_n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$. Pođimo od jednakosti

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

i ispišimo je za vrijednosti $k = 0, 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{array}{ll} k=0 & 1^3 = 0^3 + 3\cdot 0^2 + 3\cdot 0 + 1 \\ k=1 & 2^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 \\ k=2 & 3^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ k=n-1 & n^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\ k=n & (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \end{array}$$

Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} (n+1)^3 &= 3(1^2+2^2+\ldots+n^2) + 3(1+2+\ldots+n) + n + 1 \\ &= 3S_n^2 + 3S_n^1 + n + 1 \end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned} 3S_n^2 &= (n+1)^3 - 3S_n^1 - (n+1) = (n+1)^3 - \tfrac{3}{2}n(n+1) - (n+1) \\ &= \tfrac{1}{2}(n+1)(2n^2+4n+2-3n-2) = \tfrac{1}{2}n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

Dakle,

$$S_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1.15. Izračunajte zbroj kubova početnih n prirodnih brojeva.

$\triangleright$ Tražimo $S_n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$. Pođimo od jednakosti

$$(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

i ispišimo je za vrijednosti $k = 0, 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{array}{ll} k{=}0 & 1^4{=}0^4 + 4\cdot 0^3 + 6\cdot 0^2 + 4\cdot 0 + 1 \\ k{=}1 & 2^4{=}1^4 + 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1 \\ k{=}2 & 3^4{=}2^4 + 4\cdot 2^3 + 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 1 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ k{=}n-1 & n^4{=}(n{-}1)^4{+}4(n{-}1)^3{+}6(n{-}1)^2{+}4(n{-}1){+}1 \\ k{=}n & (n+1)^4{=}n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \end{array}$$

Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} (n+1)^4 &= 4(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) \\ &\quad + 4(1 + 2 + \ldots + n) + n + 1 \\ &= 4S_n^3 + 6S_n^2 + 4S_n^1 + n + 1 \end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned} 4S_n^3 &= (n+1)^4 - 6S_n^2 - 4S_n^1 - (n+1) \\ &= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1), \end{aligned}$$

nakon sređivanja

$$= (n+1)(n^3 + n^2) = n^2(n+1)^2$$

Dakle,

$$S_n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Korisno je primijetiti da vrijedi $S_n^3 = (S_n^1)^2$, tj.

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

* * *

Lako se uočava da se istovjetnim postupkom može izračunati svaka od suma S_n^m, krenuvši od izraza za $(k+1)^{m+1}$:

$$(k+1)^{m+1} = k^{m+1} + \binom{m+1}{1}k^m + \binom{m+1}{2}k^{m-1} + \ldots + \binom{m+1}{1}k + 1.$$

Zbrajanjem ovih relacija za $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ dobivamo

$$(n+1)^m = \binom{m+1}{1}S_n^m + \binom{m+1}{2}S_n^{m-1} + \ldots + \binom{m+1}{1}S_n^1 + S_n^0$$

Odavde se izračuna S_n^m pomoću već prije izračunatih S_n^1, $S_n^2, \ldots,$ S_n^{m-1}.

Evo vrijednosti ovih zbrojeva za $n = 1, 2, \ldots, 10$.

$$S_n^1 = \tfrac{1}{2}n(n+1),$$
$$S_n^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$
$$S_n^3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2,$$
$$S_n^4 = \tfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$
$$S_n^5 = \tfrac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1),$$
$$S_n^6 = \tfrac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1),$$
$$S_n^7 = \tfrac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2),$$
$$S_n^8 = \tfrac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3),$$
$$S_n^9 = \tfrac{1}{20}n^2(n+1)^2(2n+1)(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3),$$
$$S_n^{10} = \tfrac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3+2n^2-15n+5).$$

1.16. Označimo sa s_n zbroj početnih članova niza (a_n) (tj. $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$). Ako je $s_n = 2n^2 + n$, pokaži da ne postoji član niza a_k, $k \in \mathbf{N}$, takav da je a_k djeljiv sa 4, a da postoji beskonačno mnogo članova niza koji su djeljivi s 5.

▷

$$s_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1},$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n,$$
$$a_n = s_n - s_{n-1} = 2n^2 + n - [2(n-1)^2 + (n-1)] = 4n - 1.$$

Vidimo da svaki član niza pri dijeljenju sa 4 daje ostatak -1, te nijedan nije djeljiv sa 4. Neka je $n = 5k - 1$, $k \in \mathbf{N} \setminus \{1, 2\}$, tada je: $a_n = a_{5k-1} = 4(5k-1) - 1$; $a_n = 20k - 5$, $a_n = 5(4k-1)$, a to je djeljivo sa 5, za svaki $k \in \mathbf{N}$, $k > 2$.

1.17. Izračunajte zbroj $S = 2 + 6 + 12 + 20 + 30 + \ldots + 10\,100$.

▷ Uočimo: $S = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + 100\cdot 101$. Riješimo općenitije: $S_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n\cdot(n+1)$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = S_n^2 + S_n^1$, $S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3)$, $S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$. U našem slučaju $S = S_{100} = \frac{1}{3}\cdot 100\cdot 101\cdot 102$; $S_{100} = 343\,400$.

1.18. Izračunajte $S = \sum_{k=1}^{n} k(k+a)$, $a \in \mathbf{R}$.

▷ $S = \sum_{k=1}^{n} k(k+a) = \sum_{k=1}^{n}(k^2 + k\cdot a) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + a\sum_{k=1}^{n} k$, $S = S_n^2 + a\cdot S_n^1 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{a}{2}n(n+1)$, $S = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+3a+1)$.

1.19. Izračunajte $S = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$.

▷ *1. način.*

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k) = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k \\
&= S_n^3 + 3S_n^2 + 2S_n^1 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 + \tfrac{3}{6}n(n+1)(2n+1) + 2\cdot\tfrac{1}{2}n(n+1) \\
&= \tfrac{1}{4}n(n+1)[n(n+1)+2(2n+1)+4] = \tfrac{1}{4}n(n+1)(n^2+n+4n+2+4) \\
&= \tfrac{1}{4}n(n+1)(n^2+5n+6) = \tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).
\end{aligned}
$$

2. način.

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)k(k+1) = \sum_{k=2}^{n+1}(k^3-k) = \sum_{k=2}^{n+1} k^3 - \sum_{k=2}^{n+1} k \\
&= S_{n+1}^3 - 1^3 - (S_{n+1}^1 - 1) = S_{n+1}^3 - S_{n+1}^1 \\
&= \tfrac{1}{4}[(n+1)(n+2)]^2 - \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) \\
&= \tfrac{1}{4}(n+1)(n+2)[(n+1)(n+2) - 2] \\
&= \tfrac{1}{4}(n+1)(n+2)(n^2+3n) = \tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).
\end{aligned}
$$

1.20. Izračunajte zbroj kvadrata početnih n neparnih prirodnih brojeva.

▷

$S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2,$
$S = (1^2+2^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2+(2n)^2) - (2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2),$
$S = (1^2+2^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2+(2n)^2) - 2^2(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2),$
$S = S_{2n}^2 - 4S_n^2,$
$S = \frac{1}{6}2n(2n+1)(4n+1) - 4\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$
$S = \frac{1}{6}2n(2n+1)(4n+1-2(n+1)),$
$S = \frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1),$
$S = \frac{1}{3}n(4n^2-1).$

1.21. Izračunajte zbroj kubova početnih n neparnih prirodnih brojeva.

▷

$S = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3,$
$S = (1^3+2^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3+(2n)^3) - (2^3+4^3+\ldots+(2n)^3),$
$S = (1^3 + 2^3 + \ldots + (2n)^3) - 2^3(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3),$
$S = S_{2n}^3 - 8S_n^3,$
$S = \frac{1}{4}[2n(2n+1)]^2 - 8\frac{1}{4}[n(n+1)]^2,$
$S = n^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2,$
$S = n^2(4n^2+4n+1-2n^2-4n-2),$
$S = n^2(2n^2-1).$

1.22. Zadan je niz: $a_1 = \dfrac{1^2}{3}$, $a_2 = \dfrac{1^2+2^2}{5}$, $a_3 = \dfrac{1^2+2^2+3^2}{7}$, $a_4 = \dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2}{9}$, ... Izračunajte

a) $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n\,;$

b) $S_n = \sum_{k=1}^{n} s_n\,.$

▷

a)

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{2n+1} = \frac{1}{6}\frac{n(n+1)(2n+1)}{2n+1} = \frac{1}{6}n(n+1),\\
s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_n = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{6}k(k+1) = \tfrac{1}{6}\Big(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\Big) = \tfrac{1}{6}(S_n^2+S_n^1)\\
&= \tfrac{1}{6}\Big[\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\tfrac{1}{2}n(n+1)\Big] = \tfrac{1}{36}n(n+1)(2n+1+3)\\
&= \tfrac{1}{18}n(n+1)(n+2).
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} s_n = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{18}k(k+1)(k+2) = \tfrac{1}{18}\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\\
&= \tfrac{1}{18}\cdot\tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3), \quad \text{vidi zadatak 1.19.}\\
S_n &= \tfrac{1}{72}n(n+1)(n+2)(n+3).
\end{aligned}
$$

1.23. Skup prirodnih brojeva podijeljen je u disjunktne podskupove (particija skupa $\mathbf{N}$) ovako:

$$\mathbf{N} = \{1\}\cup\{2,3\}\cup\{4,5,6\}\cup\{7,8,9,10\}\cup\{11,12,13,14,15\}\cup\ldots$$

Izračunajte zbroj brojeva u n-tom podskupu.

▷ Uočimo da u n-tom podskupu ima n elemenata, zato je prvi član u n-tom podskupu jednak $1+2+3+\ldots+(n-1)+1 = \frac{(n-1)n}{2}+1$, a posljednji član u n-tom podskupu jednak je $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Zbroj brojeva u n-tom podskupu je jednak: $S_n = \frac{n}{2}\Big[\frac{(n-1)n}{2}+1+\frac{n(n+1)}{2}\Big] = \frac{1}{2}n(n^2+1)$.

1.24. Skup prirodnih brojeva podijeljen je u disjunktne podskupove (particija skupa $\mathbf{N}$) ovako:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{N} = \{1,2\}\cup\{3,4,5,6\}\cup\{7,8,9,10,11,12\}\\
\cup\{13,14,15,16,17,18,19,20\}\cup\ldots
\end{aligned}
$$

Izračunajte zbroj brojeva u n-tom podskupu.

▷ Zapazimo da u n-tom podskupu ima $2n$ elemenata. Zato je prvi element u n-tom podskupu jednak: $2+4+6+\ldots+2(n-1)+1 = (n-1)n+1$, a posljednji element u n-tom podskupu je $2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)$. Traženi zbroj je $S_n = \frac{2n}{2}[(n-1)n+1+n(n+1)] = n(2n^2+1)$.

1.25. Skup $\mathbf{N}$ je podijeljen na disjunktne podskupove ovako:

$$\mathbf{N} = \{1\} \cup \{2,3,4\} \cup \{5,6,7,8,9\} \cup \{10,11,12,13,14,15,16\} \cup \ldots.$$

Odredite zbroj brojeva u n-tom podskupu.

▷ Uočimo da je posljednji element u n-tom podskupu n^2, te je prvi elemenat u n-tom podskupu $(n-1)^2+1$ (jer je posljednji element u $(n-1)$-ovom podskupu $(n-1)^2$). Zbog toga je broj elemenata u n-tom podskupu $n^2-(n-1)^2 = 2n-1$. Zbroj elemenata u n-tom podskupu jednak je $S_n = \frac{1}{2}(2n-1)[(n-1)^2+1+n^2] = \frac{1}{2}(2n-1)(2n^2-2n+2) = (2n-1)(n^2-n+1)$. Izraz se može preinačiti ovako $S_n = 2n^3-2n^2+2n-n^2+n-1 = n^3+n^3-3n^2+3n-1$, pa je $S_n = n^3+(n-1)^3$.

1.26. Skup prirodnih brojeva podijeljen je u disjunktne podskupove ovako:

$$\begin{gathered}\mathbf{N} = \{1\} \cup \{2,3,4,5\} \cup \{6,7,8,9,10,11,12,13,14\} \\ \cup\{15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30\} \cup \ldots\end{gathered}$$

Izračunajte zbroj brojeva u n-tom podskupu.

▷ Uočimo da je broj elemenata u n-tom podskupu jednak n^2. Zato je prvi element n-toga podskupa jednak $1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+1 = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+1$, a posljednji $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Zbog toga je zbroj brojeva u n-tom podskupu jednak: $S_n = \frac{1}{2}n^2\left[\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+1+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right] = \frac{1}{12}n^2(4n^3+2n+6) = \frac{1}{6}n^2(2n^3+n+3)$.

1.27. 605 kugli jednakog promjera podijeljeno je na dva dijela, te je od jednog dijela napravljena "piramida" kojoj je baza kvadrat, a od drugog "piramida" kojoj je baza pravilan trokut. Obje piramide imaju jednak broj redova kugli. Izračunajte broj kugli u svakoj "piramidi".

▷ Broj redova označimo s n. Na vrhu četverostrane piramide je jedna kugla, u pretposljednjem redu (drugom od vrha) su 4 kugle, u sljedećem 9, itd, a u prvom (bazi) n^2 kugli. U trostranoj piramidi na vrhu je također jedna kugla, u drugom redu odozgo 3, u sljedećem 6, itd, a u bazi je $\frac{n(n+1)}{2}$ kugli. Označimo li sa S_1 broj kugli u prvoj, a sa S_2 u drugoj piramidi imamo:

$S_1 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2;$

$S_2 = 1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+3+\ldots+n)$

$$=n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+(n-2)\cdot 3+\ldots+[n-(n-1)]\cdot n$$
$$=n+2n+3n+\ldots+n\cdot n-[1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)\cdot n]$$
$$=n(1+2+3+\ldots+n)-[1^2+1+2^2+2+\ldots+(n-1)^2+(n-1)]$$
$$=\tfrac{1}{2}n^2(n+1)-(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2)-(1+2+3+\ldots+(n-1))$$
$$=\tfrac{1}{2}n^2(n+1)-(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2)+n^2-(1+2+3+\ldots+(n-1))$$
$$=\tfrac{1}{2}n^2(n+1)-S_1+n^2-\tfrac{1}{2}n(n-1),$$
$$S_1+S_2=\tfrac{1}{2}[n^2(n+1)+2n^2-n(n-1)],\qquad S_1+S_2=605;$$

$$n^3+n^2+2n^2-n^2+n=1\,210,\quad n^3+2n^2+n=1\,210,\tag{1}$$
$$n(n^2+2n+1)=1\,210,\quad n(n+1)^2=1\,210,$$
$$n(n+1)^2=10\cdot 11^2,\quad n(n+1)^2=10(10+1)^2\implies n=10.$$

(Provjeri da jednadžba (1) nema drugih rješenja u $\mathbf{N}$). $S_1=1^2+2^2+\ldots+10^2=\frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot 21$, $S_1=385$, $S_2=220$.

1.28. Izračunajte zbroj $S=1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+n(3n+1)$.

▷

$$S=\sum_{k=1}^{n}k(3k+1)=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+k)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=3S_n^2+S_n^1=\tfrac{3}{6}n(n+1)(2n+1)+\tfrac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\tfrac{1}{2}n(n+1)(2n+1+1)=n(n+1)^2.$$

1.29. Izračunajte zbroj

$$S=\frac{a+1}{2}+\frac{a+3}{4}+\frac{a+7}{8}+\ldots+\frac{a+2^n-1}{2^n},\quad a\in\mathbf{R},\ n\in\mathbf{N}.$$

▷

$$S=\frac{a-1+2}{2}+\frac{a-1+4}{4}+\frac{a-1+8}{8}+\ldots+\frac{a-1+2^n}{2^n}$$
$$=\frac{a-1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\Big)+\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n\text{ jedinica}}$$
$$=\frac{a-1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}+n=(a-1)\Big(1-\frac{1}{2^n}\Big)+n.$$

1.30. Izračunajte zbroj

$$S=2\cdot 1^2+3\cdot 2^2+4\cdot 3^2+\ldots+(n+1)n^2.$$

▷

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = S_n^3 + S_n^2 \\
&= \frac{1}{4}n^2\cdot(n+1)^2+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{12}n(n+1)[3n(n+1)+2(2n+1)] \\
&= \frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+7n+2) = \frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+6n+n+2) \\
&= \frac{1}{12}n(n+1)[3n(n+2)+(n+2)] = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1).
\end{aligned}
$$

1.31. Neka su (a_n) i (b_n) aritmetički nizovi s prvim članovima a i b i razlikama α, odnosno β. Izračunajte zbroj prvih $n+1$ članova niza (c_n), ako je $c_n = a_n \cdot b_n$, $n \in \mathbf{N}$.

▷

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} c_k &= \sum_{k=0}^{n}(a+k\alpha)(b+k\beta) = \sum_{k=0}^{n}[ab+(a\beta+b\alpha)k+\alpha\beta k^2] \\
&= \alpha\beta\sum_{k=0}^{n}k^2 + (a\beta+b\alpha)\sum_{k=0}^{n}k + \sum_{k=0}^{n}ab \\
&= \alpha\beta\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (a\beta+b\alpha)\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)ab \\
&= \frac{1}{6}(n+1)[(2n^2+n)\alpha\beta + 3(a\beta+b\alpha)n + 6ab] \\
&= \frac{1}{6}(n+1)[2\alpha\beta n^2 + 3(a\beta+b\alpha)n + \alpha\beta n + 6ab] \\
&= \frac{1}{6}(n+1)[2\alpha\beta n^2 + (3a\beta+3b\alpha+\alpha\beta)n + 6ab].
\end{aligned}
$$

1.32. Zadano je m aritmetičkih nizova čiji su prvi članovi: 1, 2, 3,..., m. Razlike tih nizova su redom 1, 3, 5,..., $2m-1$. Neka je $p = mn$. Dokažite da je ukupan zbroj n početnih članova svih nizova jednak zbroju početnih p prirodnih brojeva (m, $n \in \mathbf{N}$).

▷ Promatrajmo k-ti od zadanih nizova ($k \in \mathbf{N}$, $k \leqslant m$). Prvi član toga niza je k, a razlika $2k-1$. Zato za S_k, zbroj početnih n članova toga niza vrijedi

$$S_k = \frac{n}{2}[2k+(n-1)(2k-1)],$$

ili

$$S_k = n^2k + \frac{(1-n)n}{2}.$$

Označimo li traženi zbroj sa S, treba dokazati da je $S = \frac{1}{2}p(p+1)$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{m} S_k = \sum_{k=1}^{m}\Big(n^2k + \frac{(1-n)n}{2}\Big) = n^2\sum_{k=1}^{m} k + \frac{(1-n)n}{2}\sum_{k=1}^{m} 1 \\ &= n^2 \cdot \frac{m(m+1)}{2} + \frac{(1-n)n}{2} \cdot m, \end{aligned}$$

ili, nakon sređivanja:

$$S = \frac{1}{2}mn(mn+1) = \frac{1}{2}p(p+1).$$

1.33. Za zadani aritmetički slijed (a_n), razlike d, izračunajte zbroj $S = \sum \frac{a_k a_{k+1} a_{k+2}}{a_k + a_{k+2}}$ u funkciji od a_1, n, d, (a_1, $d \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$).

▷ Budući je svaki član aritmetičkog slijeda (osim prvoga) jednak aritmetičkoj sredini susjednih članova, to za traženi zbroj vrijedi:

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k a_{k+1} a_{k+2}}{a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} [a_1 + (k-1)d] \cdot [a_1 + (k+1)d] \\ &= \sum_{k=1}^{n} [(a_1 + kd) - d] \cdot [(a_1 + kd) + d] \\ &= \sum_{k=1}^{n} [(a_1 + kd)^2 - d^2] = \sum_{k=1}^{n} (a_1^2 + 2a_1kd + k^2d^2 - d^2) \\ &= (a_1^2 - d^2)\sum_{k=1}^{n} 1 + 2a_1d\sum_{k=1}^{n} k + d^2\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= (a_1^2 - d^2) \cdot n + 2a_1d \cdot \frac{n(n+1)}{2} + d^2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Odatle, nakon sređivanja, dobijemo

$$S = \frac{n}{2}[(n-1)(2n+5)d^2 + 6a_1(nd + d + a_1)].$$