1.

Općinsko natjecanje

Općinsko (gradsko) natjecanje je prvi stupanj natjecanja koji se organizira po jedinstvenim kriterijima Državnog povjerenstva za matematička natjecanja. Godine 1997. ono je održano 1. ožujka.

Evo postavljenih zadataka:

Osnovna škola

4. razred

4.1. U izrazu $98 - 14 : 2 + 5 \cdot 84 - 83$ stavi zagrade tako da je vrijednost izraza:
a) 379 b) 96 c) 47 d) 86 e) 7981.

4.2. Učenici četvrtog razreda, Ivor i Damir, pitali su učiteljicu koje su ocjene dobili iz pismenog rada iz matematike. Učiteljica im reče: *U računu umjesto zvjezdice i kvadratića upišite odgovarajuće znamenke tako da račun bude točan. U gornjem kvadratiću bit će Ivorova ocjena, a u donjem Damirova.*

$$\begin{array}{ccccc}
2 & * & \cdot & 3 & * \\
\hline
 & * & 1 & & \\
 & * & * & 5 & \\
\hline
 & * & \square & * & \\
+ & 8 & * & 6 & \\
\hline
* & 7 & \square & * &
\end{array}$$

Koju je ocjenu dobio Ivor, a koju Damir?

4.3. Zbroj tri broja je 3946. Prvi pribrojnik je četiri puta manji od drugog, a treći je za 4 veći od drugog. Odredi vrijednost svakog pribrojnika.

4.4. Duljine stranica trokuta izražene u milimetrima su tri uzastopna parna broja. Ako je opseg trokuta 180 mm, izračunaj duljine stranica tog trokuta i nacrtaj ga.

4.5. Djed Šimun ima u podrumu posudu od 44 litre, punu soka od višanja. Djed bi želio unucima Dinku i Josipu pokloniti taj sok tako da svaki od njih dobije jednako, ali u podrumu ima samo tri prazne posude od 7, 9 i 30 litara. Može li djed Šimun prelijevanjem podijeliti 44 litre soka na dva jednaka dijela, koristeći samo te četiri posude?

5. razred

5.1. Kojih je peteroznamenkastih brojeva više: onih koji nisu djeljivi s 5 ili onih kojima su i znamenka tisućica i znamenka desettisućica različite od 5?

5.2. Odredi znamenke a i b u broju $\overline{64a4b}$ tako da taj broj pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1, pri dijeljenju s 5 ostatak 2, a pri dijeljenju s 4 ostatak 3.

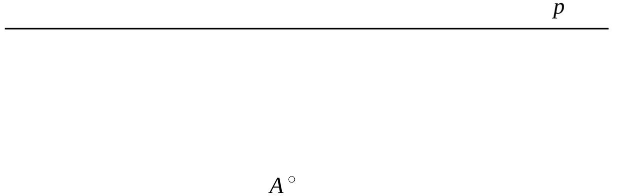
5.3. Razlika dva broja je 83. Ako veći broj povećamo četiri puta, a manji ostane isti, nova je razlika 674. Koji su to brojevi?

5.4. U $5b$ razredu je u prvom polugodištu bilo dva puta više dječaka nego djevojčica, a u $5a$ je broj dječaka i djevojčica bio isti.

U drugom su polugodištu dva dječaka iz $5b$ prešla u $5a$, a 6 djevojčica iz $5a$ u $5b$. Nakon tog preseljenja, u $5a$ ima dvostruko više dječaka nego djevojčica, a u $5b$ dječaka ima za jedan više od djevojčica.

Koliko je u prvom polugodištu bilo djevojčica u $5a$, a koliko u $5b$?

5.5. U ravnini je dan pravac p i točka A koja ne leži na pravcu p. Konstruiraj kvadrat $ABCD$ kojemu je točka A jedan vrh, a pravac p os simetrije. Koliko rješenja postoji?



Sl. 1.1.

6. razred

6.1. Umnožak tri uzastopna parna prirodna broja je 17472. Koji su to brojevi?

6.2. Ako od nekog broja oduzmemo $\frac{2}{5}$ tog broja, a zatim od dobivenog ostatka oduzmemo $\frac{4}{9}$ dobivenog ostatka i 195, preostali će broj biti za 124 veći od $\frac{2}{17}$ početnog broja. Odredi početni broj!

6.3. Za četiri broja znamo da je zbroj prvog i drugog broja 11, zbroj drugog i trećeg broja je 2.3, a zbroj trećeg i četvrtog broja je 8.4. Kolika je polovica zbroja prvog i četvrtog broja?

6.4. Dan je trokut ABC, pri čemu je $\sphericalangle CAB - \sphericalangle CBA = 30°$. Koliki je kut što ga zatvaraju visina iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$ i simetrala vanjskog kuta pri vrhu C?

6.5. Dana su dva usporedna pravca a i b i pravac c koji siječe pravac a u točki A, te pravac b u točki B, pri čemu pravac c nije okomit na pravac a. Na pravcu b lijevo od točke B odabrana je točka D, a desno od točke B točka E. Simetrala kuta $\sphericalangle ABD$ siječe pravac a u točki M, a simetrala kuta $\sphericalangle ABE$ siječe pravac a u točki N. Dokaži da je:

a) trokut MBN pravokutan,

b) $|AM| = |AN|$.

7. razred

7.1. Zemlja tek kupljena u cvjećarnici sadrži 11% vode. Domaćica želi zasaditi puzavicu koja zahtijeva vlažnost zemlje 24%. Koliko vode valja uliti u 3kg kupljene zemlje kako bi se biljka uspješno presadila?

7.2. Dvanaest radnika treba obaviti jedan posao. Oni ga mogu završiti za 42 dana. Nakon 3 dana rada otišla su 4 radnika. Nakon sljedećih 6 dana dođe 7 novih radnika, a zatim je, nakon sljedećih 5 dana, došlo još 8 radnika, koji su zajedno s radnicima koje su zatekli završili posao. Za koliko je dana završen cijeli posao?

7.3. Zbroj broja dijagonala i broja stranica konveksnog mnogokuta je 903. Odredi omjer zbroja svih vanjskih kutova i zbroja svih unutarnjih kutova tog mnogokuta.

7.4. Konstruiraj trokut ABC ako je zadano $c - b = 2$ cm, $v_c = 3.5$ cm i kut $\beta = 45°$.

7.5. Dan je jednakokračan trokut ABC, pri čemu je $|AB| = |AC|$. Neka je točka E presjek simetrale kuta $\sphericalangle ABC$ i kraka $\overline{AC}$, a točka D nožište visine iz vrha A na osnovicu $\overline{BC}$.

Odredi unutarnje kutove trokuta ABC ako je $|BE| = 2|AD|$.

8. razred

8.1. Skrati razlomak $\dfrac{a^2-16}{12+a-a^2}$.

8.2. Odredi jednadžbu pravca koji prolazi točkom $A(7,2)$, tako da se duljina odsječka tog pravca na pozitivnom dijelu osi x odnosi prema ordinati točke A kao $5:3$.

8.3. Odredi sve dvoznamenkaste brojeve $\overline{ab}$ i $\overline{cd}$, tako da je znamenka desetica drugog broja jednaka dvostrukoj znamenci jedinica prvog broja i da je

$$\overline{ab}^2+\overline{cd}^2=\overline{ba}^2+\overline{dc}^2.$$

8.4. Neka je u trapezu $ABCD$ krak $\overline{AD}$ okomit na osnovicu $\overline{AB}$, a kružnica promjera $\overline{BC}$ siječe osnovicu $\overline{AB}$ u točki H, a krak $\overline{AD}$ u točkama E i F. Dokaži da je:

a) $|AH|=|CD|$,

b) $\triangle ABE\sim\triangle DEC$.

8.5. Dan je pravokutnik $ABCD$. Neka je točka M polovište stranice $\overline{AB}$, a točka E presjek dijagonale $\overline{AC}$ i dužine $\overline{DM}$. Koliki je kut $\sphericalangle CED$, ako je $|AB|:|BC|=\sqrt{2}:1$?

Srednja škola

1. razred

1.1. Odredite sva realna rješenja jednadžbe:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^8}+\frac{1}{x^{12}}-\frac{4}{x^7}=0.$$

1.2. Neka su x i y cijeli brojevi. Dokaži da je tada $3x+y$ djeljivo s 13 ako i samo ako je $5x+6y$ djeljivo s 13.

1.3. Iz neke točke hipotenuze pravokutnog trokuta spuste se okomice na katete. Neka su nožišta tih okomica N_1 i N_2. Kada će spojnica tih nožišta, $\overline{N_1N_2}$, biti najkraća? Kolika je duljina te najkraće spojnice ako su duljine kateta a i b?

1.4. Tri kružnice s nepoznatim središtima, u parovima se dodiruju u točkama A, B i C. Koristeći jedno ravnalo konstruirajte središta tih kružnica.

2. razred

2.1. Dokažite da svaki pravac koji prolazi središtem upisane kružnice trokuta dijeli opseg i površinu tog trokuta u istom omjeru.

2.2. Ako su koeficijenti a, b, c takvi da je $a > 0$ i $b > a + c$, dokažite da jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ ima dva različita rješenja.

2.3. Ako su a i b kompleksni brojevi, dokažite da vrijedi jednakost:

$$|1 - a\overline{b}|^2 - |a - b|^2 = (1 + |ab|)^2 - (|a| + |b|)^2.$$

2.4. Dane su dvije kružnice k_1 i k_2 koje nemaju zajedničkih točaka. Zajedničke vanjske tangente, t_1 i t_2, diraju kružnicu k_1 u točkama A_1 i A_2, a kružnicu k_2 u točkama B_1 i B_2. Zajedničke unutarnje tangente, p_1 i p_2, diraju kružnicu k_1 u točkama C_1 i C_2, a kružnicu k_2 u točkama D_1 i D_2. Dokažite da je udaljenost pravaca A_1A_2 i C_1C_2 jednaka udaljenosti pravaca B_1B_2 i D_1D_2.

3. razred

3.1. Riješite nejednadžbu

$$\log_a(x - a) > \log_{\frac{1}{a}}(x + a)$$

u zavisnosti od parametra a.

3.2. Odredite sumu rješenja jednadžbe

$$\sin 3x + \cos 2x + 2\cos^2 x = 0$$

u segmentu $[-\pi, 2\pi]$.

3.3. Koji od jednakokračnih trokuta upisanih u zadanu kružnicu polumjera R ima najveću sumu duljina osnovice i visine na nju?

Izrazite najveću vrijednost te sume pomoću R.

3.4. U ravnini je dano 1997 točaka, raspoređenih tako da svake tri određuju trokut površine najviše 1.

Dokažite da postoji trokut površine 4 koji sadrži sve dane točke.

4. razred

4.1. Odredite jednadžbu pravca p koji prolazi točkom $T(-1, 1)$, a polovište segmenta kojeg na p odsjecaju pravci $x + 2y - 1 = 0$ i $x + 2y - 3 = 0$ leži na pravcu $x - y - 1 = 0$.

4.2. Nađite sve prirodne brojeve x za koje je

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^x = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^8)\ldots(1 + a^{2^n}),$$

gdje je a realan i n prirodan broj.

4.3. Neka je $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots$, $p_n, \ldots$ niz svih prostih brojeva poredanih po veličini. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost

$$p_n \geqslant 3n - 5.$$

4.4. Na koji način treba staviti dva predmeta u dvije različite ladice okruglog stola s n ($n \geqslant 5$) ladica, tako da vjerojatnost nalaženja barem jednog predmeta otvaranjem dviju susjednih ladica bude najmanja?

Rješenja zadataka

4.1. a) $(98 - 14) : 2 + 5 \cdot 84 - 83 = 84 : 2 + 420 - 83 = 42 + 337 = 379$.
b) $98 - 14 : 2 + 5 \cdot (84 - 83) = 98 - 7 + 5 = 96$ ili

$(98 - 14 : 2 + 5) \cdot (84 - 83) = 96 \cdot 1 = 96$.
c) $(98 - 14) : 2 + 5 \cdot (84 - 83) = 84 : 2 + 5 = 47$.
d) $98 - (14 : 2 + 5) \cdot (84 - 83) = 98 - 12 = 86$.
e) $(98 - 14 : 2 + 5) \cdot 84 - 83 = 8064 - 83 = 7981$.

4.2. Znamenka jedinica množenika je 7, jer pomnožena s 3 mora dati znamenku jedinica 1. Znamenka jedinica množitelja mora biti 5, jer jedino kad 7 pomnožimo s 5 dobivamo znamenku jedinica 5. Sada se lako popuni dio računa s množenjem (vidi račun desno).

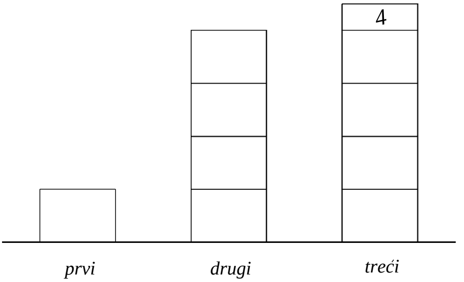
$$\begin{array}{rrrr}
2\,7 & \cdot & 3\,5 & \\
\hline
8 & 1 & & \\
1 & 3 & 5 & \\
\hline
9 & 4 & 5 & \\
+\,8 & * & 6 & \\
\hline
*\,7 & \square & * &
\end{array}$$

Pri zbrajanju nepoznata znamenka u $8 * 6$ mora biti 0, jer kad bi bila između 1 i 5 onda bi u kvadratiću dobili broj između 6 i 9 ili 0, a to ne može biti ocjena, a kada bi bila između 6 i 9, onda bi znamenka tisućica bila 8, što je suprotno pretpostavci. Račun izgleda ovako:

$$\begin{array}{r}
27 \cdot 35 \\
\hline
81 \\
135 \\
\hline
945 \\
+\,806 \\
\hline
1751
\end{array}$$

Ivor je dobio ocjenu 4, a Damir 5.

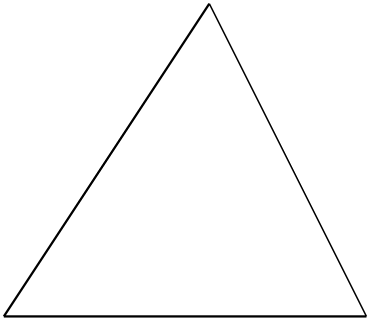
4.3. Prikažimo pribrojnike pomoću stupaca.



Sl. 1.2.

Kad bi zbroj 3946 smanjili za 4 i tu razliku podijelili na devet jednakih dijelova dobili bi vrijednost prvog pribrojnika, tj. prvi pribrojnik je 438. Drugi je četiri puta veći, tj. drugi je $438 \cdot 4 = 1752$, a treći je $1752 + 4 = 1756$.

4.4. *1. način.* Ako je x duljina najkraće stranice, tada su duljine ostalih dviju stranica $x + 2$ i $x + 4$. Vrijedi $x + (x + 2) + (x + 4) = 180$, tj. $x = 58$. Duljine stranica trokuta su 58 mm, 60 mm i 62 mm.



Sl. 1.3.

2. način. Stranica trokuta srednje duljine je za dva milimetra veća od najkraće stranice trokuta, a za dva milimetra manja od najdulje stranice trokuta. Kad bi najkraću stranicu povećali za 2 mm, a najdulju skratili za 2 mm, dobili bi jednakostraničan trokut istog opsega, tj. duljina stranica tog novog trokuta bi bila 60 mm. Duljine stranica trokuta su 58 mm, 60 mm i 62 mm.

4.5. Koristeći devetlitrenu posudu, djed iz posude od 44 litre prelije dva puta po 9 litara u posudu od 30 litara. Sada u tridesetlitrenoj posudi ima 18 litara soka. Zatim pomoću sedamlitrene posude odlije iz tridesetlitrene posude dva puta po sedam litara u najveću posudu. Sada u tridesetlitrenoj posudi ima $18 - 14$, tj. 4 litre soka. Opet, koristeći devetlitrenu posudu iz najveće posude prelije u tridesetlitrenu još dva puta po devet litara, pa u tridesetlitrenoj sada ima $4 + 18 = 22$ litre, a u najvećoj je ostalo isto 22 litre soka. Time je opisan jedan od načina kako djed Šimun može podijeliti unucima sok od višanja.

* * *

5.1. Peteroznamenkasti broj zapišimo u obliku $\overline{abcde}$. Izračunajmo koliko ima peteroznamenkastih brojeva koji nisu djeljivi s 5, tj. kojima znamenka jedinica nije 0 ili 5. Znamenku a možemo napisati na 9 načina, jer je $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; znamenke b, c, d na 10 načina, jer je $b, c, d \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ i znamenku e na 8 načina, jer je $e \in \{1,2,3,4,6,7,8,9\}$. Dakle, peteroznamenkastih brojeva koji nisu djeljivi sa 5 ima $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 8 = 72000$.

Izračunajmo koliko ima peteroznamenkastih brojeva kojima su znamenke a i b različite od 5. Znamenku a možemo napisati na 8 načina, jer je $a \in \{1,2,3,4,6,7,8,9\}$; znamenku b možemo napisati na 9 načina, jer je $b \in \{0,1,2,3,4,6,7,8,9\}$; znamenke c, d i e možemo napisati na 10 načina, jer je $c, d, e \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Dakle, peteroznamenkastih brojeva kojima su znamenke a i b različite od 5 ima $8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 72000$.

Vidimo da peteroznamenkastih brojeva koji nisu djeljivi s 5 ima jednako mnogo kao i peteroznamenkastih brojeva kojima su znamenke a i b različite od 5.

5.2. Ako broj pri djeljenju s 5 ima ostatak 2, tada znamenka b može biti ili 2 ili 7.

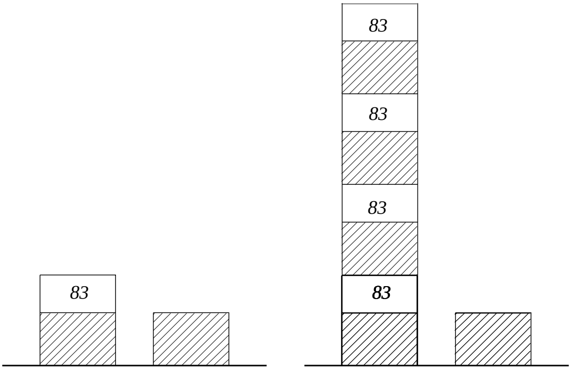
Posljednje dvije znamenke broja $\overline{64a4b}$ umanjenog za 3 moraju biti djeljive s 4, a to je slučaj samo kad je $b = 7$.

Dakle, broj ima oblik $\overline{64a47}$. Taj broj umanjen za 1 mora biti djeljiv s 3, tj. broj $\overline{64a46}$ je djeljiv s 3. Prema kriteriju djeljivosti, broj je djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenaka $6 + 4 + a + 4 + 6 = 20 + a$ djeljiv s 3, a to je u slučaju kad je $a = 1$, $a = 4$ ili $a = 7$.

5.3. Ako manji broj označimo sa x, tada je veći broj jednak $x + 83$ i vrijedi $4(x + 83) - x = 674$, tj. $x = 114$, a $x + 83 = 197$. To su brojevi 114 i 197.

Zadatak se može riješiti i grafički, tj. bez upotrebe jednadžbe. Pomoću dva stupca prikažimo odnos dva broja dan u prvoj rečenici (slika 1.4.).

Kad veći broj uvećamo četiri puta stupci izgledaju kao na slici 1.4. Razlika između ta dva stupca je 674, tj. jedan mali (iscrtkani) stupac je $(674 - 4 \cdot 83) : 3 = 114$.



Sl. 1.4.

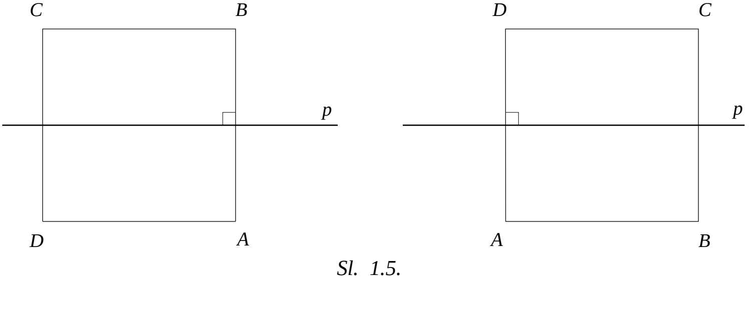
5.4. Neka je x broj dječaka, a ujedno i broj djevojčica u $5a$ u prvom polugodištu. Nakon preseljenja vrijedi $x + 2 = 2(x - 6)$, tj. $x = 14$. U prvom polugodištu u $5a$ je bilo 14 djevojčica.

Neka je y broj djevojčica u $5b$ u prvom polugodištu. Tada dječaka ima $2y$ i nakon preseljenja vrijedi jednakost $2y - 2 = (y + 6) + 1$, tj. $y = 9$. U prvom polugodištu u $5b$ je bilo 9 djevojčica.

Zadatak se može riješiti bez upotrebe jednadžbi. U prvom polugodištu u $5a$ je bio jednak broj djevojčica i dječaka, a u drugom su došla 2 dječaka, a otišlo šest djevojčica, tj. sada ima za 8 više dječaka nego djevojčica. A prema uvjetima zadatka, u drugom polugodištu, dječaka ima dvostruko više nego djevojčica, pa zaključujemo da je u $5a$ u drugom polugodištu 8 djevojčica i 16 dječaka, a u prvom polugodištu je bilo 14 djevojčica i isto toliko dječaka.

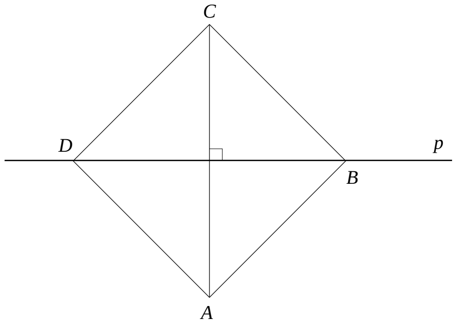
U $5b$ je u drugom polugodištu došlo 6 djevojčica, a otišla su dva dječaka i nakon toga je dječaka bilo za 1 više nego djevojčica. Da nije došlo tih 6 djevojčica, dječaka bi bilo za 7 više, a da nisu otišla dva dječaka bilo bi ih za 9 više od djevojčica. Dakle, u prvom polugodištu je dječaka bilo za 9 više od djevojčica, a prema uvjetu zadatka bilo ih je dvostruko više nego djevojčica. Dakle, u prvom polugodištu je u $5b$ razredu bilo 9 djevojčica i 18 dječaka.

5.5.



Sl. 1.5.

Kvadrat $ABCD$ ima 4 osi simetrije: dvije koje prolaze polovištima nasuprotnih stranica i dvije koje sadrže dijagonale. Budući da točka A ne leži na pravcu p, p ne može biti os simetrije koja prolazi dijagonalom $\overline{AC}$. Dakle, postoje tri rješenja: točka A se osnom simetrijom obzirom na pravac p može preslikati u susjedni vrh B ili D ili u nasuprotni vrh C.



Sl. 1.6.

* * *

6.1. Kako je $20 \cdot 20 \cdot 20 = 8000$, a $30 \cdot 30 \cdot 30 = 27000$, zaključujemo da su traženi brojevi veći od 20, a manji od 30. Od tri uzastopna parna broja jedan je sigurno djeljiv s 4, a jedan s 3, pa je umnožak tih brojeva djeljiv s $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3$, tj. sa 48.

Sada lako zadani umnožak rastavimo na faktore. Naime, zbog $17472 : 48 = 364$, te $364 : 4 = 91$ i $91 = 7 \cdot 13$, vrijedi $17472 = 48 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 13$. Zbog faktora 13 i 7, nužno je jedan broj 26, a drugi 28.

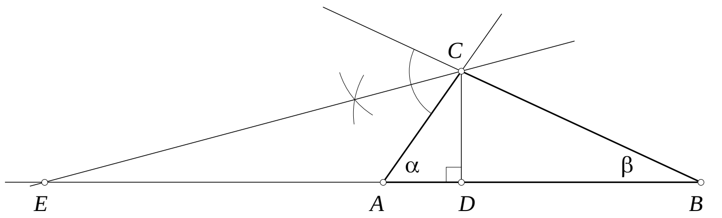
Traženi su brojevi 24, 26 i 28.

6.2. Ako od broja x oduzmemo $\frac{2}{5}$ tog broja ostane $\frac{3}{5}$ tog broja, tj. $\frac{3}{5}x$. Od tog rezultata oduzimamo $\frac{4}{9}$ dobivenog ostatka i 195, tj. $\frac{3}{5}x - \frac{4}{9}\left(\frac{3}{5}x\right) - 195$, što je jednako $\frac{1}{3}x - 195$.

Sada vrijedi $\frac{1}{3}x - 195 = \frac{2}{17}x + 124$. Početni broj je 1479.

6.3. Neka je a prvi broj, b drugi, c treći i d četvrti broj. Tada vrijede ove jednakosti: $a + b = 11$, $b + c = 2.3$, $c + d = 8.4$. Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo redom $a + 2b + 2c + d = 21.7$, odnosno $a + 2(b + c) + d = 21.7$, $a + 2 \cdot 2.3 + d = 21.7$, $a + 4.6 + d = 21.7$, tj. $a + d = 17.1$. Zato je polovina zbroja prvog i četvrtog broja 8.55.

6.4. Neka je $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$, kut γ_1 vanjski kut kod vrha C, točka D nožište visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$, točka E presjek simetrale vanjskog kuta kod vrha C i pravca AB i neka je $\sphericalangle ECD = x$. Tada je $\alpha - \beta = 30^\circ$ ili $\alpha = \beta + 30^\circ$, $\sphericalangle ACD = 90^\circ - \alpha$, jer je trokut ADC pravokutan, $\sphericalangle ACE = \frac{\gamma_1}{2}$.

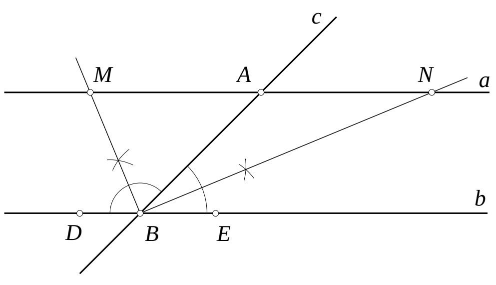


Sl. 1.7.

Dalje vrijede redom ove jednakosti: $x = \frac{\gamma_1}{2} + 90^\circ - \alpha$, $x = \frac{\alpha+\beta}{2} + 90^\circ - \alpha$, $x = \frac{\alpha+\beta}{2} + 90^\circ - (\beta + 30^\circ)$, $x = \frac{\alpha+\beta}{2} + 90^\circ - \beta - 30^\circ$, $x = \frac{\alpha+\beta}{2} + 60^\circ - \beta$, $x = \frac{\alpha+\beta+120^\circ-2\beta}{2}$, $x = \frac{\alpha-\beta+120^\circ}{2}$, $x = \frac{30^\circ+120^\circ}{2}$, $x = 75^\circ$. Kut $\sphericalangle ECD$ je 75°.

Simetrala vanjskog kuta pri vrhu C zatvara s visinom iz vrha C kutove od 75°, odnosno 105°.

6.5.



Sl. 1.8.

a) Neka je $\sphericalangle ABD = \alpha$ i $\sphericalangle ABE = \beta$. Tada je $\sphericalangle ABM = \frac{\alpha}{2}$ i $\sphericalangle ABN = \frac{\beta}{2}$. Kako je $\alpha + \beta = 180^\circ$, jer su to dva sukuta, slijedi da je $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$, tj. $\sphericalangle MBN = 90^\circ$, pa je trokut MBN pravokutan.

b) Očito je $\sphericalangle DBM = \sphericalangle AMB$, jer su to kutovi uz presječnicu, a zbog $\sphericalangle DBM = \sphericalangle ABM$ (po definiciji simetrale), slijedi da je $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ABM$, a to znači da je trokut AMB jednakokračan, pa je $|AM| = |AB|$.

Kako je $\sphericalangle EBN = \sphericalangle ANB$ i $\sphericalangle EBN = \sphericalangle ABN$, slijedi da je $\sphericalangle ANB = \sphericalangle ABN$, pa je $|AB| = |AN|$.

Iz $|AM| = |AB|$ i $|AB| = |AN|$ slijedi da je $|AM| = |AN|$.

* * *

7.1. U 3 kg kupljene zemlje ima 89% suhe tvari, odnosno $3 \cdot 0.89$, tj. 2.67 kg, pri čemu će masa suhe tvari ostati ista i nakon dolijevanja vode.

Neka je u 3 kg zemlje dodano x kg (litara) vode. Tada vrijedi jednadžba $2.67 = 0.76(3 + x)$. Rješenje ove jednadžbe je $x = \frac{39}{76} = 0.513\ldots$.

U kupljenu zemlju valja uliti 0.51 kg, tj. 0.51 litru vode.

7.2. Očito su broj radnika i broj dana dvije obrnuto proporcionalne veličine, pri čemu je ukupna količina posla jednaka $12 \cdot 42$ radnih dana.

Neka je x broj dana koji su radili radnici nakon dolaska na posao 8 radnika i koji su zajedno s radnicima koji su već bili na poslu završili posao. Kako je taj posao izvršen u dijelovima, to vrijedi jednadžba $12\cdot3+8\cdot6+15\cdot5+23x = 12\cdot42$. Rješenje ove jednadžbe je $x = 15$.

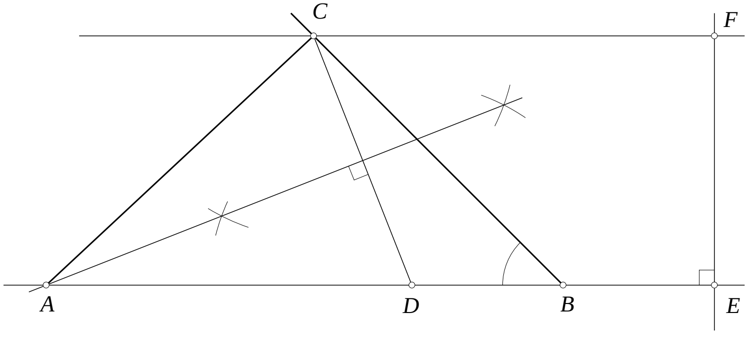
Prema tome, cijeli je posao bio završen za $3 + 6 + 5 + 15$, tj. 29 dana.

7.3. Zbroj broja svih dijagonala i broja stranica mnogokuta s n stranica jednak je ukupnom broju svih pravaca koji se mogu nacrtati kroz n točaka, a to je $\frac{n(n-1)}{2}$. Do ovog rezultata smo mogli doći i ovako: $D(n) + n = \frac{n(n-3)}{2} + n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Zato vrijedi jednadžba $\frac{n(n-1)}{2} = 903$, ili dalje redom $n(n-1) = 2 \cdot 903$, $n(n-1) = 2\cdot3\cdot7\cdot43$, tj. $n(n-1) = 42\cdot43$, pa je $n = 43$. Kako je zbroj vanjskih kutova svakog mnogokuta 360°, to vrijedi omjer $\frac{360}{(n-2)\cdot180} = \frac{2\cdot180}{(43-2)\cdot180} = \frac{2}{41}$.

Prema tome, omjer zbrojeva vanjskih i unutarnjih kutova danog mnogokuta je $2 : 41$.

7.4. *Analiza.* Na stranici $\overline{AB}$ odaberemo točku D tako da je $|AD| = |AC| = b$. Trokut BCD možemo lako konstruirati. Naime, vrh C je presjek drugog kraka kuta $\beta = 45^\circ$ i pravca usporednog s pravcem BD na udaljenosti v_c. Ostaje još odrediti vrh A. Kako je trokut ADC jednakokračan, slijedi da se vrh A nalazi na simetrali osnovice $\overline{CD}$, pa je vrh A presjek simetrale $\overline{CD}$ i pravca BD.

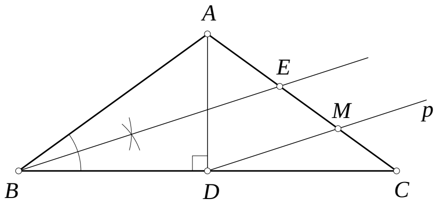


Sl. 1.9.

Konstrukcija. Nacrtamo pravac i na njemu točke B i D tako da je $|BD| = c - b = 2$ cm. U točki B na pravcu BD nacrtamo kut $\beta = 45^\circ$. U nekoj točki E pravca BD nacrtamo okomicu EF, duljine $|EF| = v_c = 3.5$ cm. Točkom F nacrtamo pravac usporedan s pravcem BD, koji presijeca jedan krak kuta β u točki C. Presjek simetrale stranice $\overline{CD}$ i pravca BD je vrh A.

7.5. Neka je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABC = 2x$. Tada je $\sphericalangle CBE = x$. Točkom D nacrtamo pravac p usporedan sa simetralom BE. Neka je točka M presjek pravca p i stranice $\overline{AC}$.

Sad je očito $\triangle CDM \sim \triangle CBE$. Naime, $\sphericalangle MCD$ je zajednički, a $\sphericalangle CDM = \sphericalangle CBE = x$, jer su to kutovi uz presječnicu. To znači da su stranice proporcionalne. Kako je $|BC| = 2|CD|$, to je i $|BE| = 2|DM|$, a zbog $|BE| = 2|AD|$ slijedi da je $2|DM| = 2|AD|$, odnosno $|DM| = |AD|$, a to znači da je trokut ADM jednakokračan, pa je $\sphericalangle DAM = \sphericalangle DMA = 3x$ (vanjski kut trokuta CMD).



Sl. 1.10.

Primjenom poučka o kutovima trokuta vrijedi jednadžba $2x + 2x + 2 \cdot 3x = 180$. Rješenje jednadžbe je $x = 18$.

Kutovi trokuta ABC su 36°, 36°, 108°.

* * *

8.1. Ako brojnik i nazivnik zadanog razlomka rastavimo na faktore, dobivamo redom:

$$\frac{a^2-16}{12+a-a^2} = \frac{(a-4)(a+4)}{12+4a-3a-a^2} = \frac{(a-4)(a+4)}{4(3+a)-a(3+a)}$$
$$= \frac{(a-4)(a+4)}{(3+a)(4-a)} = -\frac{(a-4)(a+4)}{(3+a)(a-4)} = -\frac{a+4}{a+3}.$$

8.2. Točka u kojoj traženi pravac siječe os x ima ordinatu 0, pa je apscisa te točke $y = ax + b$, $0 = ax + b$, $ax = -b$, $x = -\frac{b}{a}$. Zato vrijedi razmjer $-\frac{b}{a} : 2 = 5 : 3$, odnosno $-\frac{3b}{a} = 10$, ili $10a + 3b = 0$.

Očito je da koordinate točke $A(7, 2)$ moraju zadovoljavati jednadžbu pravca $y = ax + b$, pa vrijedi $2 = 7a + b$. Rješenje sustava $10a + 3b = 0$, $7a + b = 2$ su traženi parametri: $a = \frac{6}{11}$ i $b = -\frac{20}{11}$.

Tražena jednadžba pravca je $y = \frac{6}{11}x - \frac{20}{11}$.

8.3. Zadanu jednakost možemo redom pisati ovako:

$$(10a+b)^2 + (10c+d)^2 = (10b+a)^2 + (10d+c)^2,$$
$$100a^2 + 20ab + b^2 + 100c^2 + 20cd + d^2$$
$$= 100b^2 + 20ab + a^2 + 100d^2 + 20cd + c^2,$$
$$99a^2 + 99c^2 = 99b^2 + 99d^2, \quad a^2 + c^2 = b^2 + d^2,$$

a zbog $c = 2b$ imamo $a^2 + 4b^2 = b^2 + d^2$, odnosno $a^2 + 3b^2 = d^2$ ili $3b^2 = d^2 - a^2$, tj. $3b^2 = (d - a)(d + a)$.

Zbog $c = 2b$, znamenka b može imati jednu od vrijednosti 1,2,3,4. Zato razlikujemo četiri moguća slučaja:

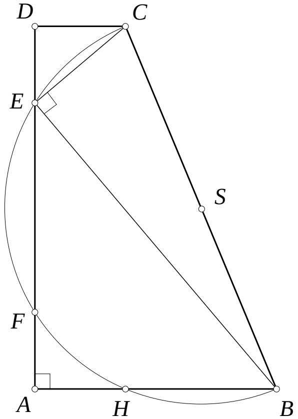
1. Za $b = 1$ i $c = 2$ vrijedi jednakost $(d - a)(d + a) = 3$, pa imamo sustav jednadžbi $d - a = 1$, $d + a = 3$, a rješenje je $a = 1$, $d = 2$. Traženi brojevi su 11 i 22.

2. Za $b = 2$ i $c = 4$ vrijedi jednakost $(d - a)(d + a) = 12$. Sada je očito ili faktor $d - a$ ili faktor $d + a$ djeljiv s 2, a kako je i razlika $d + a - (d - a) = 2a$ djeljiva s 2, nužno je svaki faktor djeljiv s 2, pa imamo sustav $d - a = 2$, $d + a = 6$, a rješenje sustava je $a = 2$, $d = 4$. Traženi su brojevi 22 i 44.

3. Za $b = 3$ i $c = 6$ vrijedi jednakost $(d - a)(d + a) = 27$. Očito je bar jedan faktor djeljiv s 9, a kako su a i d znamenke, to je nužno $a + d = 9$, pa imamo sustav $d - a = 3$, $d + a = 9$, a rješenje sustava je $a = 3$, $d = 6$. Traženi su brojevi 33 i 66.

4. Za $b = 4$ i $c = 8$ vrijedi jednakost $(d - a)(d + a) = 48$. Uvažavajući (kao u prvom slučaju) da je svaki faktor paran broj i da su a i d znamenke, od 5 mogućih sustava 3 nemaju rješenje, pa imamo 2 sustava jednadžbi: $d - a = 4$, $d + a = 12$, odnosno $d - a = 6$, $d + a = 8$. Rješenja ovih sustava su $a = 4$, $d = 8$ i $a = 1$, $d = 7$. Traženi brojevi su 44 i 88, te 14 i 87.

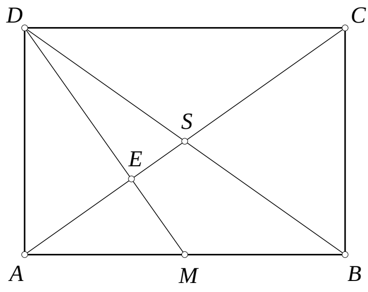
8.4. a) Kako je prema Talesovu poučku $\sphericalangle CHB = 90^\circ$, slijedi da je $CH \parallel AD$, jer je $\sphericalangle BAD = 90^\circ$, a zbog $AB \parallel CD$ zaključujemo da je četverokut $AHCD$ pravokutnik, a to znači da je $|AH| = |CD|$.



Sl. 1.11.

b) Trokut BAE i trokut EDC su dva pravokutna trokuta, $\sphericalangle BAE = \sphericalangle EDC = 90^\circ$. Kako je $\sphericalangle BEC = 90^\circ$, prema Talesovu poučku slijedi da je $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CED$, jer su to kutovi s okomitim kracima. Naime, $BE \perp CE$ i $AB \perp DE$. Ako dva trokuta imaju dva para sukladnih kutova, onda su slični, tj. $\triangle ABE \sim \triangle DEC$.

8.5.



Sl. 1.12.

Neka je $|BC| = |AD| = x$. Tada iz $|AB| : |BC| = \sqrt{2} : 1$ slijedi da je $|AB| = |BC| \cdot \sqrt{2}$, odnosno $|AB| = x\sqrt{2}$, pa je $|AM| = \frac{x\sqrt{2}}{2}$. Duljinu $|MD|$ odredimo primjenom Pitagorina poučka na trokut MAD. Naime, iz $|MD|^2 = |AM|^2 + |AD|^2$ dobivamo $|MD|^2 = \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 + x^2$, odnosno $|MD|^2 = \frac{3x^2}{2}$, ili nakon sređivanja $|MD| = \frac{x\sqrt{6}}{2}$.

U trokutu ABC primjenom Pitagorina poučka vrijedi $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$, ili $|AC|^2 = (x\sqrt{2})^2 + x^2$, te nakon sređivanja $|AC| = x\sqrt{3}$, pa je (ako sa S označimo točku presjeka dijagonala) $|AS| = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Lako se pokaže da je točka E težište trokuta ABD, a to znači da je $|AE| = \frac{2}{3}|AS|$, ili $|AE| = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}$, tj. $|AE| = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

Dalje možemo na razne načine. Jedan je preko obrata Pitagorina poučka, a za to nam treba $|DE| = \frac{2}{3}|MD|$, $|DE| = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{6}}{2}$, $|DE| = \frac{x\sqrt{6}}{3}$.

Valja još pokazati da vrijedi $|AE|^2 + |DE|^2 = |AD|^2$. Zaista: $\left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{6}}{3}\right)^2 = x^2$, ili $\frac{x^2}{3} + \frac{2x^2}{3} = x^2$, tj. $x^2 = x^2$, iz čega slijedi da je $AE \perp DE$, tj. $\sphericalangle CED = 90^\circ$.

* * *

1.1. Vidimo da $x = 0$ nije rješenje. Zato množenjem s x^{12} dobivamo ekvivalentnu jednadžbu:

$$x^{10} + x^6 + x^4 + 1 - 4x^5 = 0.$$

Grupiranjem x^5, po jednog uz svaki od prva četiri sumanda, dobivamo:

$$x^5(x^5 - 1) + x^5(x - 1) - x^4(x - 1) - (x^5 - 1) = 0$$

i na kraju:

$$(x^5 - 1)^2 + x^4(x - 1)^2 = 0.$$

Oba pribrojnika na lijevoj strani su nenegativna i zbroj im je jednak nula, pa svaki od njih mora biti jednak nuli. Zaključujemo da je jedino rješenje $x = 1$.

Napomena 1. U prvoj jednadžbi mogli smo $-4x^5$ interpretirati kao $-2x^5 - 2x^5$, pa odmah uočiti dva kvadrata binoma $(x^5 - 1)^2 + (x^3 - x^2)^2 = 0$.

1.2. *Prvo rješenje.* Neka je $3x + y = A$ i $5x + 6y = B$. Promatramo izraz:

$$nA + mB = (3n + 5m)x + (n + 6m)y.$$

Izaberimo cijele brojeve m i n tako da je desna strana sigurno djeljiva s 13, tj.

$$\begin{array}{ccc} 13 & \mid & 3n + 5m \\ 13 & \mid & n + 6m. \end{array}$$

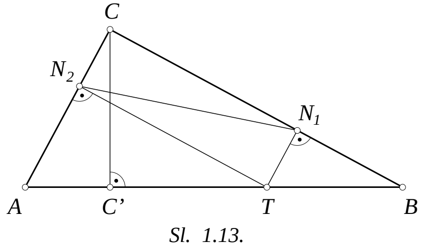
Najjednostavnije rješenje je $n = 1$, $m = 2$ za koje je $A + 2B = 13(x + y)$.

Budući da 1 i 2 nisu djeljivi s 13, slijedi da ako je jedan od A ili B djeljiv s 13, onda je i drugi djeljiv s 13.

Drugo rješenje – izravno. Pretpostavimo da je $3x + y = 13k$. Tada je npr. $5x + 6y - 6 \cdot (13k) = -13x$, pa je i $5x + 6y$ djeljivo s 13.

S druge strane, ako je $5x + 6y = 13l$, onda je $3x + y + 2 \cdot (13l) = 13(x + y)$. Zato je i $3x + y$ djeljivo s 13.

1.3. Četverokut TN_1CN_2 je pravokutnik, pa možemo, umjesto njegove dijagonale $\overline{N_1N_2}$, promatrati drugu dijagonalu $\overline{TC}$. Ona je najkraća kad se za točku T uzme nožište visine iz vrha C.



Sl. 1.13.

Tada će duljina dijagonale biti jednaka visini iz vrha C, koja se može dobiti izjednačavanjem dviju formula za površinu trokuta:

$$P = \frac{ab}{2} = \frac{cv}{2},$$

iz čega slijedi:

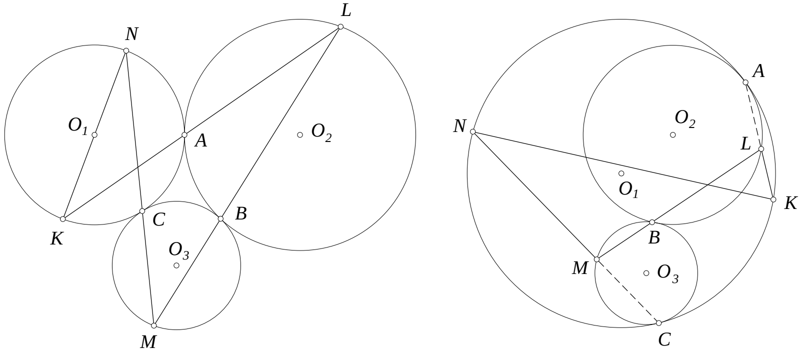
$$|N_1N_2| = v = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Napomena 1. Umjesto površina, mogu se promatrati i slični trokuti $AC'C$ i $CC'B$.

Napomena 2. Ako se ne uoči na vrijeme mogućnost prelaska na drugu dijagonalu, isti rezultat se može dobiti i promatrajući slične trokute (npr. ATN_2 i

ABC) ili smještanjem trokuta u koordinatni sustav. Račun je u tim slučajevima nešto dulji.

1.4. Kružnice se mogu dodirivati ili izvana ili se jedan par kružnica dodiruje izvana i svaka od te dvije kružnice dodiruje treću iznutra. Promatrajmo slučaj kada se kružnice dodiruju izvana.



Sl. 1.14.

Neka se kružnice sa središtima O_1 i O_2 dodiruju *izvana* u točki A. Neka je K bilo koja točka jedne od tih kružnica, a L presjek pravca AK s drugom kružnicom različit od točke A. Promatranjem jednakokračnih trokuta O_1KA i O_2LA vidi se da su kutevi O_1KA i O_2LA jednaki, pa su pravci O_1K i O_2L paralelni.

Neka je M točka treće kružnice (različita od B) koja se nalazi na pravcu LB, a N točka prve koja se nalazi na pravcu MC (i različita je od C). Prema dokazanom je $O_1K||O_2L||O_3M||O_1N$. Zato je KN promjer prve kružnice. Na isti način konstruiramo još jedan promjer. Time dobivamo središte prve kruznice.

Središta druge i treće kružnice se dobivaju analogno ili malo kraćim postupkom (npr. koristeći pravac O_1A na kojem leži središte druge kružnice).

Napomena. Ovaj postupak je u redu za oba slučaja: kad se kružnice diraju izvana i kad dvije kružnice leže unutar treće. Dovoljno je promatrati jedan od ova dva slučaja.

* * *

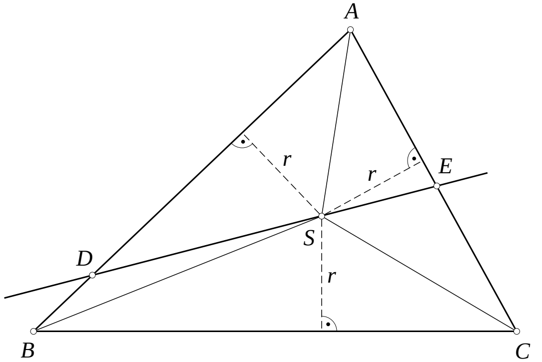
2.1. Neka je p pravac koji prolazi središtem upisane kružnice i siječe stranice (npr. $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$) trokuta u točkama D i E.

Tada je

$$\frac{P(ADE)}{P(BCED)} = \frac{P(ADS)+P(ASE)}{P(BDS)+P(BCS)+P(CES)}$$

$$= \frac{\frac{|AD|\cdot r}{2}+\frac{|AE|\cdot r}{2}}{\frac{|BD|\cdot r}{2}+\frac{|BC|\cdot r}{2}+\frac{|CE|\cdot r}{2}} = \frac{|AD|+|AE|}{|BD|+|BC|+|CE|},$$

gdje je r polumjer upisane kružnice tom trokutu. To znači da su spomenuti omjeri jednaki.



Sl. 1.15.

2.2. Dovoljno je pokazati da je diskriminanta $D > 0$.

(1) Ako je $c < 0$, tada je zbog $a > 0$,

$$D = b^2 - 4ac \geqslant -4ac > 0, \text{ tj. } D > 0.$$

(2) Ako je $c \geqslant 0$, tada zbog $b > a + c > 0$, vrijedi

$$D = b^2 - 4ac > (a + c)^2 - 4ac = (a - c)^2 \geqslant 0, \text{ tj. } D > 0.$$

Dakle, u oba slučaja je $D > 0$, što znači da jednadžba ima dva različita rješenja, čak štoviše, oba su realna.

2.3.

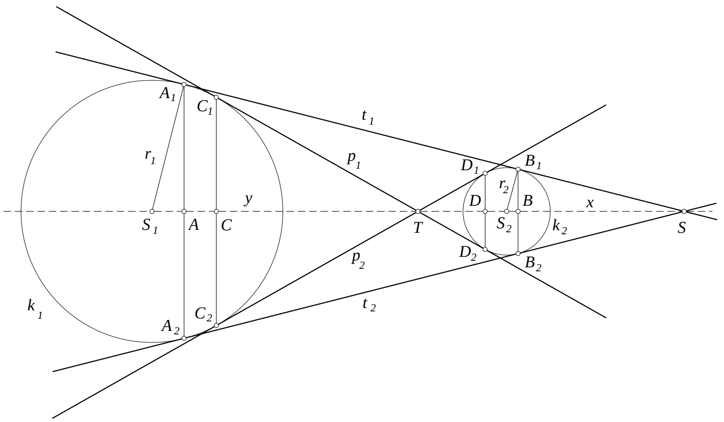
$$\begin{aligned} |1 - a\overline{b}|^2 - |a - b|^2 &= (1 - a\overline{b})(\overline{1 - a\overline{b}}) - (a - b)(\overline{a - b}) \\ &= (1 - a\overline{b})(1 - \overline{a}b) - (a - b)(\overline{a} - \overline{b}) \\ &= 1 - \overline{a}b - a\overline{b} + a\overline{a}b\overline{b} - a\overline{a} + a\overline{b} + \overline{a}b - b\overline{b} \\ &= 1 + |a|^2|b|^2 - (|a|^2 + |b|^2) \\ &= 1 + 2|ab| + |ab|^2 - (|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2) \\ &= (1 + |ab|)^2 - (|a| + |b|)^2 \end{aligned}$$

2.4. Neka je $d = |S_1S_2|$ udaljenost središta kružnica k_1 i k_2. Promatrat ćemo slučaj kada se vanjske tangente sijeku u točki S, pri čemu je $x = |S_2S|$. (Ovdje smo uzeli da za njihove polumjere vrijedi $r_1 > r_2$.)

Trokuti A_1S_1S i B_1S_2S su slični, pa vrijedi:

$$\frac{x}{x + d} = \frac{r_2}{r_1} \text{ i odavde je } x = \frac{dr_2}{r_1 - r_2}.$$

Tada je $|S_1S| = d + x = \frac{dr_1}{r_1 - r_2}$.



Sl. 1.16.

Primjenom Euklidovog teorema na trokute S_1A_1S i S_2B_1S dobiva se:

$$|S_1A| = \frac{r_1^2}{|S_1S|} = \frac{r_1^2 - r_1r_2}{d} \ \text{ i } \ |S_2B| = \frac{r_2^2}{|S_2S|} = \frac{r_1r_2 - r_2^2}{d}.$$

Neka je T sjecište unutarnjih tangenti.

Trokuti S_1C_1T i S_2D_2T su slični, pa za $y = |S_1T|$ vrijedi:

$$\frac{y}{d-y} = \frac{r_1}{r_2} \ \text{ i odavde je } \ |S_1T| = y = \frac{r_1d}{r_1+r_2}, \ \ |S_2T| = \frac{r_2d}{r_1+r_2}.$$

Primjenom Euklidovog teorema na trokute S_1C_1T i S_2D_2T dobiva se:

$$|S_1C| = \frac{r_1^2}{|S_1T|} = \frac{r_1^2 + r_1r_2}{d} \quad \text{i} \quad |S_2D| = \frac{r_2^2}{|S_2T|} = \frac{r_2^2 + r_1r_2}{d}.$$

Promotrimo udaljenosti $|AC|$ i $|BD|$ između pravaca A_1A_2 i C_1C_2 te pravaca B_1B_2 i D_1D_2:

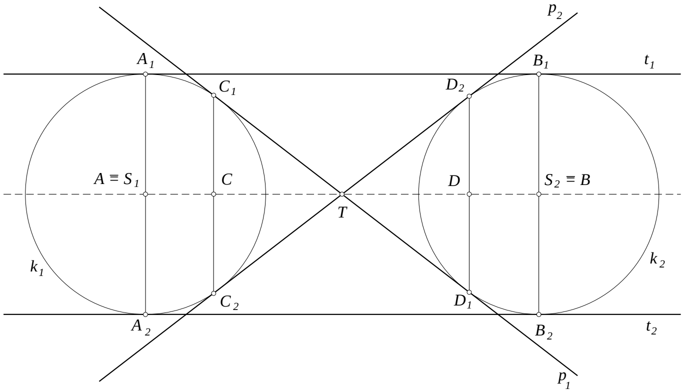
$$|AC| = |S_1C| - |S_1A| = \frac{r_1^2 + r_1r_2}{d} - \frac{r_1^2 - r_1r_2}{d} = \frac{2r_1r_2}{d};$$

$$|BD| = |S_2D| + |S_2B| = \frac{r_2^2 + r_1r_2}{d} + \frac{r_1r_2 - r_2^2}{d} = \frac{2r_1r_2}{d}.$$

Time je pokazana tvrdnja za $r_1 > r_2$, a za $r_2 > r_1$ dokaz se provodi analogno.

Promotrimo još slučaj $r_1 = r_2$.

U ovom slučaju slika je simetrična s obzirom na simetralu dužine $\overline{S_1S_2}$, pa je $|AC| = |BD|$.



Sl. 1.17.

* * *

3.1. Da bi ova dva logaritma bila definirana mora biti $a > 0$, $a \neq 1$ i $x > a$. Uz ove uvjete dana nejednadžba je ekvivalentna redom s:

$$\log_a(x-a) > -\log_a(x+a),$$
$$\log_a\Big((x-a)(x+a)\Big) > 0,$$
$$\log_a(x^2-a^2) > 0.$$

Razlikujemo ova dva slučaja:

$$1^\circ \quad 0 < a < 1 \qquad\qquad 2^\circ \quad a > 1$$

U prvom slučaju je

$$x^2 - a^2 < 1, \quad x^2 < 1 + a^2, \quad x < \sqrt{1+a^2}.$$

U drugom slučaju je

$$x^2 - a^2 > 1, \quad x^2 > 1 + a^2, \quad x > \sqrt{1+a^2}.$$

Dakle, za $0 < a < 1$ rješenje je $x \in (a,1) \cup (1, \sqrt{1+a^2})$, a za $a > 1$ je $x \in (\sqrt{1+a^2}, \infty)$.

3.2.

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(2x+x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x \\ &= 2\sin x\cos^2 x + \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= 3\sin x(1-\sin^2 x) - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x;\end{aligned}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x.$$

Sada je dana jednadžba ekvivalentna s

$$3\sin x - 4\sin^3 x + 1 - 2\sin^2 x + 2 - 2\sin^2 x = 0,$$
$$-4\sin^3 x - 4\sin^2 x + 3\sin x + 3 = 0,$$
$$(1+\sin x)(3-4\sin^2 x) = 0.$$

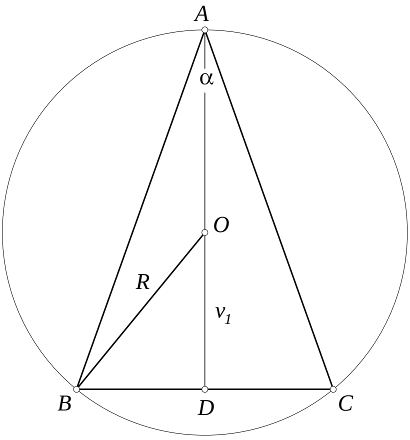
Sada je

$$1^\circ \quad \sin x = -1,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi;$$
$$2^\circ \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2},\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;$$
$$3^\circ \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

U danom segmentu rješenja su redom: $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$, $x_3 = \frac{\pi}{3}$, $x_4 = \frac{2\pi}{3}$, $x_5 = -\frac{\pi}{3}$, $x_6 = \frac{5\pi}{3}$, $x_7 = -\frac{2\pi}{3}$, $x_8 = \frac{4\pi}{3}$.

Tražena suma iznosi 4π.

3.3. Neka su oznake kao na slici, $|BC| = a$, $|AD| = v$. Iz trokuta OBD dobivamo $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, $\cos\alpha = \frac{v_1}{R}$. Odavde slijedi $a = 2R\sin\alpha$, $v = R + v_1 = R(1+\cos\alpha)$.



Sl. 1.18.

Suma duljina osnovice i visine, u ovisnosti o kutu α iznosi $a + v = R(1+\cos\alpha+2\sin\alpha)$.

Odredimo maksimum ovog izraza.

Neka je kut φ takav da je $\operatorname{tg}\varphi = 2$. Tada je

$$1+\cos\alpha+2\sin\alpha = 1+\cos\alpha+\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha$$

$$= 1 + \frac{\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi}{\cos\varphi} = 1 + \frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Ovaj izraz je maksimalan ako je $\cos(\alpha-\varphi)$ maksimalno, tj. ako je $\cos(\alpha-\varphi)=1$, odnosno, $\alpha=\varphi$ i $\operatorname{tg}\alpha=2$. Tada je

$$a+v = R\left(1+\frac{1}{\cos\varphi}\right), \quad \text{tj.} \quad \left(\text{zbog } \frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\right) \quad a+v = R(1+\sqrt{5}).$$

3.4. Uočimo trokut ABC maksimalne površine određen danim točkama. Vrijedi $P_{DEF} \leqslant P_{ABC} \leqslant 1$ za bilo koje točke D, E, F danog skupa.

Neka je a pravac kroz A paralelan s BC, b pravac kroz B paralelan s AC i c pravac kroz C paralelan s AB, te neka je trokut KLM određen tim pravcima. Površina trokuta KLM je 4 puta veća od površine trokuta ABC, te je stoga manja ili jednaka od 4.

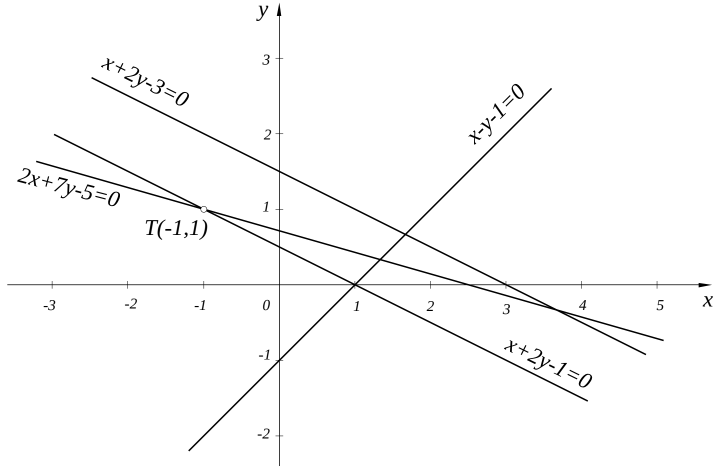
Tvrdimo da se danih 1997 točaka nalazi unutar trokuta KLM.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. neka se neka dana točka T nalazi izvan trokuta KLM. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se ona nalazi sa suprotne strane pravca a u odnosu na točke B i C. Tada je $P_{BCT} > P_{BCA}$ (zajednička baza i različite visine), što je u suprotnosti s pretpostavkom.

Time je tvrdnja zadatka dokazana.

* * *

4.1. Pravac p ima jednadžbu $y-1=k(x+1)$. Presjek pravca p i pravca s jednadžbom $x+2y-1=0$ je točka $T(-1,1)$.



Sl. 1.19.

Nađimo presjek pravca p i pravca s jednadžbom $x+2y-3=0$:

$$x+2kx+2k+2-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1-2k}{1+2k}, \quad y=\frac{1+4k}{1+2k}.$$

Prema tome, koordinate polovišta su

$$P\Big(\frac{-1+\frac{1-2k}{1+2k}}{2},\frac{1+\frac{1+4k}{1+2k}}{2}\Big),\quad \text{tj.}\ \ P\Big(\frac{-2k}{1+2k},\frac{1+3k}{1+2k}\Big).$$

Da bi točka P ležala na pravcu $x-y-1=0$ mora biti

$$\frac{-2k}{1+2k}-\frac{1+3k}{1+2k}-1=0 \quad\Rightarrow\quad k=-\frac{2}{7}.$$

Dakle, jednadžba pravca p je $y=-\frac{2}{7}x+\frac{5}{7}$.

4.2. Za $a=1$ imamo: $x+1=2^{n+1}$, tj. $x=2^{n+1}-1$.

Za $a\neq 1$ je:

$$\begin{aligned}
\frac{a^{x+1}-1}{a-1}&=(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\dots(1+a^{2^n}) \qquad /\cdot(a-1)\\
a^{x+1}-1&=(a^2-1)(a^2+1)(a^4+1)\dots(a^{2^n}+1)\\
&=(a^4-1)(a^4+1)(a^8+1)\dots(a^{2^n}+1)\\
&\ \ \vdots\\
a^{x+1}-1&=a^{2^{n+1}}-1
\end{aligned}$$

Odavde je $x+1=2^{n+1}$, pa je i u ovom slučaju $x=2^{n+1}-1$.

4.3. Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom.

1° Baza indukcije:

$p_1=2\geqslant -2$, $p_2=3\geqslant 1$, $p_3=5\geqslant 4$.

2° Korak indukcije:

Pretpostavimo da je $p_n\geqslant 3n-5$ za neki $n\in\mathbf{N}$, $n\geqslant 3$.

Budući da broj p_n+1 ne može biti prost (jer je paran i veći od 2), mora biti $p_{n+1}\geqslant p_n+2\geqslant 3n-5+2=3(n-1)$.

Pošto je $n\geqslant 3$, to broj $3(n-1)$ ne može biti prost, pa dobivamo da je $p_{n+1}\geqslant 3(n-1)+1=3(n+1)-5$, što je i trebalo dokazati.

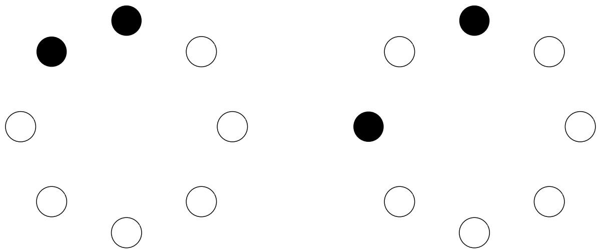
4.4. Ukupan broj načina otvaranja po dviju susjednih ladica je n. Treba odrediti broj povoljnih slučajeva. Razlikovat ćemo ova dva slučaja:

(i) oba predmeta su u susjednim ladicama;

(ii) predmeti nisu u susjednim ladicama.

U prvom slučaju postoje tri para ladica, pri čemu je barem u jednoj dani predmet. U tom slučaju vjerojatnost je jednaka $\frac{3}{n}$.

U drugom slučaju postoje četiri para ladica, tako da je barem u jednoj od njih dani predmet. Sada je vjerojatnost jednaka $\frac{4}{n}$.



(i) (ii)

Sl. 1.20.

Dakle, vjerojatnost nalaženja barem jednog predmeta bit će najmanja ako su traženi predmeti u susjednim ladicama.