1.

Algebra skupova

1.1. Pojam skupa. Operacije sa skupovima.

Bez pojma skupa ne bismo mogli govoriti o Booleovoj algebri. U matematici se obično uzima da je skup jedan od osnovnih pojmova. Budući da u matematici, na određenom nivou, osnovne pojmove ne definiramo, mi ih opisujemo. Evo, za ilustraciju, kako je to učinio poznati francuski matematičar R. Baire: "Zbog jednostavnosti i općenitosti, riječ skup ne može se točno definirati" (*Encyclopédie des sciences mathématiques*).

Skupove, kao množine različitih objekata, općenito označujemo velikim latiničnim slovima A, B, C,.... Elemente koji ulaze u sastav skupa označujemo malim latiničnim slovima a, b, c,....

Ako skup A sadrži element a, onda to pišemo $a \in A$.

Ako b nije element skupa B, onda pišemo $b \notin B$.

U nekim situacijama važan je takav skup koji sadrži sve elemente promatrane u danom trenutku. Taj skup se zove univerzalni skup i obično se označava sa slovom U. Nadalje, uvodi se i prazan skup koji, po definiciji, ne sadrži nijedan element. Označavamo ga sa $\emptyset$.

Skup A je poskup skupa B onda i samo onda ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B. To simbolički pišemo $A \subseteq B$.

Skup A je jednak skupu B onda i samo onda ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. To simbolički pišemo $A = B$.

Primjedba 1.1. Skup A je tzv. pravi podskup skupa B ako $A \subseteq B$ i $A \neq B$ i to pišemo $A \subset B$.

Komplement skupa A s obzirom na skup U je skup koji sadrži sve one elemente skupa U koji ne pripadaju skupu A. To simbolički pišemo

$$cA = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Za dva podskupa A, $B \subseteq U$ definiramo:

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ ili } x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ i } x \in B\}$$
$$A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A,\ x \notin B\}$$

Ovo su osnovne operacije među skupovima (Booleove operacije). Jasno je da vrijedi

$$cA = U \setminus A.$$

Primjedba 1.2. Analogno se definira $\cup$ i $\cap$ za bilo koji konačan broj skupova.

Poseban je pojam skup svih podskupova nekog skupa , i to je tzv. partitivni skup. To simbolički pišemo.

$$P(S) = \{A \mid A \subseteq S\}.$$

Općenitije, ako je $\{A_i\}_{i \in I}$ bilo koja, konačna ili beskonačna familija skupova, onda je

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

skup koji sadrži sve one i samo one elemente koji pripadaju bar jednom od skupova A_i, a

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

je skup koji sadrži sve one i samo one elemente koji pripadaju svakom od skupova A_i.

Neka je F neprazna familija podskupova skupa S, za koju vrijedi:

1) ako su A, $B \in F$, onda su i $A \cup B$, $A \cap B \in F$,

2) ako je $A \in F$, onda je i $cA \in F$.

Familija F sa svojstvima 1) i 2) zove se polje skupova na skupu S.

Najjednostavniji primjeri polja skupova su:

1. $F_1 = \{\emptyset,\ S\}$
2. $F_2 = P(S)$
3. skup svih konačnih podskupova skupa S, zajedno sa skupom svih podskupova od S koji su komplementi konačnih podskupova od S.

Nadalje, pozornost usmjeravamo na svojstva operacija $\cup$, $\cap$, c.

Teorem 1.1. *Neka je F polje skupova na nepraznom skupu S. Onda za proizvoljne A, B, $C \in F$ vrijedi:*

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & A \cup B = B \cup A \\ 1.a) & A \cap B = B \cap A \end{array}\right\} \textit{zakoni komutacije}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2. & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ 2.a) & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array}\right\} \textit{zakoni distribucije}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 3. & A \cup \emptyset = A \\ 3.a) & A \cap S = S \end{array}\right\} \textit{zakoni neutrala}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 4. & A \cup cA = S \\ 4.a) & A \cap cA = \emptyset \end{array}\right\} \textit{zakoni komplementa}$$

$$5. \qquad \emptyset \neq S$$

Dokaz se lako može provesti izravno iz definicije operacija $\cup$, $\cap$, i c, te definicije jednakosti dvaju skupova.

Pokazat ćemo, međutim, jednu rigoroznu metodu dokaza skupovnih jednakosti. Uvodimo najprije posebnu notaciju:

A	B	Značenje		
1	1	$x \in A$	i	$x \in B$
1	0	$x \in A$	i	$x \notin B$
0	1	$x \notin A$	i	$x \in B$
0	0	$x \notin A$	i	$x \notin B$

Za ilustraciju dokazat ćemo svojstvo 2.a) iz teorema 1.1.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Prema tome ispravnost svojstva 2.a) sljedi iz jednakosti 5. i 8. stupca.

U teoremu 1.1. valja uočiti da se svojstva od 1. do 4.a) javljaju u parovima. Za njih kažemo da su dualne formule, a dvije binarne operacije $\cup$ i $\cap$, kao i dva istaknuta elementa $\emptyset$ i S su dualni elementi. U algebri skupova vrijedi, naime, princip dualiteta.

Princip dualiteta. *Ako je neka formula algebre skupova izvediva primjenom zakona iz teorema 1.1., onda je izvediva i dualna formula, koja se iz polazne dobije tako da elemente zamijenimo njihovim dualima.*

Primjedba 1.3. Od dvije dualne formule (tvrdnje) dovoljno je dokazati samo jednu, jer iz ispravnosti jedne, na temelju principa dualiteta, slijedi ispravnost i druge.

Algebra skupova je uređena šestorka $(F(S), \cup, \cap, c, \emptyset, S)$, gdje je:

$F(S)$ — polje skupova na S
$\cup, \cap$ — binarne operacije
c — unarna operacija
$\emptyset$ — prazan skup
S — neprazan skup.

Primjer 1.1. Dokažite da je uređena šestorka $(P(S), \cup, \cap, c, \emptyset, S)$ algebra skupova na S.

$\triangleright$ Najprije dokažimo da je $P(S)$ polje skupova na S.

1) Neka su A, $B \in P(S)$. Onda su A, $B \subseteq S$, pa je $A \cup B \subseteq S$ i $A \cap B \subseteq S$, a to znači da su $A \cup B \in P(S)$ i $A \cap B \in P(S)$.

2) Neka je $A \in P(S)$. Onda je $A \subseteq S$, pa je $cA = S \setminus A \subseteq S$, a to znači da je $cA \in P(S)$.

Prema tome $P(S)$ je polje skupova, a teorem 1.1. vrijedi za bilo koje polje skupova pa vrijedi i za $P(S)$, iz čega izlazi da je $(P(S), \cup, \cap, c, \emptyset, S)$ algebra skupova.

Primjer 1.2. Neka je $A \subseteq \mathbf{N}_n = \{1, 2. \ldots, n\}$. Onda funkciju

$$f_A : \mathbf{N}_n \to \{0, 1\}, \quad f_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \in A \\ 0, & \text{za } x \in cA \end{cases}$$

zovemo karakteristična funkcija podskupa A. Pokazati da vrijedi:

1) $f_\emptyset(x) = 0$
2) $f_{N_n}(x) = 1$
3) $f_{A\cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$
4) $f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x)$
5) $f_A(x) = f_B(x) \implies A = B$
6) $f_{cA}(x) = 1 - f_A(x)$
7) $f_A^2(x) = f_A(x)$
8) $f_{A\setminus B}(x) = f_A(x) \cdot (1 - f_B(x))$

$\triangleright$ 1) Neka je x bilo koji element iz $\mathbf{N}_n$. Onda je $x \in c\emptyset = \mathbf{N}_n$, pa je po definiciji $f_\emptyset(x) = 0$.

2) Neka je $x \in N_n$, pa $x \notin \emptyset = c\mathbf{N}_n$, a odatle izlazi $f_{N_n}(x) = 1$.

3) 1° Neka je $x \in A \cap B$. Odatle, s jedne strane zaključujemo da je $f_{A\cap B}(x) = 1$, a s druge strane $x \in A$ i $x \in B$, pa je $f_A(x) = 1$ i $f_B(x) = 1$, odnosno $f_A(x) \cdot f_B(x) = 1$, što znači da vrijedi $f_{A\cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x) = 1$ za $x \in A \cap B$.

2° Neka $x \notin A \cap B$, pa je s jedne strane $f_{A\cap B}(x) = 0$, a s druge strane je $x \in c(A \cap B) = cA \cup cB$, što znači da je $x \notin A$ ili $x \notin B$, a to možemo pisati ($x \notin A$ i $x \in B$) ili ($x \in A$ i $x \notin B$) ili ($x \notin A$ i $x \notin B$). Odatle izlazi $f_A(x) = 0$ i $f_B(x) = 1$ ili $f_A(x) = 1$ i $f_B(x) = 0$ ili $f_A(x) = 0$ ili $f_B(x) = 0$. U svakom slučaju dalje imamo $f_A(x) \cdot f_B(x) = 0$, pa je $f_{A\cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x) = 0$ za $x \notin A \cap B$. Dakle iz 1° i 2° izlazi 3).

4) Slično dokazu pod 3).

5) Neka je $f_A(x) = f_B(x)$. Dokažimo najprije da je $A \subseteq B$. Neka je x bilo koji element iz A. Onda je $f_A(x) = 1$, pa je zbog pretpostavke iz primjera $f_B(x) = 1$, a to znači da je $x \in B$. Dakle vrijedi $A \subseteq B$. Analogno bi pokazali da je $B \subseteq A$, čime bi i 5) bilo dokazano.

6) $f_{N_n}(x) = f_{cA\cup A}(x) = f_{cA}(x) + f_A(x) - f_{cA}(x) \cdot f_A(x)$

$$1 = f_{cA}(x) + f_A(x) - f_{cA}(x) \cdot f_A(x) \tag{1}$$

S druge strane uzmimo bilo koji $x \in N_n$, pa je $x \in A$ ili $x \in cA$ tj. $x \in A$ ili $x \notin A$, što možemo pisati $(x \in A \text{ i } x \notin cA)$ ili $(x \notin A \text{ i } x \in cA)$, a to dalje daje $(f_A(x) = 1 \text{ i } f_{cA}(x) = 0)$ ili $(f_A(x) = 0 \text{ i } f_{cA}(x) = 1)$. U svakom slučaju je sada $f_A(x) \cdot f_{cA}(x) = 0$, pa iz (1) izlazi $1 = f_{cA}(x) + f_A(x)$, tj. $f_{cA}(x) = 1 - f_A(x)$.

7) 1° Neka je $x \in A$, pa je $f_A^2(x) = 1^2 = 1 = f_A(x)$.

2° Neka $x \notin A$, pa je $f_A^2(x) = 0^2 = 0 = f_A(x)$.

8) Budući da je $A \setminus B = A \cap cB$, to je $f_{A\setminus B}(x) = f_{A\cap cB}(x) = f_A(x) \cdot f_{cB}(x) = f_A(x) \cdot (1 - f_B(x))$.

Označimo sada s $K(\mathbf{N}_n)$ skup svih karakterističnih funkcija podskupova od $\mathbf{N}_n$, i neka su na $K(\mathbf{N}_n)$ definirane dvije binarne operacije $+$ i $\cdot$, te jedna unarna operacija $'$ ovako:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= \max\{f(x), g(x)\}\\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\\ f'(x) &= 1 - f(x)\end{aligned}$$

Onda je uređena šestorka $(K(\mathbf{N}_n), +, \cdot, ', 0, 1)$ algebra karakterističnih funkcija, pri čemu je 0 karakteristična funkcija praznog skupa, a 1 karakteristična funkcija skupa $\mathbf{N}_n$. Za tu uređenu šestorku vrijedi teorem analogan teoremu 1. Naime, dovoljno je uočiti da podskup $A \subseteq \mathbf{N}_n$ možemo zamijeniti funkcijom $f_A \in K(\mathbf{N}_n)$, a operacije $+$, $\cdot$, $'$ sa operacijama $\cup$, $\cap$, c. Preciznije izraženo, algebra karakterističnih funkcija $K(\mathbf{N}_n)$ izomorfna je algebri svih pripadnih podskupova skupa $\mathbf{N}_n$.

$$\begin{aligned}K(\mathbf{N}_n) &\longleftrightarrow (\mathbf{N}_n)\\ + &\longleftrightarrow \cup\\ \cdot &\longleftrightarrow \cap\\ ' &\longleftrightarrow c\\ 0 &\longleftrightarrow \emptyset\\ 1 &\longleftrightarrow \mathbf{N}_n\end{aligned}$$

Primjedba 1.4. Za funkciju $f : A \to B$ kažemo da je izomorfizam, ako je f bijekcija koja čuva operacije.

Zadaci

1.1. U kakvom su odnosu skupovi $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$?

1.2. Zadani su skupovi $A = \emptyset$, $B = \{1\}$, $C = \{1,2\}$, $D = \{1,2,3,4\}$. Popunite tablicu

$\subseteq$	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

tako da na odgovarajuće mjesto upišete 1 ili 0 već prema tome da li je neki skup podskup drugog skupa ili nije.

1.3. Zadani su skupovi $A = \emptyset$, $B = \{1\}$, $C = \{1,2\}$, $D = \{1,2,3,4\}$. Popunite tablice:

$\cup$	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

$\cap$	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

$\setminus$	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

1.4. Ako je $A = \big\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{\{1,2\}\}\big\}$, koja su rješenja ovih skupovnih nejednadžbi:

1) $X \subseteq \{1,2\}$; **2)** $\{1\} \subseteq X$; **3)** $X \subset \{1,2,3\}$?

1.5. Koja relacija postoji između skupova A i B, ako vrijedi:

1) $A \cup B = A \cap B$; **2)** $A \cap B = A$; **3)** $A \cup B = B$?

1.6. Neka su A, B, C bilo koji skupovi. Dokažite da vrijedi:

1) ako je $A \subseteq B$, onda je $A \cap C \subseteq B \cap C$,

2) ako je $A \subseteq B$, onda je $A \cup C \subseteq B \cup C$.

1.7. Neka je $U = \mathbf{N}$, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,5\}$. Riješite ove skupovne jednadžbe:

1) $A \cup X = B$; **2)** $A \cap X = \{1,2\}$; **3)** $A \setminus X = \{1\}$.

1.8. Dokažite da svako polje skupova na S sadrži bar 2 elementa $\emptyset$ i S.

1.9. Dokažite da je $F = \{\emptyset, S\}$ polje skupova na S.

1.10. Za bilo koji skup $A \in F(S)$ vrijedi $A \cup S = S$. Dokažite. Kako glasi dual (dualna formula)? Dokažite ga.

1.11. Za bilo koji skup $A \in F(S)$ vrijedi: $A \cup A = A$ (idempotentnost unije). Dokažite. Kako glasi dual? Dokažite ga.

1.12. Za bilo koji skup $A \in F(S)$ vrijedi: $c(cA) = A$ (zakon involucije). Dokažite.

1.13. Dokažite da je $c\emptyset = S$. Kako glasi dual? Dokažite ga.

1.14. Ako su A, $B \in F(S)$ takvi da vrijedi $A \cup B = S$ i $A \cap B = \emptyset$, onda vrijedi $B = cA$ (ili $A = cB$). Dokažite.

1.15. Neka su A, $B \in F(S)$. Onda vrijedi $A \cup (A \cap B) = A$ (zakon apsorpcije). Dokažite. Kako glasi dual? Dokažite ga.

1.16. Neka su A, $B \in F(S)$. Onda vrijedi $c(A \cup B) = cA \cap cB$ (de Morganov zakon). Dokažite. Kako glasi dual? Dokažite ga.

1.17. Za bilo koje skupove A, B, $C \in F(S)$ vrijedi:

1) $c(cA \cup cB) = A \cap B$; **2)** $A \cup (cA \cap B) = A \cup B$;

3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (zakon asocijacije).

Dokažite. Kako glase duali? Dokažite ih.

1.18. Dokažite da je skup svih konačnih podskupova skupa S zajedno sa skupom svih podskupova od S koji su komplementi konačnih podskupova od S, polje skupova na S.

1.19. Neka su A, B, C bilo koji skupovi iz U. Dokažite:

1) $c(c(A \cup B) \cap (cA \cup cB)) = A \cup B$;

2) $(A \cap B) \cup (A \cap cB) \cup (cA \cap B) = A \cup B$;

3) $(A \cap B \cap C) \cup (cA \cap B \cap C) \cup cB \cup cC = U$.

1.20. Pojednostaviti:

1) $(A \cap B) \cap (B \cap C) \cap (C \cap A)$;

2) $(A \cup B) \cup (B \cup C) \cup (C \cup A)$;

3) $(A \cup cB) \cap (cA \cup cB) \cap (B \cup (A \cap B))$.

1.21. Neka su A, B, C bilo koji skupovi iz U. Dokažite:

1) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;

2) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.

1.22. Neka su A, B, C bilo koji skupovi iz U. Dokažite:

1) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$;

2) $C \setminus (A \setminus B) = (C \setminus A) \cup (C \cap B)$;

3) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

1.23. Riješite sljedeće skupovne jednadžbe:

1) $c(c(cA \cap B) \cap cA) \cap A = X$;

2) $X \cup (A \cap (cA \cap B)) = B$;

3) $X \cap (A \cup (B \cup cA)) = B \cap (A \cap cB)$;

4) $A \cap X = (A \cap B) \cap cB$.

1.24. Riješite ove skupovne jednadžbe:

1) $X = A \setminus (A \setminus B)$; **2)** $c(X \cup A) \cup c(X \cup cA) = B$;

3) $X \cup (A \cap B) = A$; **4)** $(X \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

1.25. Ako iz $S \subset A \cup B$ slijedi $S \subset A$ ili $S \subset B$, onda je ili $A \subset B$ ili $B \subset A$. Dokažite.

1.26. Za skupove $A = [-1, 5\rangle$, $B = [0, 7]$, $C = [-5, 5]$ provjerite jednakost $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$ gdje je $A\Delta B$ simetrična razlika skupova A i B, koja se može definirati ovako: $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1.27. Među danim relacijama odredite one koje su istinite

1) $A\Delta A = \emptyset$; **2)** $(A\Delta A) \subset A$; **3)** $A\Delta A = A$;

4) $A \subset (A\Delta A)$; **5)** $A\Delta\emptyset = \emptyset$.

1.28. Dokažite:

1) $A \setminus B = (A\Delta B) \cap A$; **2)** $A \setminus B = A \cap cB$.

1.29. Što se može reći o skupovima A i B ako je $A\Delta B = \emptyset$?

1.30. Dokažite da za simetričnu razliku skupova, definiranu formulom $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ vrijedi:

1) $A\Delta B = B\Delta A$; **2)** $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$;

3) $A \cap B = (A\Delta B)\Delta(A \cup B)$.

1.31. **1)** Za skup $S = \{0, 1, \{1\}, \{0, 1\}\}$ napišite partitivni skup.
2) Napišite skupove: $P(\emptyset)$, $P(P(\emptyset))$, $P(P(P(\emptyset)))$.

1.32. Za skupove $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 0 < x \leqslant 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} \mid 3 \leqslant x < 5\}$ provjerite da li vrijedi:

1) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$;

2) $P(A \cup B) \supset P(A) \cup P(B)$.

1.33. Dokažite:

1) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$;

2) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$;

3) ako je $A \subseteq B$, onda je $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$.

2.

Uvod u matematičku logiku

2.1. Algebra sudova (izjave)

Pojam suda. Operacije sa sudovima.

Sud (izjava) je svaka rečenica za koju znamo ili možemo utvrditi da li je istinita ili neistinita (istodobno ne može biti oboje. Treća mogućnost je isključena).

Sudove označavamo velikim latiničkim slovima. U vezi sa svakim sudom govorimo o vrijednosti njegove istinitosti. Za sud A sa tA označavamo istinitost toga suda i stavljamo:

$tA = \top$ (ili $tA = 1$) ako je sud A istinit

$tA = \bot$ (ili $tA = 0$) ako je sud A neistinit.

Time je, zapravo, definirana funkcija

$$t : S \to \{\top, \bot\}$$

gdje je S skup svih sudova. Elemente skupa S označavamo malim latiničkim slovima, i zovemo ih varijable algebre sudova.

Primjer 2.1.

A : 7 je prost broj.

B : Španjolska je u Aziji.

$C : \dfrac{5}{0} = 5.$

$tA = \top$, $tB = \bot$.

C nema vrijednost istinitosti, jer nije definirano dijeljenje s nulom, pa prema tome C nije sud.

Dalje, za nas su od interesa operacije sa sudovima , ili načini kako se formiraju složeni sudovi.

Neka su x, y neki sudovi. Osnovne logičke operacije definiraju se ovako:

Negacija suda x je sud: Nije x.

Konjunkcija sudova x, y je sud: x i y.

Disjunkcija (inkluzivna) sudova x, y je sud: x ili y.

Implikacija sudova x, y je sud: Ako x onda y.

Ekvivalencija sudova x, y je sud: x ako i samo ako y.

Za te logičke operacije upotrebljavamo posebne simbole:

$$\neg, \wedge, \vee, \implies, \iff .$$

Onda se gornji sudovi, redom, pišu:

$$\neg x,\ x \wedge y,\ x \vee y,\ x \implies y,\ x \iff y.$$

Istinitost tih sudova, u zavisnosti od istinitosti polaznih sudova, utvrđuje se tzv. tablicom istinitosti (ona se može uzeti za definiciju pojedine operacije!).

x	x
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

$\wedge$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

$\vee$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

$\implies$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

$\iff$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Primjedba 2.1. U implikaciji $x \implies y$, x se zove pretpostavka (antecedenta), a y zaključak (konsekventa).

Primjer 2.2. Neka su dani sudovi:

x: Broj $\sqrt{2}$ je iracionalan.

y: Split je u Švedskoj.

Napišite sudove:

1) $\neg x$; 2) $x \wedge y$; 3) $x \vee y$; 4) $x \implies y$; 5) $x \iff y$

i odredite im vrijednost istinitosti.

▷ 1) $\neg x$: Broj $\sqrt{2}$ je racionalan. $t(\neg x) = \bot$,

2) $x \wedge y$: Broj $\sqrt{2}$ je iracionalan i Split je u Švedskoj. $t(x \wedge y) = \bot$,

3) $x \vee y$: Broj $\sqrt{2}$ je iracionalan ili je Split u Švedskoj. $t(x \vee y) = \top$,

4) $x \implies y$: Ako je $\sqrt{2}$ iracionalan broj onda je Split u Švedskoj. $t(x \implies y) = \bot$,

5) $x \iff y$: $\sqrt{2}$ je iracionalan broj ako i samo ako je Split u Švedskoj. $t(x \iff y) = \bot$.

Formule algebre sudova.

Izrazi (konačni) koji se izgrađuju iz konstanti ($\top$ i $\bot$) i varijabli, pomoću operacija $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\implies$, $\iff$ uz upotrebu zagrada, zovu se formule algebre sudova. Npr. x, $\bot$, $x \wedge \top$, $(x \vee \neg y) \implies y$ su formule algebre sudova. Broj zagrada u formulama može se i smanjiti, ako prihvatimo, po definiciji, da u nizu $\iff$, $\implies$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$ svaki član veže jače od svakog koji mu prethodi. Tako npr. umjesto $x \implies (y \vee z)$ možemo pisati $x \implies y \vee z$, ali u formuli $(x \vee y) \wedge z$ zagrade ne smijemo ispustiti.

Formule A i B su istovrijedne (logički ekvivalentne, semantički jednake) i pišemo $A = B$, ako je za svaku moguću kombinaciju vrijednosti istinitosti njihovih varijabli sudova ispunjeno $tA = tB$. Npr. $x \implies \neg x = \neg x \wedge (x \implies y)$ u što se možemo lako uvjeriti ako sastavimo tablicu istinitosti.

Od posebnog su interesa formule koje su uvijek istinite, bez obzira na vrijednost njihovih varijabli sudova, i zovu se tautologije (identički istinite formule), i formule koje su uvijek neistinite, a zovu se antitautologije (identički neistinite formule, kontradikcije). Npr. $x \vee \neg x$ je tautologija, a $x \wedge \neg x$ je antitautologija.

Primjer 2.3. Ispitajte kakve su formule:

$$A \equiv x \implies (y \implies x)$$
$$B \equiv \neg(x \implies (\neg x \implies y))$$
$$C \equiv (x \implies y) \wedge (y \implies x).$$

▷ Sastavimo tablicu istinitosti

x	y	$\neg x$	$x \implies y$	$y \implies x$	$\neg x \implies y$	$x \implies (\neg x \implies y)$	A	B	C
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$

A je tautologija, B je antitautologija, a C nije ni tautologija ni antitautologija. Kaže se da je C ispunjiva formula (postoji kombinacija vrijednosti istinitosti varijabli od kojih je sastavljena tako da je $tC = \top$) i C je oboriva formula (postoji kombinacija vrijednosti istinitosti varijabli od kojih je sastavljena tako da je $tC = \bot$).

Analogon teoremu 1. pog. I je:

Teorem 2.1. *Za bilo koje sudove x, y, z, $\top$ – istinit sud i $\bot$ – lažan sud, vrijedi:*

1.	$x \vee y = y \vee x$
1.a)	$x \wedge y = y \wedge x$
2.	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
2.a)	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
3.	$x \vee \bot = x$
3.a)	$x \wedge \top = x$
4.	$x \vee \neg x = \top$
4.a)	$x \wedge \neg x = \bot$
5.	$\bot \neq \top$

Dokaz se može lako provesti pomoću tablice istinitosti. U teoremu 2.1. uočavamo da se prvih 8 jednakosti javlja u parovima. Tako npr. 4.a) nastaje iz 4. zamjenom $\vee$ sa $\wedge$, $\top$ sa $\bot$. To nije slučajno. I ovdje vrijedi princip dualiteta.

Princip dualiteta. Ako je neka formula algebre sudova izvediva primjenom jednakosti iz teorema 2.1., onda je izvediva i dualna formula.

Dualna formula se dobiva iz polazne formule tako da se u polaznoj formuli učine sljedeće zamjene: $\vee$ sa $\wedge$, $\wedge$ sa $\vee$, $\top$ sa $\bot$, $\bot$ sa $\top$. Npr. dualna formula formule $F = (x \wedge y) \implies (x \vee \neg y)$ je formula $F^* = (x \vee y) \implies (x \wedge \neg y)$.

Algebra sudova je uređena šestorka (S, $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\bot$, $\top$), gdje je

$S = \{\top, \bot\}$

$\vee$, $\wedge$ — binarne logičke operacije

$\neg$ — unarna logička operacija

$\bot$ — lažan sud

$\top$ — istinit sud

Postoji velika sličnost između algebre skupova i algebre sudova. Treba samo uvidjeti da su moguće ove zamjene:

$$\begin{aligned} \text{skup} &\longleftrightarrow \text{sud} \\ \cup &\longleftrightarrow \vee \\ \cap &\longleftrightarrow \wedge \\ c &\longleftrightarrow \neg \end{aligned}$$

To znači da je algebra sudova izomorfna algebri skupova $(P(S), \cup, \cap, c, \emptyset, S)$, gdje je $S = \{a\}$. Pri tome je

$$\begin{aligned} \bot &\longleftrightarrow \emptyset \\ \top &\longleftrightarrow S \end{aligned}$$

Funkcije algebre sudova. Normalne forme.

Formule algebre sudova možemo smatrati izrazima za neke funkcije, tj. svaka formula algebre sudova na prirodan način definira neku funkciju (zovemo je Booleova funkcija) algebre sudova s vrijednostima iz skupa $\{\top, \bot\}$.

Npr. ako je dana neka formula

$$\neg(x \vee y) \vee (\neg x \wedge (1 + 1 = 2))$$

onda to možemo shvatiti kao funkciju

$$F : (x, y) \longmapsto \neg(x \vee y) \vee (\neg x \wedge \top)$$

gdje je $\top = t(1 + 1 = 2)$, pa možemo pisati

$$F(x, y) = \neg(x \vee y) \vee (\neg x \wedge \top)$$

Naravno, tablicom istinitosti lako je utvrditi da ta funkcija poprima vrijednosti iz skupa $\{\top, \bot\}$.

Tako imamo $F(\top, \bot) = \neg(\top \vee \bot) \vee (\bot \wedge \top) = \bot \vee \bot = \bot$, itd.

Od osobitog je interesa pitanje kako danoj funkciji pridružiti pripadnu formulu.

Primjer 2.4. Neka je dana tablica istinitosti za funkciju $F(x,y,z)$:

x	y	z	F
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

Konstruirajte formulu za tu funkciju.

▷ Sigurno možemo pisati ovako:

$$\begin{aligned}F(x,y,z) &= (\bot \wedge x \wedge y \wedge z) \vee (\top \wedge x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\bot \wedge x \wedge \neg y \wedge z)\\ &\quad \vee (\bot \wedge x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\top \wedge \neg x \wedge y \wedge z) \vee (\bot \wedge \neg x \wedge y \wedge \neg z)\\ &\quad \vee (\top \wedge \neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\bot \wedge \neg x \wedge \neg y \wedge \neg z)\\ F(x,y,z) &= (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z)\end{aligned}$$

Ovaj izraz predstavlja tzv. perfektnu disjunktivnu normalnu formu. Dakle, ova forma ima onoliko komponenata disjunkcije koliko u stupcu za F ima znakova $\top$, pa je na osnovu toga lako odmah napisati konačnu formulu.

Ali, danu funkciju možemo zapisati i ovako:

$$\begin{aligned}F(x,y,z) &= (\bot \vee \neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\top \vee \neg x \vee \neg y \vee z)\\ &\quad \wedge (\bot \vee \neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\bot \vee \neg x \vee y \vee z) \wedge (\top \vee x \vee \neg y \vee \neg z)\\ &\quad \wedge (\bot \vee x \vee \neg y \vee z) \wedge (\top \vee x \vee y \vee \neg z) \wedge (\bot \vee x \vee y \vee z)\\ F(x,y,z) &= (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee z)\\ &\quad \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee z)\end{aligned}$$

Ovo je tzv. perfektna konjunktivna normalna forma (dualna disjunktivnoj formi). Ona ima onoliko komponenata konjunkcije koliko u stupcu za F ima znakova $\bot$, pa je opet jednostavno napisati konačnu formulu.

* * *

Generalizacija. Neka su A_1, A_2, ..., A_n formule dane u obliku konjunkcije

$$x_1^{i_1} \wedge x_2^{i_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{i_n} \tag{1}$$

gdje su x_1, x_2,..., x_n varijable algebre sudova, $i \in \{\top, \bot\}$, $x^i = x$ ako je $i = \top$, $x^i = \neg x$ ako je $i = \bot$.

Onda perfektna disjunktivna normalna forma od n varijabli glasi

$$F(x_1, \ldots, x_n) = A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n.$$

Dualno se definira perfektna konjunktivna normalna forma od n varijabli

$$F(x_1, \ldots, x_n) = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$$

samo su sada formule $A_1, \ldots, A_n$ dane u obliku disjunkcije

$$x_1^{i_1} \vee x_2^{i_2} \vee \ldots \vee x_n^{i_n} \tag{2}$$

pri čemu je $x^i = x$ ako je $i = \perp$, $x^i = \neg x$ ako je $i = \top$.

Primjedba 2.2. U formulama (1) i (2) dolazi varijabla ili njena negacija samo jednom.

Primjedba 2.3. Funkcije algebre sudova od nula varijabli su konstante $\top$ i $\perp$, što možemo pisati:

$$F = \top = x \vee \neg x, \quad G = \perp = x \wedge \neg x.$$

Zadaci

2.1. Među sljedećim rečenicama nađite sudove i odredite im vrijednost istinitosti:

A: Zagreb je najveći grad u Europi.
B: 451 je prost broj.
C: Neparan broj x je bez ostatka djeljiv s 5.
D: Ako vrijedi Talesov teorem, onda je $4^2 = 2^4$.
E: Volite li matematiku?
F: Kolika je suma prvih n prirodnih brojeva?
G: $2x - 3 > 0$.

2.2. Na nekom srednjovjekovnom suđenju optuženom je rečeno:“Moraš dati jednu suvislu izjavu. Ako ona bude istinita (i samo onda) bit ćeš obješen, a ako bude neistinita (i samo onda) odrubit ćemo ti glavu”. Optuženi odgovori:“Odrubit ćete mi glavu”. Da li je ova posljednja rečenica sud? Da li se tom izjavom optuženi može spasiti? Znate li neku drugu izjavu koja bi mogla spasiti optuženoga?

2.3. Odredite vrijednost istinitosti ovih sudova:

1) $(-1)+((-2)+(-3))=((-1)+(-2))+(-3)$;

2) $\frac{3}{4}+\frac{4}{5}=\frac{7}{20}$; **3)** $2\cdot\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$;

4) $(-2)^0=-1$; **5)** $5\%=\frac{5}{100}$;

6) $\sqrt[3]{-8}=-2$; **7)** $|-5|>5$;

8) Skup $\mathbf{Z}$ je podskup skupa $\mathbf{R}$.

9) Postoji trapez koji ima dva prava kuta.

10) Suma vanjskih kutova svakog trokuta iznosi 180°.

2.4. Pomoću sudova iz zadatka 2.1. i simbola logičkih operacija zapišite sljedeće sudove:
1) Zagreb je najveći grad u Europi i 451 je prost broj.
2) Ako vrijedi Talesov teorem, onda je $4^2=2^4$ ili Zagreb nije najveći grad u Europi.
3) 451 je prost broj onda i samo onda ako je Zagreb najveći grad u Europi.

Odredite vrijednosti istinitosti tih sudova.

2.5. Dani su sudovi:

$A\colon\ 5>6,\qquad B\colon\ 3\mid 6,\qquad C\colon\ V(3,4)=24.$

Pročitajte ove sudove:

1) $A\wedge\neg B$; **2)** $\neg B\vee\neg A$;

3) $C\implies(A\wedge B)$; **4)** $(A\iff C)\vee B$.

2.6. Dani su sudovi:

A: 2 je paran broj.

B: Italija je mediteranska zemlja.

C: π je racionalan broj.

Napišite riječima ove formule:

1) $A\vee B$; **2)** $A\vee\neg B$; **3)** $B\implies A$;

4) $(\neg A\implies C)\wedge A$; **5)** $(\neg A\wedge B)\iff(A\vee\neg B)$.

Odredite vrijednost istinitosti tih sudova.

2.7. Nađite vrijednost istinitosti suda

$$((3<2\iff\neg(2<2))\vee 2>3)\wedge 3<3.$$