1.

Općinsko natjecanje

Ciklus susreta i natjecanja mladih matematičara, učenika osnovnih i srednjih škola Republike Hrvatske i u 1998. godini sastojao se od školskih natjecanja, gradskih i općinskih natjecanja, županijskih natjecanja, regionalnih natjecanja, Državnog natjecanja i Međunarodne matematičke olimpijade. Započeo je školskim natjecanjima koja su se održala tijekom siječnja i veljače, a u njima je sudjelovao velik broj učenika svih razreda. Najbolji učenici pozvani su na općinska i gradska natjecanja koja su 6. ožujka održana u svih 20 županija i Gradu Zagrebu po jedinstvenim kriterijima Državnog povjerenstva za matematička natjecanja, koje je pripremilo i zadatke.

Osnovna škola

4. razred

4.1. Izračunaj:

a) $123 \cdot 475 + 475 \cdot 321 + 56 \cdot 475\,;$

b) $891 : 9 - 423 : 9\,.$

4.2. U sljedećim računima zamijeni zvjezdice sa znamenkama tako da računi budu ispravni:

a)
$$\begin{array}{rcccccc} & 5 & 6 & 1 & 5 & * & 2 \\ & 6 & 0 & 9 & 2 & 7 & 4 \\ & 3 & * & 5 & 6 & 9 & * \\ + & 2 & 5 & * & 9 & 0 & 4 \\ \hline * & * & 6 & 6 & * & 5 & 6 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rccccccc} & & * & 5 & * & \cdot & * & 2 \\ \hline & & * & 0 & 8 & & & \\ + & * & 6 & * & & & & \\ \hline & 8 & 1 & * & 8 & & & \end{array}$$

4.3. Ako od zbroja najvećeg četveroznamenkastog broja s različitim znamenkama i najmanjeg peteroznamenkastog broja s različitim znamenkama oduzmeš nepoznati broj dobit ćeš 20 000. Koji je to broj?

4.4. Zadan je jednakokračan trokut ABC s osnovicom $\overline{AB}$ kojemu je duljina osnovice a dva puta manja od duljine kraka b.

a) Izračunaj duljinu stranice a ako je opseg tog trokuta 150 mm.

b) Nacrtaj trokut ABC s tim duljinama stranica.

c) Izračunaj duljinu stranice jednakostraničnog trokuta čiji je opseg jednak opsegu zadanog trokuta.

4.5. Zbroj četiri pribrojnika je 100. Zbroj prvog, trećeg i četvrtog je 65, a zbroj prvog, drugog i trećeg je 78. Znajući da je prvi pribrojnik za 10 manji od drugog, odredi sva četiri pribrojnika.

5. razred

5.1. Izračunaj:

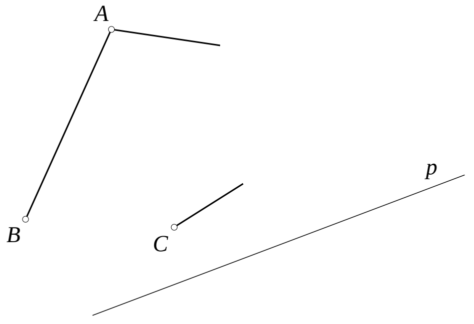
$$64 + 2 \cdot [11147 - 27 \cdot (45 + 3105 : 9)] - 125 + 25 \cdot (48 - 45 : 3).$$

5.2. Napiši sve četveroznamenkaste višekratnike broja 18 kojima je na mjestu desetica znamenka 4 i čije su sve znamenke različite.

5.3. Zbroj dvaju prirodnih brojeva je 1998. Ispustimo li znamenku jedinica većeg broja, dobit ćemo manji broj. Koji su to brojevi?

5.4. U ribnjacima Hrvatske u 1991. godini uzgojeno je 5659 tona šarana, u 1992. godini 1198 tona više nego u 1991., a u 1994. godini 79 tona više nego u 1993. godini. Ako je u te četiri godine uzgojeno ukupno 21 889 tona šarana, koliko je tona šarana uzgojeno u 1994. godini?

5.5. Marko je u bilježnicu nacrtao četverokut $ABCD$ i njegovu osnosimetričnu sliku $A'B'C'D'$ obzirom na pravac p. Ali, ostavio je bilježnicu otvorenu, pa je njegov mlađi brat Ivica gumicom obrisao dio crteža tako da je ostao samo pravac p i dio četverokuta $ABCD$ (vidi sliku). Pomozi Marku da popravi i dopuni ono što je Ivica obrisao!



Sl. 1.1.

6. razred

6.1. Riješi jednadžbu:

$$\frac{1}{x} + 1\frac{1}{1998} : \frac{1999}{1997} = 1.$$

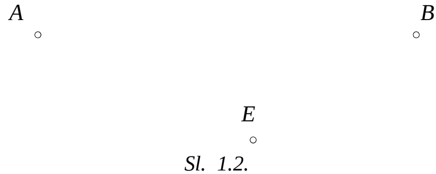
6.2. Odredi najveći i najmanji sedmeroznamenkasti broj $\overline{3219abc}$ koji je djeljiv sa 90.

6.3. U nekoj školi postoje tri odjela šestog razreda: 6.a, 6.b i 6.c. U odjelu 6.a razreda ima 0.36 ukupnog broja učenika u sva tri odjela. U odjelu 6.b razreda ima $\frac{5}{9}$ broja učenika odjela 6.a razreda, a u odjelu 6.c razreda su preostali učenici.

Koliko učenika ima u svakom odjelu, ako u odjelu 6.a razreda ima 6 učenika manje nego u odjelu 6.c razreda?

6.4. Dan je jednakokračni pravokutni trokut ABC s pravim kutom u vrhu C. Nad katetom $\overline{BC}$ nacrtan je jednakostranični trokut BCD. Izračunaj veličinu kuta $\sphericalangle ADB$.

6.5.



Sl. 1.2.

Dane su tri točke A, B, E kao na slici, pri čemu su točke A i B vrhovi pravokutnika $ABCD$, a E je točka dijagonale. Konstruiraj pravokutnik $ABCD$.

7. razred

7.1. Riješi jednadžbu:

$$\frac{1}{5}(2+x)+\frac{3(4+x)}{7}=\frac{7}{5}(8-x)-\frac{3(5x-1)}{14}.$$

7.2. Pri obradi neke drvene grede oblika kvadra, duljina se smanjila za 2.5%, širina za 7%, a visina za 3.2%. Koliko je posto bilo otpada?

7.3. Ura svaki dan kasni točno 6 minuta. Koliko je točno vrijeme danas, u trenutku kad je ura pokazala 17 sati i 52 minute, ako je jučer u 10 sati ura pokazala točno vrijeme?

7.4. Ako bi se vanjski kut kod vrha A trokuta ABC povećao za 35°, a vanjski kut kod vrha B smanjio za 20°, tada bi se unutarnji kut kod vrha C povećao za svoju četvrtinu. Koliki je unutarnji kut kod vrha C?

7.5. Dan je pravokutnik $ABCD$, pri čemu je $|AB| = 2|BC|$. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka M tako da je $\measuredangle AMD = \measuredangle CMD$. Koliki je $\measuredangle CMD$?

8. razred

8.1. Izračunaj

$$\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}+\frac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{8}}-\frac{3}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}.$$

8.2. Pravac $p \ldots 3x-4y-1=0$ siječe pravac $a \ldots y=\frac{5}{3}x-3$ u točki A, a pravac $b \ldots 5x+4y-55=0$ u točki B. Izračunaj udaljenost između točaka A i B.

8.3. Odredi sve parove prostih brojeva čija je razlika kvadrata 120.

8.4. Duljina veće osnovice jednakokračnog trapeza je 44 cm, duljina kraka je 17 cm, a duljina dijagonale je 39 cm. Kolika je površina tog trapeza?

8.5. Dan je trokut ABC, pri čemu je $\measuredangle BAC$ šiljast. Na produžetku stranice $\overline{AB}$ preko vrha A odabrana je točka D tako da je $|AD| = |AC|$. Neka je točka E nožište okomice iz vrha B na pravac koji prolazi točkom D i usporedan je s pravcem AC, točka B_1 nožište visine iz vrha B na stranicu $\overline{AC}$ i točka C_1 nožište visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$.

Dokaži da je $|BE| = |BB_1| + |CC_1|$.

Srednja škola

1. razred

1.1. U trokutu ABC je $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Dokažite da je duljina t_a, težišnice iz vrha A, jednaka

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

1.2. Odredite broj $\overline{abcd}$ s ovim svojstvom:

$$\begin{aligned} \overline{cda} - \overline{abc} &= 297 \\ a + b + c &= 23. \end{aligned}$$

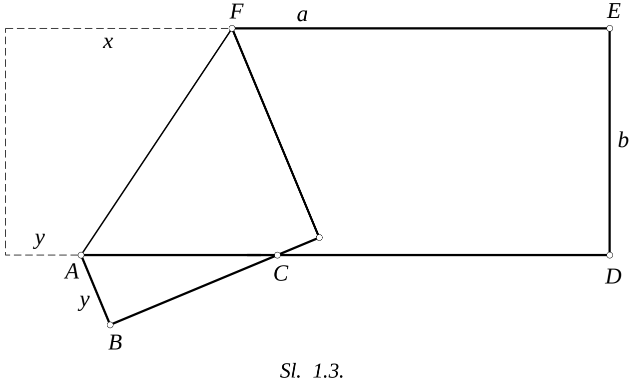
($\overline{abcd}$ je zapis broja u dekadskom sustavu.)

1.3. Ako je $x + y + z = 6$, $x, y, z \geqslant 0$, dokažite da je onda $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 12$.

1.4. U konveksnom mnogokutu s $1\,998$ stranica, njihove duljine su prirodni brojevi. Opseg mnogokuta je $1\,997\,000$. Dokažite da barem dvije stranice tog mnogokuta imaju jednake duljine.

2. razred

2.1. List papira stranica duljina a i b presavijen je kao na slici



Sl. 1.3.

Izračunajte površinu trokuta ABC, ako je $a = 8$, $b = 3$, $x = 3$ i $y = 1$.

2.2. Neka su z_1, z_2 i z_3 kompleksni brojevi za koje je
(i) $z_1z_2z_3 = 1$,
(ii) $z_1 + z_2 + z_3 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$.
Dokažite da je barem jedan od njih jednak 1.

2.3. Riješite jednadžbu:

$$x = 1 - 1998(1 - 1998x^2)^2, \quad x \in \mathbf{C}.$$

2.4. Zadana je funkcija $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + (a+1)x + 1$, $a \in \mathbf{R}$.

a) Odredite a tako da bude $\left|\frac{f(x)}{x^2 + x + 1}\right| < 3$, za svaki $x \in \mathbf{R}$.

b) Odredite uvjete uz koje je graf funkcije $y = |f(x)|$ parabola.

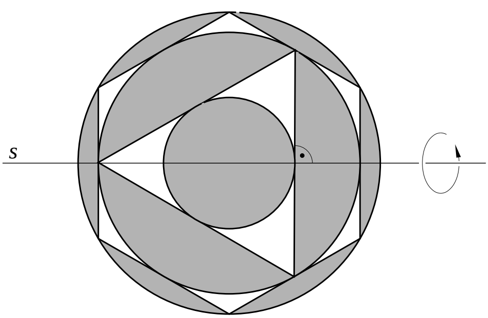
c) Nađite geometrijsko mjesto tjemena svih parabola $y = |f(x)|$. Nacrtajte sliku!

3. razred

3.1. Riješite jednadžbu:

$$\log_{x+8}(5 - \sqrt{1 + 2x + x^2}) = \frac{1}{2}.$$

3.2. Nađite volumen rotacionog tijela nastalog rotacijom osjenčanog lika (vidi sliku!) oko osi s, ako je polumjer najvećeg kruga jednak a.



Sl. 1.4.

3.3. Duljine osnovica trapeza su a i b ($a > b$), a visina h. Njegove dijagonale su međusobno okomite, a kut između krakova je α. Dokažite da vrijedi

$$\frac{1}{h} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) \operatorname{ctg} \alpha.$$

3.4. Riješite jednadžbu:

$$\frac{a\sin x+b}{b\cos x+a}=\frac{a\cos x+b}{b\sin x+a}, \qquad (a,b\in\mathbf{R}^+).$$

4. razred

4.1. Polovištem tetive parabole $y^2=\frac{8}{3}x$, koja leži na pravcu $4x-3y-12=0$, povučena je paralela s x-osi. Sjecištem te paralele i parabole povučena je na nju tangenta. Pokažite da je ona paralelna sa zadanom tetivom.

4.2. Dokažite da je za svaki cijeli broj $n\geqslant 0$, broj

$$7^{2n+1}+2\cdot 13^{2n+1}+17^{2n+1},$$

djeljiv s 50.

4.3. Koliko ima strogo rastućih aritmetičkih nizova čiji su svi članovi pozitivni cijeli brojevi, a zbroj prvih 37 jednak je 1998?

4.4. U trostranoj piramidi duljina točno jednog brida je veća od 1. Pokažite da njezin volumen nije veći od $\frac{1}{8}$.

Rješenja

Osnovna škola

4.1. a) $475\cdot(123+321+56)=475\cdot 500=237500$ ili $58425+152475+26600=237500$. b) $(891-423):9=468:9=52$ ili $99-47=52$.

4.2. a)

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & 5 & 6 & 1 & 5 & \boxed{8} & 2\\
 & 6 & 0 & 9 & 2 & 7 & 4\\
 & 3 & \boxed{3} & 5 & 6 & 9 & \boxed{6}\\
+ & 2 & 5 & \boxed{9} & 9 & 0 & 4\\
\hline
\boxed{1} & \boxed{7} & 6 & 6 & \boxed{4} & 5 & 6
\end{array}$$

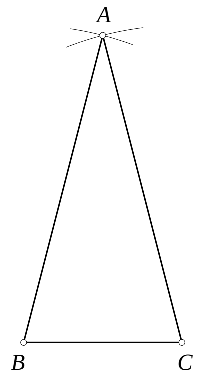
b)

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & \boxed{2} & 5 & \boxed{4} & \cdot & \boxed{3}\ 2\\
\hline
 & \boxed{5} & 0 & 8 & & \\
+\ \boxed{7} & 6 & \boxed{2} & & & \\
\hline
8 & 1 & \boxed{2} & 8 & &
\end{array}$$

4.3. Najveći četveroznamenkasti broj s različitim znamenkama je 9876. Najmanji peteroznamenksati broj s različitim znamenkama je 10234. Njihov zbroj je 20110. Traženi broj je $20110-20000=110$.

4.4. a) Veza između duljine kraka i duljine osnovice je $b=2a$. Sada je $O=a+b+b$, $150=a+2a+2a$, $150=5a$, $a=150:5$, $a=30$ mm.

b) Ako je $a=30$ mm, tada je $b=60$ mm.



Sl. 1.5.

c) $O = 3a$, $150 = 3a$, $a = 150 : 3$, $a = 50$ mm. Duljina stranice jednakostraničnog trokuta je 50 mm.

4.5. Kako je zbroj sva četiri pribrojnika 100, a prvog, trećeg i četvrtog 65, to znači da je drugi pribrojnik jednak 35. Kako je zbroj sva četiri pribrojnika 100, a prvog, drugog i trećeg 78, to znači da je četvrti pribrojnik jednak 22. Kako je prvi za 10 manji od drugog koji je jednak 35, to znači da je prvi jednak 25.

Zbroj prvog, drugog i četvrtog je $25 + 35 + 22 = 82$, pa je dakle, treći pribrojnik jednak 18.

* * *

5.1. $64 + 2 \cdot [11147 - 27 \cdot (45 + 345)] - 125 + 25 \cdot (48 - 15) = 64+2\cdot[11147-27\cdot 390]-125+25\cdot 33 = 64+2\cdot[11147-10530]-125+825 = 64 + 2 \cdot 617 - 125 + 825 = 64 + 1234 - 125 + 825 = 1998$.

5.2. Zapišimo traženi broj u obliku $ab4c$, gdje su a, b, c međusobno različite znamenke i različite od 4. Višekratnik broja 18 ujedno je višekratnik i brojeva 2 i 9. Zbog djeljivosti s 2 mora biti $c = 0, 2, 6, 8$.

Ako je $c = 0$, broj ima oblik $ab40$. Taj je broj djeljiv s 9 ako je $a + b + 4$ djeljivo s 9, tj. $a + b$ je ili 5 ili 14. Za $c = 0$ traženi višekratnici su 2340, 3240, 6840, 8640, 5940, 9540.

Ako je $c = 2$, broj ima oblik $ab42$. Taj je broj djeljiv s 9 ako je $a + b + 6$ djeljivo s 9, tj. $a + b$ je ili 3 ili 12. Za $c = 2$ traženi višekratnici su 3042, 3942, 5742, 7542, 9342.

Ako je $c = 6$, broj ima oblik $ab46$. Taj je broj djeljiv s 9 ako je $a + b + 10$ djeljivo s 9, tj. $a + b$ je ili 8 ili 17. Za $c = 6$ traženi višekratnici su 1746, 7146, 3546, 5346, 8946, 9846, 8046.

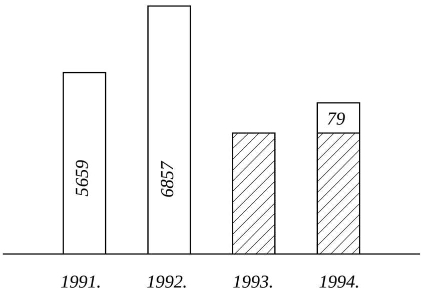
Ako je $c = 8$, broj ima oblik $ab48$ i djeljiv je s 9 ako je $a + b + 12$ djeljivo s 9, tj. $a + b$ je ili 6 ili 15. Za $c = 8$ traženi višekratnici su 1548, 5148, 6048, 6948, 9648.

5.3. Označimo s m manji broj. Veći dobivamo tako da manjem dopišemo zdesna znamenku J, tj. $\overline{mJ}$ je veći broj. Dakle, veći broj je $10m + J$. Zbroj manjeg i većeg je $m + (10m + J) = 11m + J$ i vrijedi $11m + J = 1998$.

Znači, $1998 - J$ je višekratnik broja 11. Višekratnici broja 11 manji od 1998 su $1991, 1980, \ldots$, a J bi za te brojeve bio 7, $18, \ldots$. Kako J mora biti znamenka, slijedi da je $J = 7$, $11m = 1991$, tj. $m = 181$.

Traženi brojevi su 181 i 1817.

5.4. U 1992. godini uzgojeno je $5659 + 1198 = 6857$ tona šarana. Prikažimo pomoću stupaca uzgoj u tim godinama.



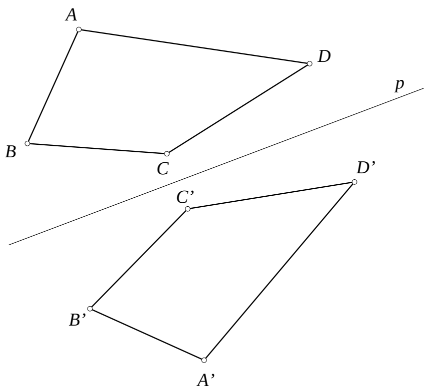
Sl. 1.6.

Sve zajedno je uzgojeno 21889 tona, dakle, $21889 - 5659 - 6857 - 79 = 9294$ je dvostruka količina šarana uzgojenih 1993. godine.

Sada slijedi da je u 1993. godini uzgojeno $9294 : 2 = 4647$ tona šarana.

U 1994. je uzgojeno $4647 + 79 = 4726$ tona šarana.

5.5. Prvo dovršimo četverokut $ABCD$. Spojimo točke B i C. Produljimo polupravac s vrhom A. Produljimo polupravac s vrhom C. Presjek tih polupravaca je točka D. Sada svaki vrh preslikamo osnom simetrijom i spojimo dobivene točke i označimo ih.



Sl. 1.7.

* * *

6.1. Zadanu jednadžbu možemo pisati redom: $\frac{1}{x}+1\frac{1}{1998}:\frac{1999}{1997}=1$, $\frac{1}{x}+\frac{1999}{1998}:\frac{1999}{1997}=1$, $\frac{1}{x}+\frac{1999}{1998}\cdot\frac{1997}{1999}=1$, $\frac{1}{x}+\frac{1997}{1998}=1$, $\frac{1}{x}=1-\frac{1997}{1998}$, $\frac{1}{x}=\frac{1}{1998}$, $x=1998$.

6.2. Kako traženi broj mora biti djeljiv s 10, nužno slijedi da je $c=0$. Zbog djeljivosti s 9 vrijedi da je $3+2+1+9+a+b+0=15+a+b$ djeljivo s 9. Zato razlikujemo dva slučaja:

1° Za $a+b=3$ dobivamo $a=0$, $b=3$; $a=1$, $b=2$; $a=2$, $b=1$; $a=3$, $b=0$. Najveći broj je 3 219 300, a najmanji je 3 219 030.

2° Za $a+b=12$ dobivamo $a=3$, $b=9$; $a=4$, $b=8$; $a=5$, $b=7$; ...; $a=9$, $b=3$. Sada je najveći broj 3 219 930, a najmanji 3 219 390.

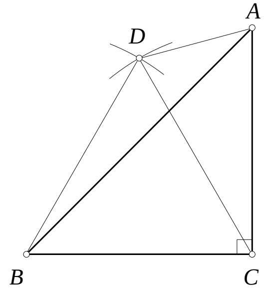
Konačno rješenje: Najveći broj je 3 219 930, a najmanji je broj 3 219 030.

6.3. U odjelu 6.a razreda ima $0.36=\frac{9}{25}$ svih učenika, u odjelu 6.b razreda ima $\frac{5}{9}\cdot\frac{9}{25}$, tj. $\frac{1}{5}$ svih učenika, a u odjelu 6.c razreda ima $1-\left(\frac{9}{25}+\frac{1}{5}\right)$, tj. $\frac{11}{25}$ svih učenika. Neka je x ukupan broj učenika u sva tri odjela. Kako je $\frac{11}{25}-\frac{9}{25}=\frac{2}{25}$, slijedi da je $\frac{2}{25}x=6$. Rješenje ove jednadžbe je $x=75$.

Prema tome, u odjelu 6.a razreda ima $\frac{9}{25}\cdot 75$, tj. 27 učenika, u odjelu 6.b razreda ima $\frac{1}{5}\cdot 75$, tj. 15 učenika, dok u odjelu 6.c razreda ima $\frac{11}{25}\cdot 75$, tj. 33 učenika.

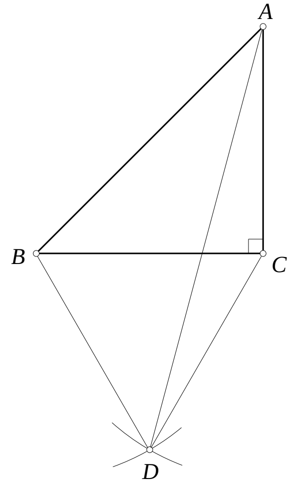
6.4. Razlikujemo dva slučaja:

1° Očito je $\sphericalangle ACD=90^\circ-60^\circ=30^\circ$. Kako je $|CD|=|CA|$, slijedi da je trokut CAD jednakokračan, pa je $\sphericalangle CAD=\sphericalangle CDA=75^\circ$, a zbog $\sphericalangle CDB=60^\circ$ zaključujemo da je $\sphericalangle ADB=\sphericalangle CDA+\sphericalangle CDB$ ili $\sphericalangle ADB=75^\circ+60^\circ$, tj. $\sphericalangle ADB=135^\circ$.



Sl. 1.8.

2° Očito je $\measuredangle ACD = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$. Kako je $|CA| = |CD|$, slijedi da je trokut CAD jednakokračan, pa je $\measuredangle CAD = \measuredangle CDA = 15^\circ$, a zbog $\measuredangle CDB = 60^\circ$ zaključujemo da je $\measuredangle ADB = \measuredangle CDB - \measuredangle CDA$ ili $\measuredangle ADB = 60^\circ - 15^\circ$, tj. $\measuredangle ADB = 45^\circ$.

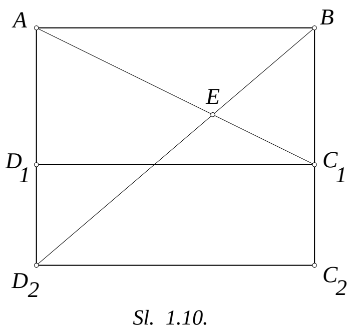


Sl. 1.9.

6.5. U vrhu A i vrhu B konstruiramo kut od 90° . Zadatak ima dva rješenja, ovisno o tome da li točka E leži na dijagonali $\overline{AC}$ ili na dijagonali $\overline{BD}$.

1° Točka E leži na dijagonali $\overline{AC}$. Presjek pravca AE i drugog kraka pravog kuta u vrhu B je vrh C . Sada u vrhu C na stranici $\overline{BC}$ konstruiramo kut od 90° . Presjek jednog kraka tog kuta s jednim krakom pravog kuta u vrhu A je točka D .

2° Točka E leži na dijagonali $\overline{BD}$. Presjek pravca BE s drugim krakom pravog kuta u vrhu A je točka D . Konstrukcijom pravog kuta u vrhu D lako odredimo vrh C .



Sl. 1.10.

* * *

7.1. Zadanu jednadžbu možemo transformirati redom:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5}(2+x)+\frac{3(4+x)}{7} &= \frac{7}{5}(8-x)-\frac{3(5x-1)}{14},\\
\frac{2}{5}+\frac{1}{5}x+\frac{12+3x}{7} &= \frac{56}{5}-\frac{7}{5}x-\frac{15x-3}{14} \quad / \cdot 70\\
28+14x+10(12+3x) &= 784-98x-5(15x-3)\\
28+14x+120+30x &= 784-98x-75x+15\\
148+44x &= 799-173x\\
44x+173x &= 799-148\\
217x &= 651 \quad / \cdot \frac{1}{217}\\
x &= \frac{651}{217}\\
x &= 3.
\end{aligned}$$

7.2. Neka je a duljina, b širina i c visina drvene grede prije obrade i neka je a_1 duljina, b_1 širina i c_1 visina drvene grede poslije obrade. Očito je $V = abc$ volumen drvene grede prije obrade, te $V_1 = a_1 b_1 c_1$ volumen grede nakon obrade.

Nakon obrade drvene grede duljina je jednaka 97.5% početne duljine, širina 93% početne širine i visina 96.8% početne visine, a to znači da je $a_1 = 0.975a$, $b_1 = 0.93b$ i $c_1 = 0.968c$.

Zato vrijedi redom: $V_1 = 0.975a \cdot 0.93b \cdot 0.968c$, $V_1 = 0.877734 \cdot abc$ ili $V_1 = 0.877734V$. Sada je jasno da se obradom drvene grede volumen smanjio za $1 - 0.877734$, tj. za 0.122266 početnog volumena. Obradom drvene grede nastalo je 12.2266% otpada.

7.3. Ako ura dnevno kasni 6 minuta, to znači da za 1 sat ura kasni $\frac{6}{24}$, tj. $\frac{1}{4}$ minute, a za 4 sata $\frac{1}{4} \cdot 4$, tj. 1 minutu. Zato će ura danas u 10 sati kasniti 6 minuta, u $10 + 4$, tj. u 14 sati ura će kasniti $6 + 1$, tj. 7 minuta, te u $14 + 4$, tj. u 18 sati će kasniti $7 + 1$, tj. 8 minuta.

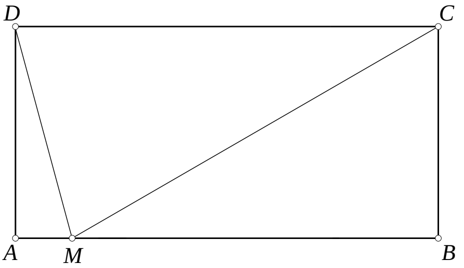
Kako je $60 - 52 = 8$, zaključujemo da je točno vrijeme bilo 18 sati.

7.4. Neka je α unutarnji kut kod vrha A, β unutarnji kut kod vrha B i γ unutarnji kut kod vrha C. Ako bi se vanjski kut kod vrha A povećao za 35°, tada bi se unutarnji kut kod vrha A smanjio za 35°, pa bi tada bio $\alpha - 35^\circ$.

Ako bi se vanjski kut kod vrha B smanjio za 20°, tada bi se unutarnji kut kod vrha B povećao za 20°, pa bi tada bio $\beta + 20^\circ$. Naravno da bi nakon toga unutarnji kut kod vrha C bio $\gamma + \frac{1}{4}\gamma$.

Kako je zbroj unutarnjih kutova u svakom trokutu jednak 180°, vrijedi jednakost $\alpha - 35^\circ + \beta + 20^\circ + \gamma + \frac{1}{4}\gamma = 180^\circ$, odnosno $\alpha + \beta + \gamma - 15^\circ + \frac{1}{4}\gamma = 180^\circ$ ili $180^\circ - 15^\circ + \frac{1}{4}\gamma = 180^\circ$, tj. $\frac{1}{4}\gamma = 15^\circ$, pa je $\gamma = 60^\circ$.

7.5.



Sl. 1.11.

Kut $\sphericalangle AMD = \sphericalangle CDM$, jer su to kutovi uz presječnicu, a zbog $\sphericalangle AMD = \sphericalangle CMD$ slijedi da je $\sphericalangle CDM = \sphericalangle CMD$, a to znači da je trokut CMD jednakokračan, pa je $|CM| = |CD|$.

Zbog $|AB| = |CD|$ slijedi da je $|CD| = 2|BC|$, odnosno $|CM| = 2|BC|$, a to znači da je pravokutni trokut CBM polovica jednakostraničnog trokuta, iz čega zaključujemo da je $\sphericalangle CMB = 30^\circ$.

Sada lako odredimo traženi kut. Naime, iz $\sphericalangle AMD + \sphericalangle CMD + \sphericalangle CMB = 180^\circ$ dobivamo $\sphericalangle CMD + \sphericalangle CMD + 30^\circ = 180^\circ$ ili $2 \cdot \sphericalangle CMD = 150^\circ$, tj. $\sphericalangle CMD = 75^\circ$.

* * *

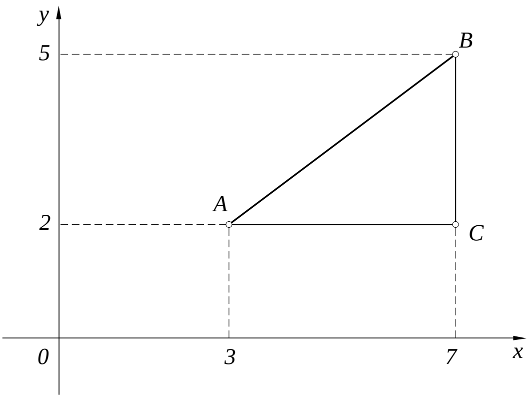
8.1. Nakon racionalizacije nazivnika svakog od tri zadana razlomka dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{8}} - \frac{3}{\sqrt{10}-\sqrt{7}} \\
&\qquad = \sqrt{8}+\sqrt{7}+\sqrt{10}-\sqrt{8}-(\sqrt{10}+\sqrt{7}) \\
&\qquad = \sqrt{8}+\sqrt{7}+\sqrt{10}-\sqrt{8}-\sqrt{10}-\sqrt{7} = 0.
\end{aligned}$$

8.2. Rješenje sustava jednadžbi $3x - 4y - 1 = 0$, $y = \frac{5}{3}x - 3$ je $x = 3$, $y = 2$, a to su koordinate točke $A(3,2)$.

Rješenje sustava jednadžbi $3x - 4y - 1 = 0$, $5x + 4y - 55 = 0$ je $x = 7$, $y = 5$, a to su koordinate točke $B(7,5)$.

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut ACB, pri čemu je $|AC| = 7 - 3 = 4$, $|BC| = 5 - 2 = 3$, lako odredimo duljinu $|AB|$. Naime, $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$ ili $|AB|^2 = 4^2 + 3^2$, tj. $|AB| = 5$.



Sl. 1.12.

8.3. Neka je (x, y) traženi par prostih brojeva, pri čemu je $x > y$. Tada vrijedi $x^2 - y^2 = 120$, odnosno $(x + y)(x - y) = 120$. Očito je $x + y + x - y = 2x$ paran broj, a to znači da oba faktora moraju biti iste parnosti, a kako je umnožak dva neparna broja neparan broj, zaključujemo da oba faktora moraju biti parna.

Zato razlikujemo četiri moguća slučaja:

$$\begin{cases} x + y = 60, \\ x - y = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 30, \\ x - y = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ x - y = 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 12, \\ x - y = 10. \end{cases}$$

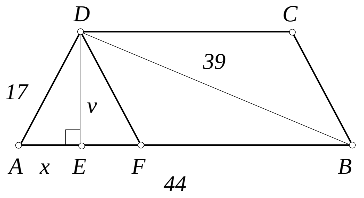
Rješenja prva tri od ovih sustava ujedno su i traženi parovi (x, y) prostih brojeva, tj. $(31, 29)$, $(17, 13)$, $(13, 7)$.

Primijetimo da sustav

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

ne zadovoljava postavljene uvjete jer $y = 1$ nije prost broj.

8.4. Neka je $|DE| = v$ duljina visine trapeza $ABCD$, te $|AE| = x$. Tada je $|BE| = 44 - x$. Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut AED, odnosno na trokut BED, dobivamo $v^2 = 17^2 - x^2$ i $v^2 = 39^2 - (44 - x)^2$. Zbog jednakosti lijevih strana u obje jednakosti, i desne strane su nužno jednake. Zato je $39^2 - (44 - x)^2 = 17^2 - x^2$. Rješenje ove jednadžbe je $x = 8$ cm.

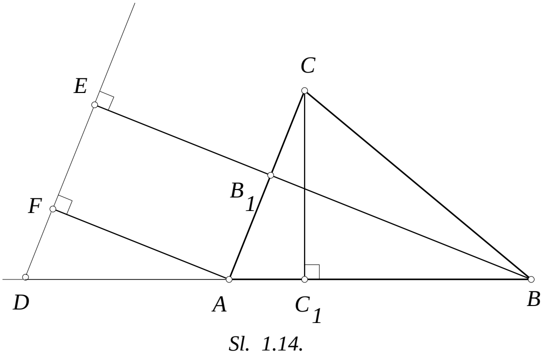


Sl. 1.13.

Sada iz jednadžbe $v^2 = 17^2 - x^2$ lako odredimo $v = 15$ cm. Kako je trokut AFD jednakokračan, slijedi da je $x = \frac{a-c}{2}$, pa je $8 = \frac{44-c}{2}$, tj. $c = 28$ cm.

Konačno možemo odrediti površinu trapeza. Naime, $P = \frac{(a+c)\cdot v}{2}$, $P = \frac{(44+28)\cdot 15}{2}$, $P = 540\,\text{cm}^2$.

8.5. Neka je točka F nožište okomice iz vrha A na pravac DE. Treba pokazati da je $\triangle AFD \cong \triangle AC_1C$. Naime, trokuti su pravokutni, $|AD| = |AC|$ i $\sphericalangle FDA = \sphericalangle CAC_1$, jer su to kutovi uz presječnicu, iz čega slijedi da je $|AF| = |CC_1|$.



Sl. 1.14.

Lako se pokaže da je četverokut AB_1EF pravokutnik. Naime, $AC \parallel EF$, a zbog $\sphericalangle AFD = \sphericalangle B_1EF = 90^\circ$ slijedi da je i $AF \parallel B_1E$, a to znači da je $|AF| = |B_1E|$.

Kako je $|BE| = |BB_1| + |B_1E|$, a zbog $|B_1E| = |AF| = |CC_1|$, dobivamo da je $|BE| = |BB_1| + |CC_1|$, a to je i trebalo dokazati.

Srednja škola

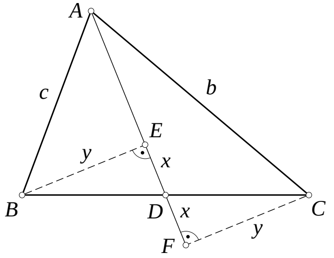
1.1. *Prvo rješenje.* Neka je D polovište stranice $\overline{BC}$, točke E i F nožišta okomica iz točaka B i C na težišnicu t_a. Trokuti BED i CFD su sukladni. Označimo $|DE| = |DF| = x$ i $|CF| = |BE| = y$. Iz pravokutnih trokuta ABE i AFC je

$$(t_a - x)^2 + y^2 = c^2,$$
$$(t_a + x)^2 + y^2 = b^2.$$

Zbrajanjem se dobiva $2t_a^2+2x^2+2y^2=b^2+c^2$. Iz pravokutnog trokuta DFC je $x^2+y^2=\frac{a^2}{4}$, pa je

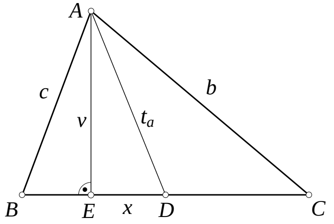
$$2t_a^2+2\cdot\frac{a^4}{4}=b^2+c^2,$$

odakle slijedi tražena jednakost.



Sl. 1.15.

Drugo rješenje. Neka je $\overline{AD}$ težišnica t_a, $\overline{AE}$ visina v_a, $|ED|=x$.



Sl. 1.16.

$$\begin{aligned}
\triangle AED \quad &\Rightarrow \quad t_a^2=v^2+x^2\\
\triangle AEB \quad &\Rightarrow \quad v^2=c^2-\left(\tfrac{a}{2}-x\right)^2\\
\triangle AEC \quad &\Rightarrow \quad v^2=b^2-\left(\tfrac{a}{2}+x\right)^2.
\end{aligned}$$

Iz dviju zadnjih jednakosti dobivamo

$$x=\frac{b^2-c^2}{2a}.$$

Uvrštavanjem u prvu jednakost slijedi

$$t_a^2=c^2-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2+x^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2),$$

a to je jednakost koju je trebalo dokazati.

1.2.

$$\begin{aligned} \overline{cda} - \overline{abc} &= 297, \\ 100c + 10d + a - 100a - 10b - c &= 297, \\ 99(c - a - 3) &= 10(b - d). \end{aligned}$$

Iz $11 \mid b - d$ slijedi da je $b = d$. Zato je $c - a - 3 = 0$. Odavde i iz dane jednakosti $a + b + c = 23$ je $c = a + 3$, $b = 23 - a - a - 3 = 2(10 - a)$. Kako je b parna znamenka, dovoljno je provjeriti sve mogućnosti $b \in \{2, 4, 6, 8, 0\}$.

Za $b = 2$ je $a = 9$, $c = 12$, što nije moguće;

Za $b = 4$ je $a = 8$, $c = 11$, što nije moguće;

Za $b = 6$ je $a = 7$, $c = 10$, što nije moguće;

Za $b = 8$ je $a = 6$, $c = 9$, što je rješenje;

Za $b = 0$ je $a = 10$, $c = 13$, što nije moguće.

Dakle, rješenje je $\overline{abcd} = 6898$.

1.3. Za svaka tri realna broja x, y, z vrijedi nejednakost

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geqslant 0.$$

Kvadriranjem i sređivanjem dobivamo $2(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 2(xy + yz + zx)$.

Dodamo li lijevoj i desnoj strani nejednakosti $x^2 + y^2 + z^2$, imamo $3(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant (x + y + z)^2 = 36$, odakle slijedi tvrdnja $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 12$.

Tražena nejednakost je posljedica nejednakosti između kvadratne i aritmetičke sredine: $K \geqslant A$, što u našem slučaju znači

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \geqslant \frac{x + y + z}{3},$$

za sve realne brojeve x, y i z, pa onda i za nenegativne.

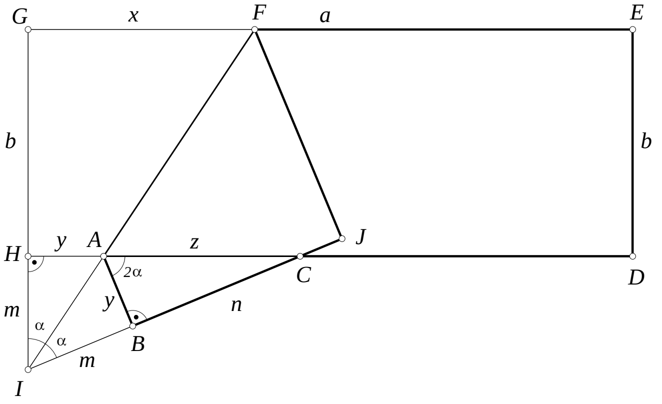
1.4. Promatrani 1998-terokut sa stranicama različitih cjelobrojnih duljina ima najmanji opseg ako su mu duljine stranica 1, 2, 3, ..., 1998. Taj najmanji opseg je

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 1998 = \frac{1998 \cdot 1999}{2} = 1\,997\,001.$$

Kako je opseg promatranog mnogokuta jednak $1\,997\,000$, onda (po Dirichletovom principu) barem dvije stranice moraju imati jednake duljine.

* * *

2.1. Označimo točke G, H, I, J kao na slici. Neka je $\sphericalangle AIH = \sphericalangle AIB = \alpha$, $|HI| = m$, $|BC| = n$, $|AC| = z$.



Sl. 1.17.

Iz sličnosti $\triangle IFG$ i $\triangle AIH$ je

$$\frac{x}{y} = \frac{b+m}{m} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{by}{x-y}.$$

Iz sličnosti $\triangle ABC$ i $\triangle IHC$ ($\sphericalangle HIC = \sphericalangle CAB = 2\alpha$) je

$$\frac{y}{z} = \frac{m}{m+n} \quad \Rightarrow \quad y\left(1 + \frac{n}{m}\right) = z = \sqrt{y^2 + n^2}$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{2my^2}{m^2 - y^2}.$$

Sada je

$$n = 2y^2 \cdot \frac{\frac{by}{x-y}}{\left(\frac{by}{x-y}\right)^2 - y^2} = \frac{2by(x-y)}{b^2 - (x-y)^2}.$$

Tražena površina je

$$P = P(ABC) = \frac{ny}{2} = \frac{by^2(x-y)}{b^2 - (x-y)^2}.$$

U specijalnom slučaju je $P = \frac{6}{5}$.

2.2. *Prvo rješenje.* Uvrštavanjem $z_1 = \frac{1}{z_2 z_3}$ u (ii) dobiva se

$$z_2 + z_3 + \frac{1}{z_2 z_3} = \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + z_2 z_3.$$

Množenjem sa z_2z_3, ovaj uvjet prelazi u

$$z_2^2z_3 + z_2z_3^2 + 1 - z_3 - z_2 - z_2^2z_3^2 = 0,$$

$$z_2(z_2z_3 - 1) + z_3(z_2z_3 - 1) + (1 + z_2z_3)(1 - z_2z_3) = 0,$$

tj. $(z_2z_3 - 1)(1 - z_2)(1 - z_3) = 0$. Odavde je $z_2 = 1$ ili $z_3 = 1$ ili $z_2z_3 = 1$. U trećem slučaju je $z_1 = 1$.

Drugo rješenje. (Pomoću Vièteovih formula.) Neka je $a = z_1 + z_2 + z_3$, $b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$, $c = z_1z_2z_3$. Tada su z_1, z_2, z_3 korijeni kubne jednadžbe $z^3 - az^2 + bz - c = 0$.

Uvjeti (i) i (ii) glase $c = 1$ i $a = b$. Tada se kubna jednadžba reducira na $z^3 - az^2 + az - 1 = 0$. Očito je jedno njezino rješenje $z = 1$.

2.3. Neka je $1 - 1998x^2 = t$. Tada se jednadžba svodi na sustav jednadžbi

$$x = 1 - 1998t^2 \qquad\qquad 1 - x = 1998t^2$$

odnosno

$$1 - 1998x^2 = t \qquad\qquad 1 - t = 1998x^2$$

Oduzimanjem ovih jednakosti imamo $t - x = 1998(t - x)(t + x)$, tj.

$$(t - x)(1 - 1998(t + x)) = 0.$$

Imamo dva slučaja:

1° $t = x$, pa je $1 - 1998x^2 = x$ i $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{7993}}{3996}$;

2° $1998(t+x) = 1$, pa je $t = \frac{1}{1998} - x$, odnosno $1 - 1998x^2 = \frac{1}{1998} - x$.

Rješenja jednadžbe $1998^2x^2 - 1998x - 1997 = 0$ su

$$x_{3,4} = \frac{1998 \pm 1998\sqrt{7989}}{2 \cdot 1998^2} = \frac{1 \pm \sqrt{7989}}{3996}.$$

2.4. a) Rješavamo nejednadžbu

$$-3 < \frac{x^2 + (a + 1)x + 1}{x^2 + x + 1} < 3.$$

Množenjem sa $x^2 + x + 1$ (> 0 za svaki $x \in \mathbf{R}$), dobiva se

$$-3x^2 - 3x - 3 < x^2 + (a + 1)x + 1 < 3x^2 + 3x + 3.$$

Promatramo posebno lijevu i desnu nejednakost:

1° $4x^2 + (4 + a)x + 4 > 0$ 2° $2x^2 + (2 - a)x + 2 > 0$

pa mora biti

$D = a^2 + 8a - 48 < 0$ $D = a^2 - 4a - 12 < 0$

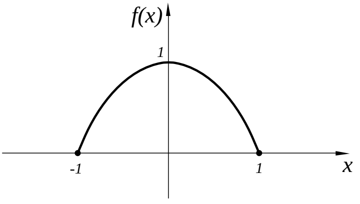
$(a + 12)(a - 4) < 0$ $(a - 6)(a + 2) < 0$

$a \in (-12, 4)$ $a \in (-2, 6)$

Dakle, rješenje je $a \in (-2, 4)$.

b) Da bi graf funkcije $y = |f(x)|$ bio parabola mora biti $D < 0$, odnosno $(a + 1)^2 - 4 \leqslant< 0$, tj. $|a + 1| \leqslant 2$, $-3 \leqslant a \leqslant 1$.

c) Koordinate tjemena parabole $y = x^2 + (a+1)x + 1$ su $x_T = -\frac{a+1}{2}$, $y_T = \frac{4-(a+1)^2}{4}$. Vidimo da vrijedi $y_T = 1 - x_T^2$. Zbog $a \in [-3, 1]$ slijedi $x_T \in [-1, 1]$, pa je traženo mjesto točaka dio parabole $y = 1 - x^2$ za $x \in [-1, 1]$.



Sl. 1.18.

* * *

3.1. Da bi logaritamska funkcija bila definirana, mora biti: $x + 8 > 0$ i $x + 8 \neq 1$, tj. $x > -8$ i $x \neq -7$; $5 - \sqrt{1 + 2x + x^2} = 5 - |x+1| > 0 \quad \Rightarrow$ $x \in (-6, 4)$.

(1) Za $x \in (-6, -1)$ je $\log_{x+8}(5 + x + 1) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 6 + x = \sqrt{x+8} \quad \Rightarrow \quad x^2 + 11x + 28 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -4$ (drugo rješenje $x = -7$ ne zadovoljava gornji uvjet).

(2) Za $x \in [-1, 4)$ je $\log_{x+8}(5 - x - 1) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 4 - x = \sqrt{x+8} \quad \Rightarrow$ $x^2 - 9x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ (drugo rješenje $x = 8$ ne zadovoljava gornji uvjet).

3.2. Neka je V_1 volumen kugle polumjera $r_1 = a$; V_2 – volumen krnjeg stošca polumjera donje baze $R_2 = a$, polumjera gornje baze $r_2 = \frac{a}{2}$, visine $v_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; V_3 – volumen kugle polumjera $r_3 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; V_4 – volumen stošca polumjera baze $r_4 = \frac{3a}{4}$, visine $v_4 = \frac{3\sqrt{3}a}{4}$; V_5 – volumen kugle polumjera $r_5 = \frac{\sqrt{3}a}{4}$.

Tada je volumen danog tijela

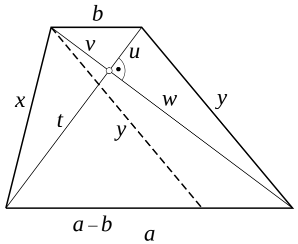
$$\begin{aligned} V &= V_1 - 2V_2 + V_3 - V_4 + V_5 \\ &= \frac{4a^3\pi}{3} - \frac{7\sqrt{3}a^3\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}a^3\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}a^3\pi}{64} + \frac{\sqrt{3}a^3\pi}{16} \\ &= \Big(\frac{4}{3} - \frac{31\sqrt{3}}{192}\Big)a^3\pi. \end{aligned}$$

3.3. Prema oznakama na slici je

$$(a-b)^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{x^2 + y^2 - (a-b)^2}{2xy}.$$

P je površina trokuta sa stranicama x, y i $a - b$,

$$P = \frac{(a-b)h}{2} = \frac{xy}{2}\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{(a-b)h}{xy}.$$



Sl. 1.19.

Sada je

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{x^2+y^2-(a-b)^2}{2(a-b)h}\\ &= \frac{v^2+t^2+u^2+w^2-(a-b)^2}{2(a-b)h}\\ &= \frac{a^2+b^2-a^2+2ab-b^2}{2(a-b)h},\\ &= \frac{ab}{(a-b)h},\end{aligned}$$

odakle se množenjem s $\frac{a-b}{ab} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ dobiva traženi identitet.

3.4. Uz uvjete $b\cos x + a \neq 0$ i $b\sin x + a \neq 0$, nakon sređivanja dobiva se

$$(\sin x - \cos x)(a^2 + b^2 + ab(\sin x + \cos x)) = 0.$$

Ako je $\sin x - \cos x = 0$, onda je $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$. Kako je

$$a^2 + b^2 + ab(\sin x + \cos x) > a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geqslant 0,$$

jedina rješenja su gore navedena.

Zadnji dio rješenja može se izvesti promatranjem jednadžbe

$$a^2 + b^2 + ab(\sin x + \cos x) = 0, \quad \text{tj.} \quad \sin x + \cos x = -\frac{a^2+b^2}{ab}.$$

Na ovo možemo primijeniti adicione formule,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{ab},$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\sqrt{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2ab} \leqslant -\sqrt{2}\cdot\frac{2ab}{2ab} = -\sqrt{2},$$

što ne može biti ispunjeno jer je $\sin x \in [-1, 1]$.