1. Aritmetika

1.1. Zadaci iz aritmetike

1.1. (4–5) Dječak ima isto toliko sestara koliko i braće, a njegova sestra dvostruko manje sestara nego braće. Koliko u toj obitelji ima braće i sestara?

1.2. (4–5) Na dvije je hrpe ukupno 30 bilježnica. Kad bi se iz prve hrpe premjestile na drugu 2 bilježnice, tada bi na prvoj hrpi bilo dvostruko više bilježnica nego na drugoj. Koliko je bilježnica bilo na svakoj hrpi?

1.3. (4–6) Tanji je nedostajalo 7 kuna, a Luciji 2 kune kako bi mogle kupiti po kutiju bojica. Kada su skupile svoj novac, nedostajalo im je čak za kupovinu jedne kutije. Koliko stoji kutija bojica?

1.4. (4–6) U kutiji se nalaze olovke: 7 crvenih i 5 modrih. Olovke se drže u mračnoj sobi. Koliko treba uzeti olovaka da bi među njima bilo bar dvije crvene i tri modre?

1.5. (4–6) U mračnom ormaru leže čizme jednake veličine: 10 pari crnih i 10 pari smeđih. Nađi najmanji broj čizama koje je potrebno uzeti iz ormara da bi se među njima našao jedan par (lijeva i desna čizma) iste boje (pretpostavlja se da se u mraku ne mogu razlikovati ne samo boje čizama, već ni lijeva od desne).

1.6. (4–6) Kako od komada materijala od $\frac{2}{3}$ metra odrezati pola metra, ako pri ruci nemamo metar?

1.7. (4–6) Seljak je dovezao na tržnicu krastavce. Kada ih je počeo prebrajati po deset, nedostajala su dva krastavca do punog broja desetica. Kada ih je počeo prebrajati u tucetima, ostalo je osam krastavaca. Koliko je krastavaca dovezao seljak ako ih je bilo više od 300, ali manje od 400?

1.8. (4–5) Matija je zamislio broj. Dodao je tom broju 5, zatim je dobiveni zbroj podijelio s 3, pomnožio s 4, odbio 6, podijelio sa 7 i dobio 2. Koji je broj zamislio Matija?

1.9. (4–6) Majka je odložila na stol šljive i rekla svojim trima sinovima da ih po povratku iz škole podjednako razdijele. Prvi je došao Mišo, uzeo je trećinu šljiva i otišao. Drugi se vratio Petar, uzeo trećinu šljiva koje su ostale na stolu i otišao. Zatim je došao Ivica i također uzeo trećinu preostalih šljiva. Koliko je šljiva ostavila majka, ako je Ivica uzeo 4 šljive?

1.10. (4–6) Seljanka je donijela na tržnicu lubenice za prodaju. Prvom kupcu prodala je polovicu svih svojih lubenica i još pola lubenice, drugomu polovicu ostatka i još pola lubenice, i tako redom. Posljednjem, šestom kupcu, ona je također prodala polovicu preostalih lubenica i još pola lubenice i pritom se pokazalo da je prodala sve lubenice. Koliko je seljanka donijela lubenica za prodaju?

1.11. (4–5) Neki se broj smanji za 7, zatim se smanji deset puta i dobije se broj koji je za 34 manji od početnog. Nađi početni broj.

1.12. (4–5) Nađi takav broj koji je pomnožen s 52, a zatim mu je umnožak umanjen pet puta i tako daje broj koji je za 1974 veći od traženog.

1.13. (4–5) Broj odsutnih učenika predstavlja $\frac{1}{6}$ broja nazočnih. Nakon što je iz razreda izašao jedan učenik, broj odsutnih jednak je $\frac{1}{5}$ broja nazočnih učenika. Koliko je učenika bilo u razredu?

1.14. (4–6) Četiri su prijatelja zajedno kupila brodić. Prvi je donio polovicu iznosa koji su uplatili ostali; drugi je donio trećinu iznosa koju su uplatili ostali; treći četvrtinu iznosa koju su uplatili ostali, a četvrti je donio 130 kuna. Koliko stoji brodić i koliko je novaca donio svaki prijatelj?

1.15. (4–6) Nađi dva najmanja prirodna broja takva da je njihov zbroj trostruko veći od njihove razlike i dvostruko manji od njihova umnoška.

1.16. (4–6) Zbroj dvaju brojeva jednak je 180, rezultat dijeljenja većeg broja manjim iznosi 5. Nađi te brojeve.

1.17. (5–7) Nađi rezultat djeljenja dvaju brojeva ako je on dva puta manji od jednog od njih i šest puta veći od drugog broja.

1.18. (4–7) U nekom mjesecu tri su nedjelje parnog datuma. Koji je dan u tjednu bio dvadesetig dana tog mjeseca?

1.19. (5–6) Ura pokazuje jedan sat. U kojem će se trenutku satna i minutna kazaljka preklopiti prvi put?

1.20. (5–7) Nađi prvi trenutak poslije 12 sati pri kojem će satna i minutna kazaljka stajati okomito.

1.21. (5–7) Koliko se puta unutar 24 sata satna i minutna kazaljka a) sastaju, b) čine ispruženi kut, c) čine pravi kut?

1.22. (4–6) U bačvi je najmanje 10 litara benzina. Kako iz nje izliti 6 litara pomoću vedra od 9 litara i petolitrene kantice?

1.23. (4–6) Iz osmolitarskog vedra punog mlijeka treba odliti 4 litre samo pomoću trolitrene i petolitrene kantice.

1.24. (4–6) Dvanaestlitarski lonac napunjen je kerozinom. Razdijeli ga na dva jednaka dijela koristeći se samo petolitarskim i osmolitarskim loncem.

1.25. (4–6) U loncu se nalazi najmanje 13 litara benzina. Kako iz njega odliti 8 litara pomoću devetlitarskog i petolitarskog lonca?

1.26. (4–6) Ocu je toliko godina koliko sinu i kćeri zajedno, sin je dvostruko stariji od sestre i 20 godina mlađi od oca. Koliko je godina svakomu?

1.27. (4–5) Sada je Marku 11 godina, a Bosiljki 1 godina. Koliko će godina biti Marku i Bosiljki kada Marko bude trostruko stariji od Bosiljke?

1.28. (4–6) Otac je četiri puta stariji od sina. Za 20 godina bit će stariji od sina dva puta. Koliko je sada godina ocu?

1.29. (5–7) Otac je četverostruko stariji od sina, a zbroj je njihovih godina 50. Za koliko će godina otac biti trostruko stariji od sina?

1.30. (5–7) Nas dvojica zajedno imamo 63 godine. Sad ja imam dvostruko toliko godina koliko si ti imao onda kad sam ja imao toliko godina koliko ti imaš sad. Koliko je sada godina meni, a koliko tebi?

1.31. (5–7) Sestri je trostruko toliko godina koliko je bilo bratu tada kada je sestra imala toliko godina koliko brat sada. Kada bratu bude toliko godina koliko sada ima sestra, njih će oboje zajedno imati 28 godina. Koliko je sada godina sestri i bratu?

1.32. (5–7) Kada je Luka bio mlad kao Marko, puno je godina bilo teti Ani — godinu dana manje nego što Luka i Marko sada imaju zajedno. Koliko je godina bilo Luki kada je teta Ana bila njegovog uzrasta?

1.33. (5–6) Na zadnjoj stanici u tramvaj su ušli putnici i polovica ih je zauzala mjesta za sjedenje. Koliko ih je na zadnjoj stanici ušlo u tramvaj ako se nakon prve stanice broj putnika uvećao za 8%, a poznato je da tramvaj može primiti najviše 70 ljudi?

1.34. (5–6) Morska voda sadrži 5% soli (po težini). Koliko je kilograma čiste vode potrebno dodati u 40 kilograma morske da bi sadržaj soli u smjesi iznosio 2%?

1.35. (5–6) Tržna cijena krumpira povećala se za 20%. Kroz neko vrijeme cijena krumpira na tržnici pala je za 20%. Kada je krumpir bio jeftiniji: prije povišenja ili nakon sniženja cjene i za koliko postotaka?

1.36. (5–7) Dvoje učenika — visoki i niski — išli su istovremeno iz jedne iste kuće u istu školu. Niži je od njih imao korak 20% kraći nego drugi, ali on je zato uspijevao za to isto vrijeme napraviti 20% više koraka nego drugi. Koji je od njih prije došao u školu?

1.37. (5–6) Vlažnost svježe pokošene trave je 60%, a sijena 15%. Koliko se sijena dobiva iz jedne tone svježe pokošene trave?

1.38. (5–7) Cijena ulaznice na stadion iznosi 20 kuna. Poslije sniženja cijena ulaznica broj gledalaca povećao se za 25%, a zarada je narasla za 12.5%. Koliko stoji ulaznica poslije sniženja?

1.39. (5–7) Automobil je iz A u B vozio srednjom brzinom od 50 km/ h, a nazad se vraćao brzinom od 30 km/ h. Kolika je njegova srednja brzina?

1.40. (6–7) Dva kamiona istovremeno su vozila iz A u B. Prvi je polovicu vremena potrebnog za prevaljivanje cijelog puta vozio brzinom od 50 km/ h, a ostali dio vremena vozio je brzinom od 40 km/ h. Drugi je kamion prvu polovicu puta vozio brzinom od 40 km/ h, a drugu polovicu brzinom od 50 km na sat. Koji je od tih kamiona ranije došao u B?

1.41. (5–7) Vlak prelazi most duljine 450 m za 45 sekundi, a 15 sekundi prolazi mimo telefonskog stupa. Izračunaj duljinu i brzinu vlaka.

1.42. (5–6) Parobrod plovi od Siska do Slavonskog Broda 5 sati, a obratno 7 sati. Koliko vremena plovi splav od Siska do Slavonskog Broda?

1.43. (5–7) Motociklist je prešao $\frac{5}{7}$ puta i još 40 km i još mu je ostalo 0.75 puta bez 118 km. Kako je dug njegov put?

1.44. (6–7) Plivač pliva protiv toka rijeke. Ispod mosta A on je izgubio praznu čuturicu. Preplivavši još 20 minuta protiv toka on je primjetio svoj gubitak, vratio se po čuturicu i dostigao ju je ispod mosta B. Koja je brzina toka rijeke ako su mostovi A i B udaljeni točno 2 km?

1.45. (5–7) Inženjer je svakodnevno dolazio na stanicu u jedno te isto vrijeme i tada je za njim dolazio tramvaj kojim se on vozio na radno mjesto. Jednom je inženjer došao na stanicu 55 minuta ranije nego obično, odmah je pošao ususret tramvaju i došao je na posao 10 minuta ranije nego obično. Koliko je puta brzina inženjera manja od brzine tramvaja?

1.46.* **(7–9)** Na dionici tramvajske pruge duljine 1 km pješak je, prešavši taj dio za 12 minuta, svakodnevno prebrojavao tramvaje koji su ga pretjecali i koji su mu dolazili ususret. Tijekom godine prvih je nabrojio 225, a drugih 600. Odredi brzinu tramvaja.

1.47.* **(6–8)** Turist se uputio na izlet iz mjesta A u mjesto B i obratno i prešao je cijeli put za 3 sata i 41 minutu. Put iz A u B ide na početku uzbrdo, zatim po ravnome terenu i zatim nizbrdo. Na kolikoj duljini put prolazi po ravnom terenu ako je brzina turista pri usponu 4 km/ h, na ravnome 5 km/ h i nizbrdo 6 km/ h, a udaljenost AB iznosi 9 km?

1.48. **(4–6)** a) Zapiši pomoću četiri znamenke 2, znakova računskih operacija i, ako je potrebno, zagrada, brojeve 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10.

(6–7) b) Može li se tako zapisati broj 7?

1.49. **(6–7)** Napiši broj 100: a) pomoću šest jednakih znamenki, b) pomoću devet različitih znamenki različitog značenja.

1.50. **(6–7)** Napiši broj 9 pomoću deset različitih znamenki.

1.51. **(4–5)** Zbroj znamenki dvoznamenkastog broja jednak je najvećem od jednoznamenkastih brojeva, a znamenka desetica je za 2 manja od tog zbroja. Koji je to broj?

1.52. **(4–5)** Zbroj znamenki dvoznamenkastog broja jednak je najmanjem od dvoznamenkastih brojeva, a znamenka desetica četiri je puta manja od znamenke jedinice. Nađi taj broj.

1.53. **(5–6)** Napiši najveći cijeli broj a) koji ima sve znamenke različite, b) koji ima sve znamenke različite i djeljiv je s četiri.

1.54. **(5–6)** Napiši najmanji cijeli broj koji se sastoji od svih znamenki i koji je djeljiv s a) 5, b) 20.

1.55. **(5–7)** Postavi u zapisu

$$4 \cdot 12 + 18 : 6 + 3$$

zagrade tako da dobiješ: a) broj 50, b) najmanji mogući broj, c) najveći mogući broj.

1.56. **(4–6)** U zapisu 88888888 postavi među nekim znamenkama znak zbrajanja tako da se dobije rezultat 1000.

1.57. **(4–6)** Zapiši niz od 20 petica. Postavi između nekih znamenaka znak zbrajanja tako da zbroj iznosi 1000.

1.58. **(4–7)** U izrazu $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9$ razmjesti zagrade tako da rezultat bude: a) najmanji mogući, b) najveći.

1.59. (4–6) Nađi cijeli broj koji je sedam puta veći od svoje znamenke jedinice.

1.60. (5–7) Troznamenkasti broj počinje znamenkom 4. Ako tu znamenku premjestimo na kraj broja, dobit ćemo broj koji iznosi $\frac{3}{4}$ početnoga. Nađi početni troznamenkasti broj.

1.61. (5–7) Nađi dvoznamenkasti broj koji se nakon zapisivanja znamenki u obrnutom poretku uveća 4.5 puta.

1.62. (5–8) Neki broj završava s 2. Ako tu znamenku premjestimo na početak, broj se podvostruči. Nađi najmanji takav broj.

1.63. (6–7) Nađi znamenke jedinica i stotica broja $42 * 4*$ ako je poznato da je on djeljiv sa 72.

1.64. (7–9) Nađi dva troznamenkasta broja kojima je zbroj djeljiv s 498, a količnik s 5.

1.65. (6–8) Svi dvoznamenkasti brojevi koji ne završavaju nulom pišu se jedni za drugim tako da svaki sljedeći počinje onom znamenkom kojom završava prijašnji. Dobiva se neki višeznamenkasti broj. Iz svih višeznamenkastih brojeva tog oblika izaberi najmanji i najveći. Nađi njihov zbroj.

1.66. (5–8) Iz broja $1234567\ldots5657585960$ izvuci 100 znamenki tako da preostali dio bude

a) najmanji

b) najveći.

1.67. (5–8) Dokaži da je broj $11\ldots11$ (osamdeset jedinica) djeljiv s 81.

1.68. (5–8) Dvije osobe A i B igraju sljedeću igru: po redu izgovaraju cijele pozitivne brojeve, pri čemu prvo igrač A izabire najviše 10, igrač B izabire broj koji je veći od tog broja ali ne za više od 10, itd. Pobjeđuje onaj koji je izabrao 100. Kako treba igrati A da bi sigurno pobijedio?

1.69. (6–8) Kvadrat broja sastoji se od znamenki 0, 2, 3 i 5. Nađi ga.

1.70. (6–8) Zbroj nekoliko brojeva iznosi 1. Može li zbroj njihovih kvadrata biti manja od 0.01?

1.71. (6–9) Dokaži da se svaki iznos ne manji od 8 kuna može isplatiti žetonima u vrijednosti od 3 kune i 5 kuna.

1.72.* **(6–8)** Na koliko načina iznos od 20 kuna možemo razmijeniti žetonima u vrijednosti od 10, 5, 3 i 2 kune?

1.73.* **(7–10)** U gradskom moskovskom autobusu bez konduktera ušlo je 20 ljudi. Autobusna karta iznosi 5 kopjejki. Pokazalo se da niti jedan od njih nema kovanica manjih od 10 kopjejki. Nije im preostalo drugo nego razmijeniti jedan s drugim novac i položiti u kasu 1 rublju (napomena: 1 rublja = 100 kopjejki, postoje kovanice u iznosu 10, 15 i 20 kopjejki). Koliko su najmanje kovanica oni mogli imati kada su ušli u autobus?

1.74. **(5–7)** Koliko ima dvoznamenkastih brojeva kojima je: a) među znamenkama točno jedna petica, b) znamenka desetica manja od znamenke jedinica, c) znamenka desetica veća od znamenke jedinica?

1.75. **(5–7)** Po redu su ispisani svi prirodni brojevi od 1 do 100. Koliko puta se u tom zapisu pojavljuje znamenka: a) nula, b) jedinica, c) trojka?

1.76. **(6–9)** Koliko je između prirodnih brojeva od 10 do 1000 takvih a) u zapisu kojih se pojavljuju točno tri jednake znamenke? b) u kojih je svaka sljedeća znamenka veća od prijašnje? c) od kojih je zbroj znamenki 9?

1.77. **(7–10)** Koliko je između prirodnih brojeva 100 i 10 000 takvih u zapisu kojih se sreću točno tri jednake znamenke?

1.78. **(6–8)** Koliko je prirodnih brojeva od 1 do 100 u kojih je zbroj znamenki jednak?

1.79. **(5–7)** Četiri uzastopna cijela broja su znamenka tisućica, stotica, desetica i jedinica nekog četveroznamenkastog broja. Za koliko se uveća taj broj ako se njegove znamenke napišu u obrnutom redoslijedu?

1.80. **(5–7)** Pri zbrajanju dvaju prirodnih brojeva učenik je zabunom napisao suvišnu nulu na kraju drugog broja i dobio zbroj 6641 umjesto 2411. Odredi te brojeve.

1.81. **(7–10)** Dokaži da su potpuni kvadrati svi brojevi oblika a) 16, 1156, 111556 itd. (u sredinu prije spomenutog broja umećemo broj 15), b) 49, 4489, 444889 itd. (u sredinu prije navedenog broja umećemo broj 48).

1.82. **(7–10)** Dokažite da je broj $11\ldots1122\ldots22$ (koji se sastoji od 100 jedinica i 100 dvojki) umnožak dvaju uzastopnih prirodnih brojeva.

1.83. **(7–10)** Što je veće: a) 5^{300} ili 3^{500}, b) 2^{700} ili 5^{300}, c) 2^{300} ili 3^{200}?

1.84. **(6–8)** Brojevi 2^{1971} i 5^{1971} napisani su jedan za drugim. Koliko je ukupno znamenki ispisano?

* * *

1.85. **(7–10)** Je li moguće sve deseteroznamenkaste brojeve zapisane pomoću znamenki 1 i 2 podijeliti na dvije grupe tako da zbroj svaka dva broja iz iste grupe sadrži u svom deseteroznamenkastom zapisu ne manje od dvije trojke?

1.86.** **(8–10)** Zadane su dvije grupe uzastopnih prirodnih brojeva, u svakoj je po k brojeva. Za koji je k te grupe brojeva moguće, izmijenivši poredak, potpisati jednu pod drugom tako da zbrojivši brojeve koji stoje jedan ispod drugog dobijemo ponovno k uzastopnih prirodnih brojeva?

1.87.* **(7–10)** U tablicu 9×9 upisani su brojevi 1,2,. . . 81. Dokaži da se pri svakom rasporedu brojeva mogu naći dva susjedna polja takva da razlika brojeva zapisanih u tim poljima nije manja od 6 (susjedna su polja ona koja imaju zajedničku stranu).

1.88.** **(7–10)** U nekom deseteroznamenkastom broju $a_1a_2a_3 \ldots a_{10}$ prva znamenka a_1 jednaka je broju nula u zapisu tog broja, druga znamenka a_2 broju jedinica, treća broju dvojki itd., posljednja a_1 broju devetki u zapisu tog broja. Nađi taj broj.

1.2. Zadaci iz logike

1.89. **(7–8)** Nekoliko ekipa igralo je u odbojkaškom prvenstvu, odigravši svaka sa svakom jedanput. Dokaži: ako su bilo koje dvije ekipe imale jednak broj pobjeda, tada postoje tri ekipe A, B i C tako da je A nadigrala B, B nadigrala C i C nadigrala A (primijetimo da u igranju odbojke nema neriješenog rezultata).

1.90. **(7–8)** Pretpostavimo da su istinite sljedeće tvrdnje:

a) među ljudima koji imaju televizor ima takvih koji nisu soboslikari,

b) ljudi koji se svakodnevno kupaju u bazenu i nisu soboslikari nemaju televizor,

Slijedi li odatle da je istinita tvrdnja: c) ne kupaju se svi vlasnici televizora svakodnevno u bazenu.

1.91. **(7–10)** Koliki je najveći broj tvrdnji od navedenih koje istovremeno mogu biti istinite:

a) Pero je varalica,

b) Pero nema sreće,

c) Pero ima sreće, ali nije varalica,

d) ako je Pero varalica, onda on nema sreće,

e) Pero će biti varalica onda i samo onda ako bude imao sreće

f) ili je Pero varalica, ili ima sreće, ali ne jedno i drugo istovremeno.

1.92. (7–10) a i b su cijeli pozitivni brojevi. Poznato je da su od sljedeće četiri tvrdnje:

1) $a+1$ je djeljivo s b,

2) a je jednako $2b+5$,

3) $a+b$ je djeljivo s 3,

4) $a+7b$ je prost broj tri istinite a jedna lažna. Nađi sve moguće parove a, b.

1.93. (6–8) Nađi prirodan broj A ako su od tri sljedeće tvrdnje dvije istinite, a jedna lažna:

1) $A+51$ je potpun kvadrat,

2) posljednja znamenka broja A je jedinica,

3) $A-38$ je potpuni kvadrat.

1.94. (7–10) Nađi sve takve dvoznamenkaste brojeve A, za koje su dvije od sljedećih četiriju tvrdnji točne, a dvije lažne:

1) A je djeljiv s 5,

2) A je djeljiv s 23,

3) $A+7$ je potpuni kvadrat,

4) $A-10$ je potpuni kvadrat.

1.95. (7–10) Nađite koju znamenku zamjenjuje svako slovo u sljedećoj jednakosti:

a) $AX^A = BAX$,

b) $PI^P = ILI$,

c) $AA^N = ANNA$,

d) $KAK = B^K$.

1.96. (8–10) U ribnjak su pustili 30 štuka koje su postupno jele jedna drugu. Štuka je sita ako pojede tri štuke (site ili gladne). Koji je najveći broj štuka koje se mogu najesti?

1.97. (7–10) Je li moguće složiti u lanac, poštujući pravila igre, svih 28 pločica domina tako da se: a) na jednom kraju lanca postavi šestica, a na drugom petica, b) na oba kraja bude šestica?

1.98. (7–10) Je li moguće poredati u krug 20 crvenih i nekoliko modrih žetona tako da u svakoj točki dijametralnoj crvenom žetonu stoji modri žeton i nigdje dva susjedna žetona nisu modra.

1.99. (6–10) Koji je najmanji broj vaganja potreban da se na dvostranoj vagi bez uporabe utega iz n kuglica izdvoji lažna — lakša kuglica?

1.100. (7-10) Od četiri kuglice jedna se po težini razlikuje od ostalih koje su jednako teške. Kako naći tu kuglicu pomoću dva vaganja na dvostranoj vagi ne uporabljujući utege? Je li moguće pri tome otkriti je li ona lakša ili teža od ostalih?

1.101. (8–10) Od 12 novčića jedan je lažni. Nađi ga pomoću četiri vaganja na dvostranoj vagi bez pomoći utega ako nije poznato je li on lakši ili teži od ostalih.

1.102. (6–10) Rasplažemo s 4 paketa i dvostranom vagom bez utega. S pet vaganja rasporedi pakete po težini.

1.103.* **(7–10)** Na ploči za igru *dame* od 16 polja proizvoljno je postavljeno 6 figura. Dokaži da se uvijek mogu naći dva horizontalna i dva vertikalna reda tako da se svih šest figura nalazi u tim redovima.

1.104.** **(9–10)** Dokaži da se između bilo kojih 6 osoba nalaze ili troje koji se međusobno poznaju ili troje koji se međusobno ne poznaju. (*Ramzesov zadatak*.)

1.105.** **(9–10)** Sastalo se n ljudi. Neki su od njih znanci, pri čemu svaka dvojica neznanaca imaju točno dvoje zajedničkih znanaca, a svaka dva znanca nemaju zajedničkih znanaca. Dokaži da svaki od njih poznaje jednaki broj nazočnih.

1.3. Dirichletovo načelo

1.106. (4–6) U skladište je dovezeno 25 sanduka s jabukama triju sorti. U svakom su sanduku bile jabuke samo jedne sorte. Možemo li naći 9 sanduka s jabukama iste sorte?

1.107. (4–6) U ladici su bojice: 10 crvenih , 8 modrih, 8 zelenih i 4 žute. U mraku biramo iz ladice bojice. Koji najmanji broj olovaka treba uzeti da bi među njima sigurno bilo

a) ne manje od 4 olovke iste boje

b) barem po jedna olovka od svake boje

c) najmanje 6 modrih olovaka?

1.108. **(6–8)** Dokažite da se među šest po volji odabranih cijelih brojeva mogu pronaći dva kojima je razlika djeljiva s 5.

1.109. **(7–10)** Zadano je n cijelih brojeva. Dokažite da se među njima može pronaći nekoliko brojeva (ili možda samo jedan!) čiji je zbroj djeljiv s n.

1.110. **(8-10)** Dokažite da postoji broj oblika

$$19711971\cdots19710\cdots0$$

djeljiv s 1972.

1.111. **(8-10)** Dokažite da se za svaki prirodni broj n može pronaći prirodni broj kojemu su sve znamenke petice i nule a koji je djeljiv s n.

1.112. **(4–6)** Koliko se najviše različitih prirodnih brojeva ne većih od 10 može uzeti tako da među njima ne postoje dva od kojih je jedan dvostruko veći od drugog?

1.113. **(7–10)** Je li istina da se među 30 bilo kojih različitih prirodnih brojeva koji nisu veći od 50 uvijek mogu pronaći dva broja od kojih je jedan dvostruko veći od drugog?

1.114. **(6–7)** U razredu je 40 učenika. Može li se pronaći mjesec u godini u kojemu imaju rođendan barem četvorica učenika tog razreda?

1.115. **(6–7)** U školi je 30 razreda s ukupno 1000 učenika. Dokažite da postoji razred u kojem ima barem 34 učenika.

1.116. **(6–8)** U razredu je 33 učenika. Zbroj njihovih godina iznosi 430. Je li istina da se može pronaći među njima 20 učenika kojima je zbroj godina veći od 260?

1.117. **(4–6)** Dokažite da se među bilo koja tri cijela broja mogu pronaći dva kojima je zbroj djeljiv s 2.

1.118.* **(8–10)** Dokažite da se iz skupa od $2^{n+1}-1$ bilo kakvih cijelih brojeva mogu odabrati 2^n broja kojima je zbroj djeljiv s 2^n.

1.119.* **(8–10)** Zadano je $n+1$ različitih prirodnih brojeva manjih od $2n$. Dokažite da se među njima mogu odabrati tri broja takva da je jedan od njih jednak zbroju preostala dva.

1.120.* **(8–10)** Dokažite da postoji prirodni broj kojemu su posljednje znamenke 1972, a koji je djeljiv s 1971.

1.121. **(7–10)** Mogu li se pronaći dvije (različite) potencije broja 4 za koje je **a)** posljednja znamenka jednaka; **b)** dvije posljednje znamenke jednake; **c)** tri posljednje znamenke jednake?

1.122.* **(8–10)** Može li se pronaći cjelobrojna potencija broja 3, koja se završava na 0001?

1.123. **(7–10)** Šestero prijatelja odlučilo je u nedjelju posjetiti sedam kinodvorana u kojima predstave počinju u 9, 10, 11, . . . , 17, 18 i 19 sati. Na svaku predstavu išla su dvojica u jednu kinodvoranu, a svi ostali u drugu. Navečer se pokazalo da je svaki od njih tog dana posjetio svih sedam kinodvorana. Dokaži da u svakoj od sedam kinodvorana barem na jednoj predstavi tog dana nije bio nitko od prijatelja.

1.124. **(7–10)** U jednom krugu razigravanja za nogometno prvenstvo sudjeluje 30 ekipa. Dokaži da se u svakom trenutku mogu naći dvije ekipe koje su odigrale jednak broj utakmica.

1.125.* **(8–10)** Zadano je 51 različitih jednoznmenkastih ili dvoznamenkastih brojeva. Dokažite da je među njima moguće izabrati 6 takvih brojeva tako da niti dva među izabranima nemaju iste znamenke ni u kakvu poretku.

1.126.* **(8–10)** Dokaži teorem: Ako su cijeli brojevi m i n međusobno prosti, tada postoji prirodan broj k da je $m^k - 1$ djeljiv s n.

1.127.** **(9–10)** U jediničnom kvadratu razbacana je 51 točka. Dokaži da tri od njih leže unutar kruga polumjera $\frac{1}{7}$.

1.128.** **(9–10)** Borova šuma raste na površini oblika kvadrata stranice 1 km. Znajući da se cijela šuma sastoji od 4500 stabala promjera 50 cm dokaži da je u šumi mogučhe naći pravokutnu površinu 10 m $\times$ 20 m na kojoj ne raste ni jedno stablo.

1.4. Zadaci iz djeljivosti. Diofantske jednadžbe

1.129. **(4–6)** Nikola i Petar kupili su jednake skije. Koliko stoji jedan par skija ako je Petar uplatio cijenu novčanicama od tri rublje, Nikola novčanicama od pet rublji, a zajedno su uplatili manje od 10 novčanica?

1.130. **(4–6)** Koliko ima četveroznamenkastih brojeva djeljivih s 45 a čije su dvije srednje znamenke 97?

1.131. **(4–6)** Broju 15 nadopišite slijeva i zdesna po jednu znamenku tako da on bude djeljiv s 15.

1.132. (5–6) Odredite posljednju znamenku sljedećih brojeva: **a)** 6^{1971}, **b)** 9^{1971}, **c)** 3^{1971}, **d)** 2^{1971}.

1.133. (5–6) Nađi najmanji prirodni broj djeljiv s 36 u zapisu kojega se nalazi svih 10 znamenki.

1.134. (6) Dokaži da je razlika $9^{1972} - 7^{1972}$ djeljiva s 10.

1.135. (6) Kojom se znamenkom završava broj $9999^{999^{99^{9}}}$?

1.136. (4–6) S koliko se nula završava umnožak

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100?$$

1.137. (6–7) Dokaži da je broj $\dfrac{7^{1968^{1}970} - 3^{68^{70}}}{10}$ cijeli.

1.138. (5–8) Dokaži da se između bilo kojih 5 cijelih brojeva mogu naći 3 kojima je zbroj djeljiv s 3.

1.139. (6–10) Dokaži: ako je broj p prost broj i $p > 3$, tada je broj $p^2 - 1$ djeljiv s 24.

1.140. (6–10) Ako je $x^2 + y^2$ djeljiv s 3 i x, y cijeli brojevi, tada su i x i y djeljivi s 3. Dokaži.

1.141. (6–8) Dokaži da zbroj kvadrata triju cijelih brojeva ne može pri dijeljenju s 8 dati ostatak 7.

1.142. (5–7) Nađi četiri prirodna broja takva da je svaki produkt od tri među njima s pribrojenom jedinicom djeljiv s 4.

1.143. (6–8) Nađi četiri različita cijela broja takva da je zbroj svaka tri među njima djeljiv s četiri.

1.144. (7–10) Nađi n različitih cijelih brojeva takvih da je svaki produkt od $n - 1$ među tim brojevima djeljiv preostalim brojem.

1.145. (6–7) Je li istinit poučak: ako zapišemo u obrnutom poretku znamenke bilo kojeg cijelog broja tada, je razlika početnog i novog broja djeljiva s 9?

1.146. (6–8) Nađi sve takve prirodne brojeve koji se povećaju 9 puta ako se između znamenke jedinica i znamenke desetica umetne nula.

1.147. (5–7) Pet sudionika Olimpijskih igara bili su pobjednici Olimpijskih igara osvojivši 15, 14 i 13 bodova i zauzeli su prvo drugo i treće mjesto. Koliko je sudionika zauzelo pojedino mjesto, ako su zajedno osvojili 69 bodova?

1.148. (6–10) Nađi najveću zajedničku mjeru brojeva $2n + 3$ i $n + 7$.

1.149. (6–10) Dokaži da je razlomak $\dfrac{12n + 1}{30n + 2}$ neskrativ.

1.150. (7–10) Nađi sve cijele n za koje vrijedi da je $\dfrac{19n+7}{7n+11}$ cijeli broj.

1.151. (6–7) Može li se broj 1974 prikazati pomoću razlike kvadrata dvaju prirodnih brojeva?

1.152. (6–10) Objasni za koje prirodne brojeve n je broj $n^5 - n$ djeljiv s 120.

1.153. (6–10) Dokaži da je produkt četiri uzastopna prirodna broja pribrojen jedinici potpuni kvadrat.

1.154. (7–10) Ni jedan od brojeva $p-1$ i $p+1$, gdje je p umnožak prvih n prostih brojeva $(n > 1)$, nije potpuni kvadrat. Dokaži.

1.155. (6–10) Dokaži: ako je svaki od dvaju brojeva zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva, tada je i njihov umnožak također zbroj dvaju kvadrata.

1.156. (6–10) Može li zbroj kvadrata dvaju cijelih neparnih brojeva biti kvadrat cijelog broja?

1.157. (7–10) Dokaži da zbroj kvadrata pet uzastopnih cijelih brojeva nije potpuni kvadrat.

1.158. (7–10) Neki je dvoznamenkasti broj djeljiv s 3. Ako među njegovim znamenkama umetnemo nulu i dobivenom troznamenkastom broju pribrojimo udvojenu znamenku njegovih stotica, dobit ćemo broj 9 puta veći od prijašnjeg. Nađi početni dvoznamenkasti broj.

1.159.* **(7–10)** Zbroj znamenki troznamenkastog broja je 7. Dokaži da je broj djeljiv sa 7 onda i samo onda kada su jednake njegove znamenke desetica i jedinica.

1.160. (7–10) Dokaži da izraz $x + \dfrac{1}{x}$ nije cijeli broj ni u kojeg racionalnog broja x različitog od ± 1.

1.161. (8–10) Može li kvadratna jednadžba

$$ax^2 + bx + c = 0$$

s cjelobrojnim koeficijentima imati diskriminantu jednaku 23?

1.162. (7–10) Brojevi p i $2p+1$ su prosti i $p > 3$. Dokaži da je broj $4p+1$ složen.

1.163. (7–10) Može li zbroj znamenki potpunog kvadrata iznositi 1970?

1.164. (8–10) Ako kvadrat prirodnog broja sadrži neparan broj desetica, tada je znamenka jedinica kvadrata uvijek 6. Dokaži.

1.165. Na turniru sudjeluje 15 šahista. Je li moguće da je u nekom trenutku svaki od njih odigrao točno 7 partija?

1.166. (6–10) Može li se 1973 telefona spojiti među sobom tako da svaki bude spojen s 1971 telefonom?

1.167. (9–10) Postoji li poliedar neparnog broja strana koje su sve mnogokuti s neparnim brojem bridova?

1.168. (6–10) U školi su 953 učenika. Neki od njih se poznaju, a drugi se ne poznaju međusobno. Dokaži da barem jedan od njih ima paran broj poznanika među učenicima te škole.

1.169.** **(8–10)** Svaka je od 10 znamenki $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$ zapisana na dva papirića. Dokaži da tih 20 papirića ne možemo poredati u niz tako da među dva papirića s jednakom znamenkom k bude točno k papirića (za $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 9$).

1.170.* **(7–10)** Puž puže iz točke A po plohi okrećući se svakih 15 minuta za $90°$. Dokaži da se on može vratiti u točku A samo nakon cijelog broja sati (brzina puža drži se konstantnom).

1.171.* **(8–10)** Zadano je n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ svaki od kojih je 1 ili -1, i vrijedi

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0.$$

Dokaži da je n djeljiv s 4.

1.172.* **(8–10)** Nađi sve takve dvoznamenkaste brojeve takve da je zbroj svakog broja i broja s istim znamenkama zapisanim u obrnutom poretku potpuni kvadrat.

1.173. (7–10) Da bismo doznali je li broj 1601 prost, počeli smo ga dijeliti s 2, 3, 5. Uz koji prosti broj možemo prekinuti ispitivanje?

1.174. (7–10) Broj p je prost. Koliko postoji brojeva uzajamno prostih s brojem p^3 i manjih od njega?

1.175.* **(8–10)** Dva dvoznamenkasta broja zapisana jedan za drugim čine četveroznamenkast broj djeljiv s njihovim umnoškom. Nađi te brojeve.

1.176.* **(8–10)** Od troznamenkastog broja se oduzme zbroj njegovih znamenki. S dobivenim se brojem učini ista stvar i tako dalje, 100 puta. Dokaži da se kao rezultat dobiva nula.

1.177.* **(10)** Na koliko načina broj 1971 možemo prikazati kao zbroj nekoliko uzastopnih prirodnih brojeva?

1.178.* **(8–10)** Dokaži da je najmanji zajednički višekratnik brojeva $1, 2, 3, 4, \ldots, 2n$ jednak najmanjem zajedničkom višekratniku brojeva $n+1, n+2, \ldots, 2n$.

1.179.* **(9–10)** Dokaži: ako je s broj svih djelitelja prirodnog broja n, tada je umnožak svih djelitelja jednak $\sqrt{n^s}$.

1.180. **(7–10)** a i b su uzajamno prosti prirodni brojevi. Dokaži da jednadžba $ax + by = ab$ nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

1.181. **(8–10)** Riješite u skupu cijelih brojeva jednadžbu

$$xy = x + y.$$

1.182. **(8-10)** Riješite u skupu cijelih brojeva jednadžbu

$$6x^2 + 5y^2 = 74.$$

1.183. **(8–10)** Riješite u skupu cijelih brojeva jednadžbu

$$19x^2 + 28y^2 = 729.$$

1.184.* **(8–10)** Riješite u skupu cijelih brojeva jednadžbu

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3.$$

1.185.* **(8–10)** Riješite u skupu cijelih brojeva jednadžbu

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y.$$

1.186.* **(8–10)** Riješite u skupu cijelih brojeva jednadžbu

$$1! + 2! + \ldots + x! = y^2.$$

1.187. **(8–10)** Riješite u skupu prirodnih brojeva jednadžbu

$$x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = \frac{10}{7}.$$

1.188.* **(8–10)** Riješite u skupu prirodnih brojeva jednadžbu

$$x + y + z = xyz.$$

1.189. **(8–10)** Riješite u skupu prostih brojeva jednadžbu

$$x^y + 1 = z.$$

1.190. **(8–10)** Koliko rješenja u skupu cijelih brojeva ima jednadzba

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}?$$

1.191. (8–10) Nađi cjelobrojna rješenja sustava

$$\begin{cases} x+y=2, \\ xy-z^2=1. \end{cases}$$

1.192. (7–10) Tri prodavačice, Anka, Ranka i Branka piju čaj. Ako bi Anka popila 5 šalica više, ona bi popila toliko koliko Ranka i Branka popiju zajedno. Ako bi Ranka popila 9 šalica više, popila bi toliko koliko Anka i Branka zajedno popiju. Njihova prezimena su Kovač, Kovačić i Kovačević. Odredite koliko je šalica čaja popila svaka od njih i čije je koje prezime ako se zna da je broj šalica koje je prodavačica Kovač popila djeljiv s 3, a prodavačica Kovačević je popila 11 šalica.

1.193. (8–10) Tri poljoprivrednika: Petar, Pavle i Andrija i njihove supruge Katarina, Marija i Valentina zaputili se na sajam. Svaki od šest osoba kupio je toliko stvari koliko su kuna platili za svaku stvar. Petar je kupio 23 stvari više nego Marija, a Pavle 11 stvari više nego Katarina. Poznato je, osim toga, da je svaki suprug izdao 63 kune više nego njegova supruga.

Odredi ime supruge svakog poljoprivrednika.