1.

Općinsko natjecanje

Kao i svake godine, i u 1999. godini ciklus susreta i natjecanja mladih matematičara, učenika osnovnih i srednjih škola Republike Hrvatske, započeo je školskim natjecanjima koja su se provodila tijekom siječnja i veljače. Sudjelovao je velik broj učenika svih razreda. Najbolji učenici na školskim natjecanjima pozvani su na općinska i gradska natjecanja. Ova natjecanja održana su 5. ožujka diljem naše zemlje po jedinstvenim kriterijima Državnog povjerenstva za matematička natjecanja, koje je pripremilo i zadatke za ta natjecanja.

Osnovna škola

4. razred

4.1. Pomoću pet dvojki i uporabom nekih od računskih operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja, a bez zagrada, prikaži brojeve 6, 7, 8, 9 i 10.

4.2. Izračunaj:

$$(43 \cdot 315 - 43 \cdot 281 + 34 \cdot 57) : 17.$$

4.3. Na šahovskom turniru sudjelovalo je 5 igrača. Svaki od njih igrao je sa svakim po jednu igru.

a) Koliko je ukupno igara odigrano na tom turniru?

b) Koliko je svaki pojedini igrač odigrao igara?

4.4. U vrtu se nalaze zečevi i kokoši. Mario je izbrojio ukupno 50 nogu i 11 kokošjih glava. Koliko je zečeva u vrtu?

4.5. Opseg je pravokutnika 180 mm. Nad stranicom duljine a i stranicom duljine b pravokutnika nacrtani su jednakostranični trokuti. Duljina stranice jednog od njih je 30 mm.

a) Izračunaj razliku opsega zadanog pravokutnika i svakog pojedinog trokuta.

b) Prema zadanim uvjetima i dobivenim rezultatima nacrtaj pravokutnik i trokute.

5. razred

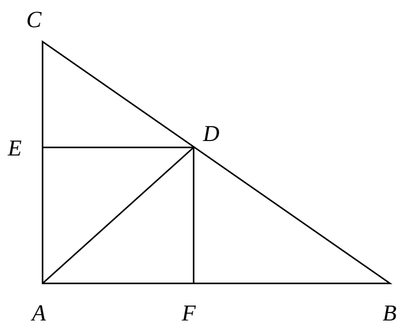
5.1. Odredi dva prirodna broja kojih je zbroj 960, a količnik 5.

5.2. Odredi sve peteroznamenkaste brojeve oblika $\overline{a3b2c}$ djeljive s 45.

5.3. Zbroj šest uzastopnih prirodnih brojeva iznosi 1275. Odredi sve proste djelitelje najmanjeg od tih brojeva.

5.4. Ivan ima 540 poštanskih maraka više od Josipa. Kad bi Ivan dao 100 maraka Josipu, tada bi Ivan imao dvostruko više poštanskih maraka od Josipa. Koliko poštanskih maraka ima Ivan, a koliko Josip?

5.5. Ispiši sve trokute i četverokute koje vidiš na slici.



Sl. 1.1.

6. razred

6.1. Izračunaj:

$$\frac{(7-6.35):6.5+9.9}{\left(1.2:36+1.2:0.25-1\frac{5}{16}\right):\frac{169}{24}}.$$

6.2. Razlika je dvaju brojeva 63. Ako veći od tih dvaju brojeva povećaš 12 puta, a manji ostaviš nepromijenjen, tada je nova razlika 1999. Koji su početni brojevi?

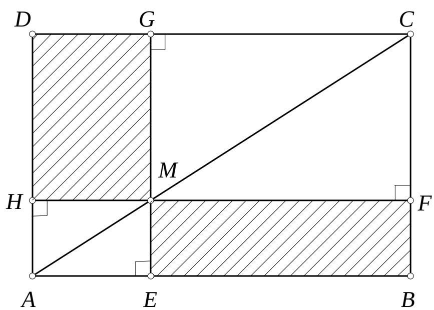
6.3. Odredi sve četveroznamenkaste brojeve oblika $\overline{abba}$, tako da vrijedi jednakost

$$\overline{abba} \cdot 2 = \overline{ccdd},$$

pri čemu su a, b, c, d različite znamenke.

6.4. Duljina je jedne stranice trokuta 6.5 dm, a duljina je druge stranice 0.8 dm. Kolika je duljina treće stranice, ako je ta duljina izražena u decimetrima prirodan broj?

6.5. Zadan je pravokutnik $ABCD$ kao na slici. Koji od iscrtanih dijelova pravokutnika ima veću površinu, ako je $|AE| = |DG|$ i $|AH| = |BF|$? Obrazloži.



Sl. 1.2.

7. razred

7.1. Riješi nejednadžbu i grafički prikaži rješenje:

$$\frac{x-1}{2} - \frac{5x+4}{8} > x+2.$$

7.2. Iz mjesta A krenuo je biciklist u mjesto B brzinom 9 km na sat. Jedan sat i 15 minuta nakon biciklista krenuo je motorist iz mjesta B u mjesto A brzinom od 21 km na sat. Koliko su se kilometara od mjesta A susreli biciklist i motorist, ako je udaljenost mjesta A i B jednaka $81\frac{1}{4}$ km?

7.3. Jedan radnik može završiti neki posao za 20 dana, a drugi bi radnik taj isti posao završio za 30 dana. Ako se prvom i drugom radniku pridruži treći, sva trojica zajedno bi završila taj posao za 8 dana. Za koje bi vrijeme treći radnik završio posao radeći sam?

7.4. Zadan je mnogokut s 50 vrhova $P_1P_2\dots P_{49}P_{50}$. Iz vrha P_1 povučene su dijagonale do vrhova P_3 i P_{49}. Ako se iz zadanog pedeseterokuta izbace trokuti $P_1P_2P_3$ i $P_1P_{50}P_{49}$, koliko dijagonala ima dobiveni mnogokut?

7.5. Zadan je romb $ABCD$ kome je jedan šiljasti kut 60°. Dokaži da kružnica sa središtem u sjecištu dijagonala i promjera jednakog manjoj dijagonali siječe svaku stranicu romba u njenom polovištu.

8. razred

8.1. Racionaliziraj i skrati razlomak:

$$\frac{8+2\sqrt{2}}{4+\sqrt{128}}.$$

8.2. U nekom razlomku nazivnik je za 3 veći od brojnika. Ako brojnik tog razlomka povećamo za 2, a nazivnik povećamo tri puta, tada je zbroj tako dobivena razlomka s početnim razlomkom jednak 1. Koliki je početni razlomak?

8.3. Duljine stranica pravokutnog trokuta prirodni su brojevi, pri čemu je duljina jedne katete 15. Kolike su duljine ostalih stranica takva pravokutnog trokuta? Koliko ima različitih pravokutnih trokuta s tim svojstvom?

8.4. U jednakokračnom trapezu $ABCD$ stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ su osnovice, $|AD| = 18$ cm, $\sphericalangle BAD = 75^\circ$ i $|AB| = 2\cdot|CD|$. Kolika je površina trapeza $ABCD$?

8.5. Zadan je pravokutnik $ABCD$ kome su duljine dviju susjednih stranica 16 cm i 12 cm. Simetrala dijagonale $\overline{BD}$ siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki E, a stranicu $\overline{CD}$ u točki F. Kolika je duljina dužine $\overline{EF}$?

Srednja škola

1. razred

1.1. Ako su a, b i c realni brojevi, takvi da je $a\neq b\neq c\neq a$, dokažite da je

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

1.2. Iz bilo koje točke M unutar jednakostraničnog trokuta ABC spuštene su okomice $\overline{MH}$, $\overline{MK}$, $\overline{MP}$, na njegove stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ redom. Dokažite da je

a) $|AH|^2+|BK|^2+|CP|^2=|HB|^2+|KC|^2+|PA|^2$;

b) $|AH|+|BK|+|CP|=|HB|+|KC|+|PA|$.

1.3. Dokažite da jednadžba $5x^2-4y^2=1999$ nema nijedno cjelobrojno rješenje.

1.4. Nađite sve parove realnih brojeva (x,y) za koje vrijede jednakosti

$$\begin{aligned}|x+y|&=1,\\|x|+|y|&=1.\end{aligned}$$

Prikažite skup rješenja u koordinatnoj ravnini.

2. razred

2.1. Odredite sve parove prirodnih brojeva x i y za koje vrijedi

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1999}.$$

2.2. Ako je $abc\neq 0$, da li je moguće da svaka od ove tri jednadžbe

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=0,\\cx^2+ax+b&=0,\\bx^2+cx+a&=0,\end{aligned}$$

ima realna rješenja?

2.3. Neka je ABC trokut kod kojeg je $|AB|<|AC|$ i neka je D polovište onog luka $\overset{\frown}{BC}$ kružnice opisane tom trokutu na kojem leži točka A. Dokažite da za nožište E, okomice iz točke D na stranicu $\overline{AC}$, vrijedi jednakost

$$|AB|+|AE|=|EC|.$$

2.4. Prikažite u kompleksnoj ravnini skup svih kompleksnih brojeva z za koje vrijedi

$$|z+c|=|z-c|,$$

gdje je $c\neq 0$ zadani kompleksni broj.

3. razred

3.1. U skupu realnih brojeva riješite jednadžbu

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x}\right) = \operatorname{sgn}\log_x 1999^{\sqrt{1-x}},$$

pri čemu je

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

3.2. Ako je

$$x + x^{-1} = 2\cos 40^\circ,$$

dokažite da je

$$x^4 + x^{-4} = 2\cos 160^\circ.$$

3.3. Dokažite da sjecište visina šiljastokutnog trokuta ABC s danim kutovima α, β i γ, dijeli njegovu visinu iz vrha A u omjeru $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}$.

3.4. Neka su a i b duljine dvaju mimoilaznih bridova trostrane piramide koji su međusobno okomiti, i neka je d njihova udaljenost. Odredite volumen te piramide.

4. razred

4.1. Nađite duljinu zajedničke tetive kružnica

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0.$$

Koliko ima zajedničkih tangenata? Nađite njihove jednadžbe, kao i udaljenosti između njihovih dirališta s kružnicama.

4.2. a) Rastavite na faktore izraz $n^4 + 4$.

b) Dokažite da je

$$\frac{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right)\left(3^4 + \frac{1}{4}\right)\left(5^4 + \frac{1}{4}\right)\ldots\left(11^4 + \frac{1}{4}\right)}{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right)\left(4^4 + \frac{1}{4}\right)\left(6^4 + \frac{1}{4}\right)\ldots\left(12^4 + \frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{313}.$$

4.3. Neka je $0 < a < b < c < d$. Dokažite da je $a^b b^c c^d d^a \geqslant b^a c^b d^c a^d$.

4.4. Niz a_1, a_2, ..., a_n, ... definiran je ovako:

$$a_1 = 1,$$
$$a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}), \quad n > 1.$$

Odredite a_{1999}.

Rješenja

Osnovna škola

4.1. Zadatak se može riješiti na primjer ovako:

$$\begin{aligned} 6 =& 2+2+2+2-2 \\ 7 =& 2+2+2+2:2 \\ 8 =& 2\cdot 2\cdot 2+2-2 \\ 9 =& 2\cdot 2\cdot 2+2:2 \\ 10 =& 2+2+2+2+2. \end{aligned}$$

4.2. $(43\cdot 315-43\cdot 281+34\cdot 57):17=(43\cdot 34+34\cdot 57):17=34\cdot(43+57):17=34\cdot 100:17=200$.

4.3. Označimo igrače slovima A, B, C, D i E. Igrač A odigrao je 4 igre s preostala 4 igrača B, C, D i E. Igrač B odigrao je četiri igre s igračima: A (tu igru smo već brojali), C, D i E. Igrač C odigrao je četiri igre i to s: A, B (te igre smo već brojali), D i E. Igrač D odigrao je također četiri igre: sa A, B, C (te igre smo već brojali) i s E.

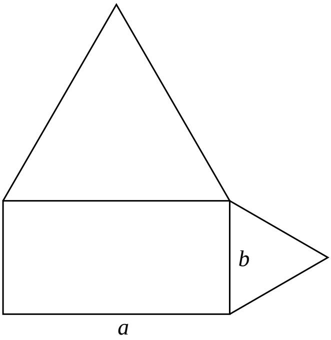
a) Na turniru je odigrano $4+3+2+1=10$ igara.

b) Svaki igrač je odigrao 4 igre.

4.4. Kokošjih nogu je bilo $11\cdot 2=22$. Preostale noge su bile zečje, tj. zečjih nogu je bilo $50-22=28$. Kako svaki zec ima 4 noge, bilo je $28:4=7$ zečeva.

4.5. a) $O=2a+2b$, $180=2a+2\cdot 30$, $180=2a+60$, $2a=180-60$, $2a=120$, $a=60$ mm. Opseg prvog trokuta je $O_1=3\cdot 30=90$ mm. Razlika opsega pravokutnika i prvog trokuta je $180-90=90$ mm. Opseg drugog trokuta je $O_2=3\cdot 60=180$ mm. Razlika opsega pravokutnika i drugog trokuta je $180-180=0$ mm.

b)



Sl. 1.3.

* * *

5.1. Ako je količnik ta dva broja jednak 5, to znači da, ako manji broj označimo sa x, veći broj je jednak $5x$. No tada je $x + 5x = 960$, $6x = 960$, $x = 160$. Traženi brojevi su 160 i 800.

5.2. Broj je djeljiv sa 45 ako je djeljiv s 5 i s 9. Iz djeljivosti s 5 slijedi da je $c = 0$ ili $c = 5$.

Ako je $c = 0$, tada zbog djeljivosti s 9 mora biti $a + b + 5$ djeljivo s 9, tj. $a + b + 5 = 9$ ili $a + b + 5 = 18$. Sve mogućnosti su dane u tablicama:

a	1	2	3	4
b	3	2	1	0

a	4	5	6	7	8	9
b	9	8	7	6	5	4

Ako je $c = 5$, tada je $a + b + 10$ djeljivo s 9, tj. $a + b + 10 = 18$ ili $a + b + 10 = 27$. Mogućnosti su dane u tablicama:

a	1	2	3	4	5	6	7	8
b	7	6	5	4	3	2	1	0

a	8	9
b	9	8

Sada je lako napisati svih 20 dobivenih peteroznamenkastih brojeva: 13320, 23220, 33120, 43020, 43920, 53820, 63720, 73620, 83520, 93420, 13725, 23625, 33525, 43425, 53325, 63225, 73125, 83025, 83925, 93825.

5.3. Ako je x najmanji od 6 uzastopnih brojeva, tada vrijedi:

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) + (x + 5) = 1275,$$

$$6x + 15 = 1275, \quad 6x = 1260, \quad x = 210.$$

Prosti djelitelji broja 210 su 2, 3, 5 i 7.

5.4. Ako Josip ima x poštanskih maraka, tada ih Ivan ima $x + 540$. Zbog uvjeta zadatka vrijedi $(x + 540) - 100 = 2 \cdot (x + 100)$, $x = 240$. Josip ima 240, a Ivan 780 poštanskih maraka.

5.5. Trokuti su ABC, ABD, ADC, CED, EAD, DAF, DFB. Četverokuti su $ABDE$, $AFDE$, $AFDC$.

* * *

6.1. Vrijednost brojnika je 10. Vrijednost izraza u zagradi u nazivniku je $\frac{169}{48}$. Vrijednost nazivnika je $\frac{1}{2}$. Vrijednost razlomka je 20.

6.2. Neka je a veći nepoznati broj, a b neka je manji. Iz uvjeta zadatka imamo $a - b = 63$ i $12a - b = 1999$. Drugu jednakost možemo pisati kao $11a + a - b = 1999$, $11a + 63 = 1999$, tj. $a = 176$. Nepoznati brojevi su 176 i 113.

6.3. Očito je $a < 5$, jer bi za $a \geqslant 5$ broj na desnoj strani jednakosti bio peteroznamenkast što ne može biti.

Kako je lijeva strana jednakosti djeljiva s 2, nužno je i desna strana jednakosti djeljiva s 2, a to znači da je broj $\overline{ccdd}$ paran, tj. d može biti 2, 4, 6 ili 8.

Za $d = 2$ znamenka a može biti 1 ili 6. Zbog $a < 5$, $a = 6$ otpada. Za $a = 1$ znamenka b može biti ili 1 ili 6. Otpada $b = 1$, a za $b = 6$ dobivamo $c = 3$. Traženi četveroznamenkasti broj je 1661, a umnožak je 3322.

Za $d = 4$ znamenka a ima vrijednost 2, jer $a = 7$ otpada zbog $a < 5$. Za $a = 2$ dobivamo $b = 7$, jer $b = 2$ ne može biti. Drugi četveroznamenkasti broj je 2772, a umnožak je 5544.

Za $d = 6$ znamenka a ima vrijednost 3, a tada je $b = 8$. Treći četveroznamenkasti broj je 3883, a umnožak je 7766.

Za $d = 8$ znamenka a mora biti 4, jer 9 otpada. Za $a = 4$ dobivamo $b = 4$ ili $b = 9$. Broj $b = 4$ otpada zbog $a = 4$. Za $b = 9$ slijedi da je $c = 9$, što ne može biti. Zato za $d = 8$ zadatak nema rješenja.

6.4. U trokutu je duljina svake stranice manja od zbroja duljina ostalih dviju stranica, a veća od razlike ostale dvije stranice.

Slijedi da je duljina treće stranice trokuta manja od $6.5 + 0.8$, tj. manja od 7.3 dm.

Duljina treće stranice trokuta je veća od $6.5 - 0.8$, tj. veća od 5.7 dm.

Dakle, duljina treće stranice može biti ili 6 dm ili 7 dm.

6.5. Dijagonala $\overline{AC}$ dijeli pravokutnik na dva sukladna trokuta ABC i ACD koji imaju jednake površine.

Četverokuti $AEMH$ i $FCGM$ su pravokutnici pa je $P(AEM) = P(AMH)$ i $P(MFC) = P(MCG)$. Iz $P(ABC) = P(ACD)$ dobivamo redom: $P(ABC) - (P(AEM) + P(MFC)) = P(ACD) - (P(AMH) + P(MCG))$ ili $P(EBFM) = P(HMGD)$.

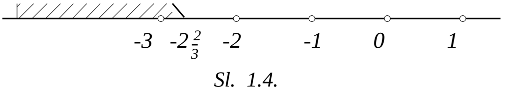
Iscrtani dijelovi pravokutnika imaju jednake površine.

* * *

7.1. Zadanu nejednadžbu možemo transformirati ovako:

$$\frac{x-1}{2} - \frac{5x+4}{8} > x + 2 \quad / \cdot 8$$
$$4(x-1) - (5x+4) > 8x + 16$$
$$4x - 4 - 5x - 4 > 8x + 16$$
$$-x - 8 > 8x + 16, \quad -x - 8x > 16 + 8, \quad -9x > 24$$
$$x < -\frac{8}{3}$$

Grafički prikaz:



Sl. 1.4.

7.2. Neka je x vrijeme izraženo u satima od polaska biciklista iz mjesta A do susreta s motociklistom. Za to vrijeme je biciklist prešao put od $9x$ km.

Kako je motociklist krenuo iz mjesta B 1 sat i 15 minuta kasnije, njegovo vrijeme je $x - \frac{5}{4}$ sati, a prijeđeni put je jednak $21(x - \frac{5}{4})$ km. Ta dva puta zajedno daju cijeli put, tj. $9x + 21(x - \frac{5}{4}) = 81\frac{1}{4}$. Rješenje jednadžbe je $x = \frac{43}{12}$ h.

Za to vrijeme biciklist je prešao $9\cdot\dfrac{43}{12}$ km, tj. $32\dfrac{1}{4}$ km. Prema tome, biciklist i motorist susreli su se na $32\dfrac{1}{4}$ km od mjesta A.

7.3. Neka je x broj dana za koliko bi treći radnik obavio taj posao. Prvi radnik za jedan dan obavi $\dfrac{1}{20}$ posla, drugi radnik obavi $\dfrac{1}{30}$ posla, a treći radnik obavi $\dfrac{1}{x}$ posla. Sva trojica zajedno za 1 dan obave $\dfrac{1}{8}$ posla. Dakle, vrijedi

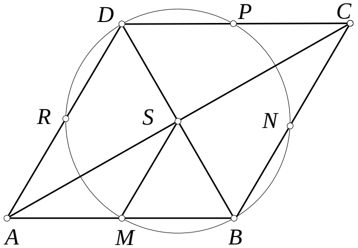
$$\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{x}=\frac{1}{8}$$

Rješenje te jednadžbe je $x=24$. Treći radnik bi obavio posao za 24 dana.

7.4. Nakon uklanjanja trokuta $P_1P_2P_3$ i $P_1P_{50}P_{49}$ dobiveni mnogokut ima 48 vrhova.

Broj dijagonala tog mnogokuta je $D(48)=\dfrac{48(48-3)}{2}=1080$.

7.5. Neka je u rombu $ABCD$ kut $\sphericalangle BAD=60^\circ$ i neka su M, N, P, R točke u kojima kružnica sa središtem u točki S promjera $\overline{BD}$ siječe redom stranice $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$. Zbog $\sphericalangle BAD=60^\circ$ slijedi da je $\sphericalangle ABC=120^\circ$. Kako su dijagonale romba ujedno i simetrale kutova slijedi $\sphericalangle SAB=30^\circ$ i $\sphericalangle SBA=60^\circ$.



Sl. 1.5.

Kako je $|SM|=|SB|=r$, slijedi da je trokut MBS jednakokračan, pa je $\sphericalangle BMS=\sphericalangle MBS=\sphericalangle ABS=60^\circ$ iz čega slijedi da je $\sphericalangle MSB=60^\circ$, pa zaključujemo da je trokut MBS jednakostraničan, tj. $|MS|=|BM|$.

Kut $\sphericalangle BMS$ je vanjski kut trokuta AMS, pa prema poučku o vanjskom kutu trokuta vrijedi jednakost $30^\circ+\sphericalangle ASM=60^\circ$, tj. $\sphericalangle ASM=30^\circ$, pa zaključujemo da je trokut AMS jednakokračan iz čega slijedi $|MS|=|AM|$. Sada je $|AM|=|BM|$, tj. točka M je polovište stranice $\overline{AB}$.

Na sličan način se pokaže da su točke N, P, R redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$.

* * *

8.1. $\dfrac{8+2\sqrt{2}}{4+8\sqrt{2}}=\dfrac{8+2\sqrt{2}}{4+8\sqrt{2}}\cdot\dfrac{4-8\sqrt{2}}{4-8\sqrt{2}}=\dfrac{-56\sqrt{2}}{-112}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

8.2. Neka je x brojnik početnog razlomka. Tada je $x+3$ njegov nazivnik, a $\frac{x}{x+3}$ početni razlomak. Nakon povećanja brojnika i nazivnika dobivamo novi razlomak $\frac{x+2}{3(x+3)}$. Zato vrijedi jednakost

$$\frac{x}{x+3} + \frac{x+2}{3(x+3)} = 1.$$

Nakon proširivanja prvog razlomka s 3 i zbrajanjem dobivamo nove jednakosti:

$$\frac{3x}{3(x+3)} + \frac{x+2}{3(x+3)} = 1, \qquad \frac{4x+2}{3(x+3)} = 1.$$

Razlomak ima vrijednost 1 samo ako je brojnik jednak nazivniku, pa je $4x+2 = 3(x+3)$. Rješenje ove jednadžbe je $x = 7$. Početni razlomak je $\frac{7}{10}$.

8.3. Neka su a i b duljine kateta, a c neka je duljina hipotenuze.

Tada je $c^2 - a^2 = 15^2$, odnosno $(c-a)(c+a) = 225$, tj. $(c-a)(c+a) = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$, pri čemu je $c-a < c+a$. Zato valja riješiti ove sustave jednadžbi:

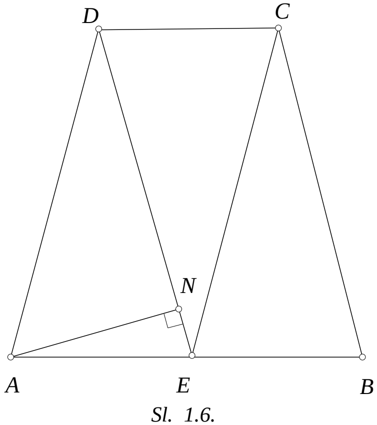
$$\begin{array}{llll} c-a=1, & c-a=3, & c-a=5, & c-a=9, \\ c+a=225; & c+a=75; & c+a=45; & c+a=25. \end{array}$$

Rješenja su:

$$\begin{array}{llll} a=112, & a=36, & a=20, & a=8, \\ c=113; & c=39; & c=25; & c=17. \end{array}$$

Ukupno ima 4 različita pravokutna trokuta s promatranim svojstvom, to su trokuti sa stranicama duljina: 15,112,113; 15,36,39; 15,20,25; 8,15,17.

8.4. Neka je E polovište dulje osnovice $\overline{AB}$. Tada je $|AE| = |EB| = |DC| = c$, pa je $EBCD$ paralelogram i $|DE| = |CB|$.



Sl. 1.6.

U jednakokračnom trokutu AED povucimo visinu $\overline{AN}$ iz vrha A na stranicu

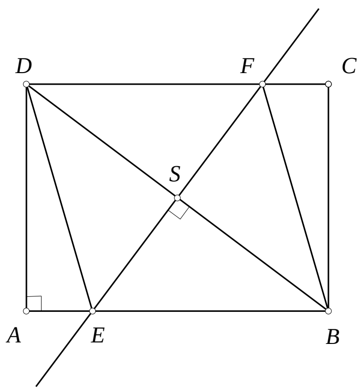
$\overline{DE}$. Kako je $\sphericalangle DAE = 75^\circ$ i trokut AED je jednakokračan, slijedi $\sphericalangle AED = 75^\circ$, pa je $\sphericalangle NAE = 90^\circ - \sphericalangle AEN = 15^\circ$ i $\sphericalangle DAN = 60^\circ$.

Trokut DAN je polovica jednakostraničnog trokuta sa stranicom $\overline{AD}$, pa je $|AN| = 9$ cm. Sada možemo izračunati površinu trokuta AED:

$$P = \frac{|ED| \cdot |AN|}{2} = \frac{18 \cdot 9}{2} = 81\text{cm}^2.$$

Trokuti AED, BEC i CDE su sukladni, pa je površina trapeza $P = 3 \cdot 81 = 243\text{cm}^2$.

8.5. Neka je $|AB| = 16$ cm, $|AD| = 12$ cm i neka je $|AE| = x$. Tada je $|BE| = |DE| = 16 - x$, jer točka E leži na simetrali dijagonale $\overline{BD}$. Najprije primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut ABD lako odredimo duljinu dijagonale $|BD|$. $|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 = 16^2 + 12^2 = 400$, $|BD| = 20$ cm.



Sl. 1.7.

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut DAE dobivamo $|DE|^2 = |AD|^2 + |AE|^2$, tj. $(16 - x)^2 = 12^2 + x^2$. Rješenje jednadžbe je $x = 3.5$ cm, pa je $|BE| = |DE| = 12.5$ cm.

Dalje možemo zaključivati na razne načine.

1. način. Neka je S polovište dijagonale $\overline{BD}$. Tada je $|DS| = |BS| = 10$ cm, ali i $|SE| = |SF|$, jer je pravokutnik centralnosimetričan lik obzirom na točku S. Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut ESD dobivamo $|SE|^2 = |DE|^2 - |SD|^2$, $|SE|^2 = 12.5^2 - 10^2$ i konačno $|SE| = 7.5$ cm. Prema tome, $|EF| = |SE| + |SF| = 2|SE| = 2 \cdot 7.5 = 15$ cm.

2. način. Četverokut $EBFD$ je romb. Dovoljno je dokazati da je $|EB| = |DF|$, a to se može na razne načine, recimo preko centralne simetrije. Kako je $EF \perp BD$, duljinu dužine $\overline{EF}$ možemo izračunati preko površine romba. Naime, $|EB| \cdot |AD| = \dfrac{|BD| \cdot |EF|}{2}$, $12.5 \cdot 12 = \dfrac{20 \cdot |EF|}{2}$, pa je $|EF| = 15$ cm.

Napomena. Zadatak se može riješiti i korištenjem sličnosti trokuta. Trokut BSE sličan je trokutu BAD jer su oba pravokutna i imaju zajednički kut pri vrhu B. Zato vrijedi:

$$|SE| : |BS| = |AD| : |BA|,$$

odakle, zbog $|BS| = \frac{1}{2}|BD| = 10$ cm, dobivamo:

$$|SE| = \frac{|AD| \cdot |BS|}{|BA|} = \frac{12 \cdot 10}{16} = \frac{15}{2}.$$

Konačno, $|EF| = 2|SE| = 15$ cm.

Srednja škola

1.1.

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} = \frac{(b-a)+(a-c)}{(a-b)(a-c)} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{c-a},$$
$$\frac{c-a}{(b-c)(b-c)} = \frac{(c-b)+(b-a)}{(b-c)(b-a)} = \frac{1}{b-c} + \frac{1}{a-b},$$
$$\frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{(a-c)+(c-b)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c}.$$

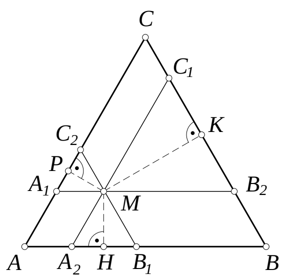
Zbrajanjem ovih jednakosti dobiva se tvrdnja zadatka.

1.2. (a) Koristeći Pitagorin poučak dobivamo

$$|AH|^2 + |BK|^2 + |CP|^2 = (|AM|^2 - |MH|^2) + (|BM|^2 - |MK|^2) + (|CM|^2 - |MP|^2), \quad \text{i}$$
$$|HB|^2 + |KC|^2 + |PA|^2 = (|BM|^2 - |MH|^2) + (|CM|^2 - |MK|^2) + (|AM|^2 - |MP|^2).$$

Očito su ova dva izraza jednaka.

(b) Povucimo kroz točku M pravce A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2, paralelno stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$.



Sl. 1.8.

Dužine $\overline{MH}$, $\overline{MK}$, $\overline{MP}$ su težišnice trokuta B_1MA_2, C_1MB_2, A_1MC_2 i

$|AA_1| = |BB_2|$, $|BB_1| = |CC_2|$, $|CC_1| = |AA_2|$, te je

$$\begin{aligned}|AH| + |BK| + |CP| &= |AA_2| + |A_2H| + |BB_2| + |B_2K| + |CC_2| + |C_2P| \\ &= |CC_1| + |HB_1| + |AA_1| + |KC_1| + |BB_1| + |PA_1| \\ &= |HB_1| + |B_1B| + |KC_1| + |C_1C| + |PA_1| + |A_1A| \\ &= |HB| + |KC| + |PA|.\end{aligned}$$

1.3. *Prvo rješenje.* Pretpostavimo suprotno tvrdnji zadatka, tj. da jednadžba ima cjelobrojno rješenje.

Desna strana jednadžbe je neparna, pa mora biti i lijeva, tj. x je neparan broj. Neka je $x = 2k - 1, \quad k \in \mathbf{Z}$. Tada iz dane jednadžbe izlazi

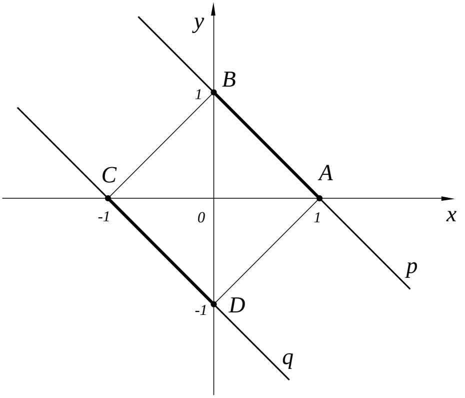
$$5 \cdot (2k-1)^2 - 4y^2 = 1999, \quad \text{tj.}$$
$$4 \cdot (5k^2 - 5k - y^2) = 1994.$$

Lijeva strana ove jednadžbe je djeljiva sa 4, a desna nije.

Kako smo došli do kontradikcije, polazna jednadžba nema cjelobrojno rješenje.

Drugo rješenje. Broj 1999 daje ostatak 3 pri dijeljenju sa 4. Izraz $4y^2$ djeljiv je sa 4 (za sve $y \in \mathbf{Z}$), pa $5x^2$ mora dati ostatak 3 pri dijeljenju sa 4. Pogledajmo koje ostatke može davati kvadrat cijelog broja pri dijeljenju sa 4. Ako je broj paran, njegov kvadrat je djeljiv s 4, a ako je neparan, njegov kvadrat daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 4. Stoga x^2 ne može davati ostatak 3, pa niti $5x^2$ ne može davati ostatak 3 pri dijeljenju sa 4. Stoga postavljena jednadžba nema cjelobrojno rješenje.

1.4. Najprije ćemo naći skup točaka za koje je $|x + y| = 1$, a zatim skup točaka za koje je $|x| + |y| = 1$. Presjek ova dva skupa će biti traženi skup točaka.



Sl. 1.9.

a) $|x+y|=1$:

1° $\quad x+y \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad x+y=1$. Zadovoljavaju točke pravca $x+y=1$.

2° $\quad x+y \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad -x-y=1$. Zadovoljavaju točke pravca $-x-y=1$.

Pod a) zadovoljavaju točke pravaca p i q . (Vidi sliku.)

b) (Vidi sliku.) $|x|+|y|=1$:

1° $\quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad x+y=1.$ Zadovoljavaju točke dužine $\overline{AB}$.

2° $\quad x \leqslant 0,\ y \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad -x+y=1.$ Zadovoljavaju točke dužine $\overline{BC}$.

3° $\quad x \leqslant 0,\ y \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad -x-y=1.$ Zadovoljavaju točke dužine $\overline{CD}$.

4° $\quad x \geqslant 0,\ y \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad x-y=1.$ Zadovoljavaju točke dužine $\overline{DA}$.

Presjek ova dva skupa točaka je $\overline{AB} \cup \overline{CD}$.

* * *

2.1. Zadanu jednadžbu napišimo u obliku

$$1999(x+y)=xy.$$

Odavde zaključujemo da je barem jedan od brojeva x , y djeljiv sa 1999 (jer je 1999 prost broj). Budući da je jednadžba simetrična, možemo uzeti da je to y , tj. $y=1999z,\quad z \in \mathbf{N}$.

Posljednja jednadžba prelazi u

$$1999(x+1999z)=1999xz, \quad \text{tj.} \quad x(z-1)=1999z.$$

Odavde je $x=\dfrac{1999z}{z-1}$, što možemo prikazati kao

$$x=\frac{1999z-1999+1999}{z-1}, \quad \text{odnosno} \quad x=1999+\frac{1999}{z-1}.$$

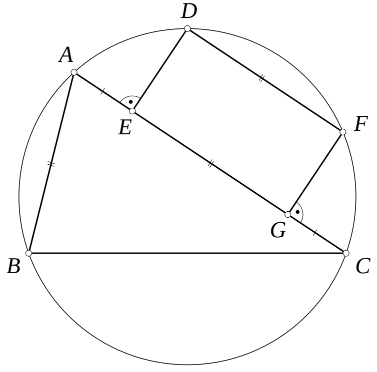
Kako je $x \in \mathbf{N}$, mora biti $z-1 \in \{1,1999\}$ (ponovo smo koristili činjenicu da je 1999 prost broj). Dalje je $z_1=2$, $z_2=2000$, odakle je $x_1=3998$, $x_2=2000$; $y_1=3998$, $y_2=3998000$. Iz toga zaključujemo da su, zbog simetričnosti, sva rješenja dane jednadžbe, $(x,y) \in \{(3998,3998),\ (2000,3998000),\ (3998000,2000)\}$.

2.2. Da, moguće je. Na primjer,

$$\begin{aligned} x^2+x-3&=0\\ -3x^2+x+1&=0\\ x^2-3x+1&=0. \end{aligned}$$

Diskriminanta svake od ovih jednadžbi je pozitivna, pa su rješenja svake od njih realna.

2.3. *Prvo rješenje.* Povucimo pravce $DF \parallel AC$, $FG \perp AC$, kao na slici.



Sl. 1.10.

Kako je

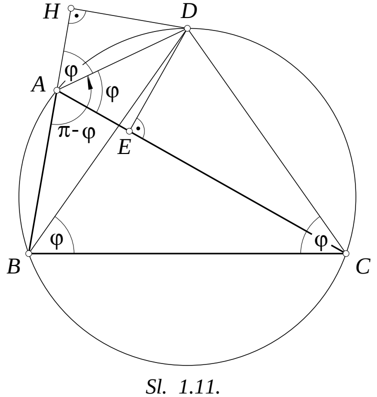
$$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC} \quad \text{i} \quad \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{FC} \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{DF},$$

odakle je $|AB| = |DF| = |EG|$.

Nadalje, $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{FC} \Rightarrow |AD| = |FC| \Rightarrow |AE| = |GC|$, odakle slijedi

$$|AB| + |AE| = |EG| + |GC| = |EC|.$$

Drugo rješenje. Neka je $DH \perp AB$, kao na slici.



Sl. 1.11.

Neka je $\varphi = \sphericalangle DBC = \sphericalangle BCD$. Zbog jednakosti obodnih kutova nad istom tetivom, je $\sphericalangle DAC = \varphi$. Kako je $ABCD$ tetivni četverokut, to je $\sphericalangle HAD = 180^\circ - \sphericalangle DAB = 180^\circ - (180^\circ - \sphericalangle BCD) = \varphi$. Odavde su trokuti ADH i

ADE sukladni ($|AD| = |AD|$, $\sphericalangle HAD = \sphericalangle EAD = \varphi$, $\sphericalangle DHA = \sphericalangle DEA = 90^\circ$), pa je $|AH| = |AE|$ i $|DH| = |DE|$.

Zbog $|DH| = |DE|$, $\sphericalangle HBD = \sphericalangle ECD$ (obodni kutevi nad istim lukom $\widehat{AD}$, $\sphericalangle DHB = \sphericalangle DEC = 90^\circ$ trokuti BDH i CDE su sukladni, pa je $|BH| = |EC|$. Sada je

$$|AB| + |AE| = |AB| + |AH| = |BH| = |EC|.$$

2.4. *Prvo rješenje.* Stavimo li $z = x + iy$, $c = a + ib$ dobivamo

$$|x + iy + a + ib| = |x + iy - a - ib|$$
$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2,$$

odnosno

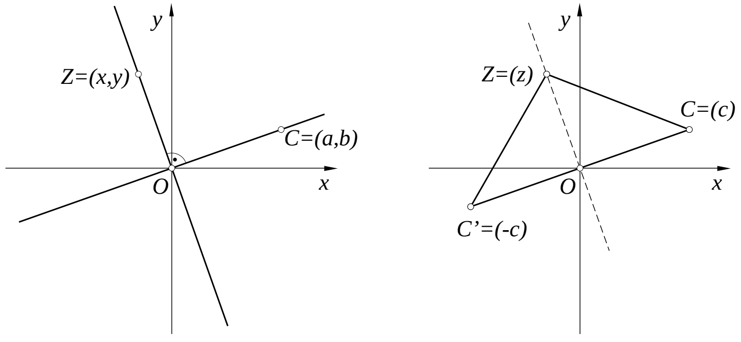
$$ax + by = 0.$$

Za $a \neq 0$ zapišimo ovu jednakost u obliku

$$\frac{y}{x} \cdot \frac{b}{a} = -1. \qquad (*)$$

Kompleksnim brojevima 0, c, z pripadaju točke O, $C(a,b)$, $Z(x,y)$, pa je $\dfrac{b}{a}$ koeficijent smjera pravca OC, a $\dfrac{y}{x}$ je koeficijent smjera pravca OZ. Iz jednakosti $(*)$ slijedi da točke z moraju biti na pravcu kroz ishodište koji je okomit na pravac OC.

Za $a = 0$, $b \neq 0$, očito je $y = 0$, pa je $z \in \mathbf{R}$.



Sl. 1.12.

Drugo rješenje. Uz točku $C = (c)$ promatrajmo točku $C' = (-c)$. Tada uvjet $|z + c| = |z - c|$ znači $|C'Z| = |CZ|$, što znači da je točka $Z = (z)$ na simetrali dužine $\overline{CC'}$.

* * *

3.1. Jednadžba ima smisla za $x > 0$, $x \neq 1$, $1 - x \geqslant 0$. Dakle, $x \in (0, 1)$. Stoga je $\log_x 1999^{\sqrt{1-x}} < 0$, pa imamo:

$$\log_{\frac{1}{3}}(4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x}) = -1,$$

$$4^{2\cos^2 x - 1} + 4^{\cos^2 x} = 3.$$

Nakon množenja s 4, uz supstituciju $t = 4^{\cos^2 x}$, dobivamo $t^2 + 4t - 12 = 0$. Zbog $t > 0$, jedino rješenje je $t = 2$.

Dalje imamo $4^{\cos^2 x} = 2$, $\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}$. Zbog uvjeta jedino rješenje je $x = \frac{\pi}{4}$.

3.2. *Prvo rješenje.* Kvadriranjem dobivamo

$$x^2 + 2 + x^{-2} = 4\cos^2 40^\circ,$$

odnosno

$$x^2 + x^{-2} = 4\cos^2 40^\circ - 2 = 2(2\cos^2 40^\circ - 1) = 2\cos 80^\circ.$$

Ponovimo li još jednom isti postupak dobit ćemo

$$x^4 + x^{-4} = 4\cos^2 80^\circ - 2 = 2\cos 160^\circ.$$

Drugo rješenje. Množenjem dane jednakosti sa x dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2 - 2x\cos 40^\circ + 1 = 0$, čija su rješenja

$$x_{1,2} = \cos 40^\circ \pm \sqrt{\cos^2 40^\circ - 1} = \cos 40^\circ \pm i \sin 40^\circ.$$

Računamo:

$$x^2 = \cos^2 40^\circ - \sin^2 40^\circ \pm 2i\cos 40^\circ \sin 40^\circ = \cos 80^\circ \pm i\sin 80^\circ.$$

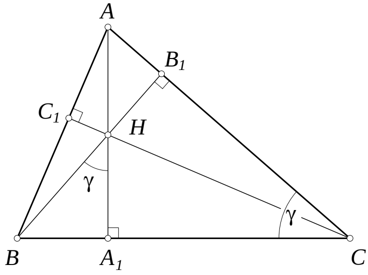
Ponovnim kvadriranjem dobivamo $x^4 = \cos 160^\circ \pm i\sin 160^\circ$. Sada je

$$x^{-4} = \frac{1}{\cos 160^\circ \pm i\sin 160^\circ} \cdot \frac{\cos 160^\circ \mp i\sin 160^\circ}{\cos 160^\circ \mp i\sin 160^\circ} = \cos 160^\circ \mp i\sin 160^\circ.$$

Konačno,

$$x^4 + x^{-4} = (\cos 160^\circ \pm i\sin 160^\circ) + (\cos 160^\circ \mp i\sin 160^\circ) = 2\cos 160^\circ.$$

3.3. Sve ćemo potrebne veličine izraziti pomoću kutova i duljine stranice c. (Moguće je i pomoću a ili b ili pomoću polumjera opisane kružnice R.) Koristit ćemo oznake kao na slici 1.13.



Sl. 1.13.

Iz $\triangle AA_1B$ imamo $|AA_1| = c\sin\beta$, $|BA_1| = c\cos\beta$.

Iz $\triangle BHA_1$, zbog $\sphericalangle BHA_1 = \gamma$, je $|HA_1| = |BA_1|\operatorname{ctg}\gamma = c\cos\beta\operatorname{ctg}\gamma$. Sada možemo nastaviti na dva načina:

Prvi način. Slično, iz $\triangle AB_1B$ je $|AB_1| = c\cos\alpha$, a iz $\triangle AHB_1$, zbog $\sphericalangle AHB_1 = \gamma$, $|AH| = \dfrac{|AB_1|}{\sin\gamma} = \dfrac{c\cos\alpha}{\sin\gamma}$. Dakle,

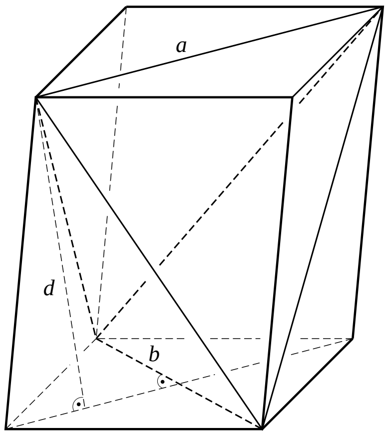
$$\frac{|AH|}{|HA_1|} = \frac{c\cos\alpha}{\sin\gamma}\cdot\frac{1}{c\cos\beta\operatorname{ctg}\gamma} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}.$$

Drugi način. $|AH| = |AA_1| - |HA_1| = c(\sin\beta - \cos\beta\operatorname{ctg}\gamma)$ pa je

$$\begin{aligned}\frac{|AH|}{|HA_1|} &= \frac{\sin\beta - \cos\beta\operatorname{ctg}\gamma}{\cos\beta\operatorname{ctg}\gamma} = \frac{\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}\\ &= \frac{-\cos(\beta+\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma} = \frac{\cos(\pi-\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}.\end{aligned}$$

3.4. Uložimo piramidu u prizmu kao na slici 1.14. Osnovica ove prizme je četverokut s okomitim dijagonalama duljina a i b, a duljina visine je d, pa je njezin volumen $V_1 = \dfrac{1}{2}abd$.

Traženi volumen piramide dobivamo oduzimanjem volumena četiri trostrane piramide. Volumen svake od njih iznosi $V_2 = \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2}\dfrac{ab}{2})\cdot d = \dfrac{1}{12}abd$. Traženi volumen je $V = V_1 - 4V_2 = \dfrac{1}{6}abd$.



Sl. 1.14.

* * *

4.1. Nađimo najprije duljinu zajedničke tetive. Oduzimanjem jednadžbi ovih kružnica dobivamo

$$x - 8y - 4 = 0, \quad \text{tj.} \quad x = 8y + 4.$$

Uvrštavanjem u jednadžbu druge kružnice, nakon sređivanja, dobivamo jednadžbu

$$65y^2 + 44y + 4 = 0,$$

čija su rješenja

$$y_1 = \frac{-22 - 4\sqrt{14}}{65}, \quad y_2 = \frac{-22 + 4\sqrt{14}}{65},$$

pa slijedi

$$x_1 = \frac{84 - 32\sqrt{14}}{65}, \quad x_2 = \frac{84 + 32\sqrt{14}}{65}.$$

Za duljinu zajedničke tetive $\overline{AB}$ dobivamo $d = 8\sqrt{\dfrac{14}{65}}$.

Opći oblik jednadžbe tangente je $y = kx + l$. Ovaj pravac je tangenta kružnice

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2,$$

ako je

$$r^2(1 + k^2) = (q - kp - l)^2.$$

Primijenimo ovo na dane kružnice, napisane u obliku

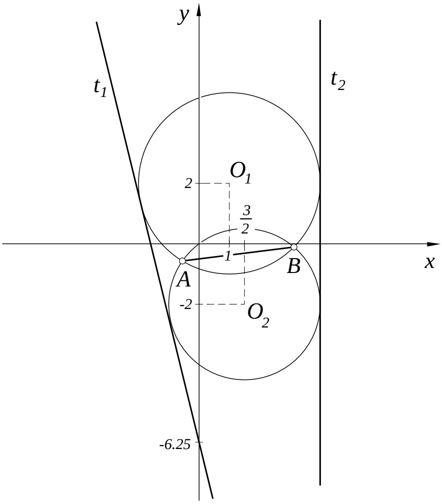
$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9 \quad \text{i} \quad (x - \frac{3}{2})^2 + (y + 2)^2 = \frac{25}{4}.$$

Iz

$$9(1+k^2)=(2-k-l)^2 \ \text{ i } \ \frac{25}{4}(1+k^2)=(-2-\frac{3}{2}k-l)^2, \qquad (1)$$

dijeljenjem i vađenjem drugog korijena, dobivamo

$$5(2-k-l)=\pm 6(2+\frac{3}{2}k+l).$$



Sl. 1.15.

Dobivamo dvije vrijednosti za koeficijent l, $l_1=\dfrac{-14k-2}{11}$ i $l_2=-4k-22$. Uvrštavanjem prve vrijednosti u jednu od jednadžbi (1) dobivamo kvadratnu jednadžbu po k koja nema realno rješenje.

Uvrštavanjem druge vrijednosti u jednu od jednadžbi (1) dobivamo $k=-\dfrac{63}{16}$ pa je $l=-\dfrac{25}{4}$. Jednadžba jedne zajedničke tangente je $y=-\dfrac{63}{16}x-\dfrac{25}{4}$.

Znamo da dvije kružnice koje se sijeku imaju dvije zajedničke tangente. Druga tangenta, dakle, nije oblika $y=ax+b$, već $x=$konst. Očito je (vidi sliku 1.15.), to pravac $x=4$. Taj pravac dira prvu kružnicu u točki $(4,2)$, a drugu u točki $(4,-2)$. Udaljenost između dirališta je 4.

4.2. (a)

$$\begin{aligned} n^4+4 &= n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2 \\ &= (n^2-2n+2)(n^2+2n+2)=((n-1)^2+1)((n+1)^2+1). \end{aligned}$$

(b) U izrazu na lijevoj strani pomnožimo svaku zagradu s 2^4 (sama vrijednost izraza se time ne mijenja):

$$\frac{(2^4+4)(6^4+4)(10^4+4)\cdots(22^4+4)}{(4^4+4)(8^4+4)(12^4+4)\cdots(24^4+4)}.$$

Sada na svaku zagradu primijenimo rezultat iz (a):

$$\frac{(1^2+1)(3^2+1)(5^2+1)(7^2+1)(9^2+1)(11^2+1)\cdots(21^2+1)(23^2+1)}{(3^2+1)(5^2+1)(7^2+1)(9^2+1)(11^2+1)(13^2+1)\cdots(23^2+1)(25^2+1)}.$$

Nakon skraćivanja ostaje konačno $\dfrac{1^2+1}{25^2+1}=\dfrac{1}{313}$.

4.3. Uz dani uvjet nejednakost je redom ekvivalentna sa

$$\log(a^b b^c c^d d^a)-\log(b^a c^b d^c a^d)\geqslant 0,$$

$$b\log a+c\log b+d\log c+a\log d-a\log b-b\log c-c\log d-d\log a\geqslant 0,$$

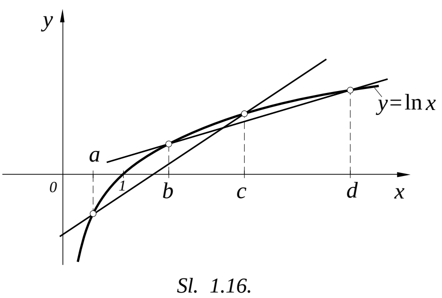
$$b(\log a-\log c)+c(\log b-\log d)+d(\log c-\log a)+a(\log d-\log b)\geqslant 0,$$

$$(d-b)(\log c-\log a)-(c-a)(\log d-\log b)\geqslant 0,$$

$$\frac{\log c-\log a}{c-a}\geqslant\frac{\log d-\log b}{d-b}$$

Lijeva i desna strana posljednje nejednakosti su koeficijenti smjerova pravaca kroz točke $(a,\log a)$ i $(c,\log c)$; odnosno $(b,\log b)$ i $(d,\log d)$.

Zbog $0<a<b<c<d$ posljednja nejednakost je istinita jer prvi pravac ima veći koeficijent smjera (vidi sliku).



Sl. 1.16.

4.4. Najprije odredimo nekoliko prvih članova niza.

$$\begin{aligned}
a_1&=1&&=2\cdot\frac{1}{2},\\
a_2&=3&&=3\cdot 1,\\
a_3&=8&&=4\cdot 2,\\
a_4&=20&&=5\cdot 4,\\
a_5&=48&&=6\cdot 8,
\end{aligned}$$

Primijetimo da svi ovi članovi zadovoljavaju formulu:

$$a_n = (n+1) \cdot 2^{n-2}. \qquad (*)$$

Dokažimo da je to opća formula ovog niza.

Koristimo metodu matematičke indukcije.

Baza: za $n = 1$, $a_1 = (1+1) \cdot 2^{1-2} = 1$.

Pretpostavimo da formula $(*)$ vrijedi za sve $k = 1, \ldots, n$. Treba dokazati da je $a_{n+1} = (n+2) \cdot 2^{n-1}$.

Vrijedi $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = \dfrac{n-1}{n+1} a_n$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{n+2}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) \\ &= \frac{n+2}{n} \cdot \frac{n-1}{n+1} a_n + \frac{n+2}{n} a_n \\ &= \frac{2(n+2)}{n+1} a_n. \end{aligned}$$

Sada iz pretpostavke slijedi $a_{n+1} = \dfrac{2(n+2)}{n+1} \cdot (n+1) \cdot 2^{n-2} = (n+2) \cdot 2^{n-1}$, što je i trebalo dokazati.

Dakle, $a_{1999} = 2000 \cdot 2^{1997}$.