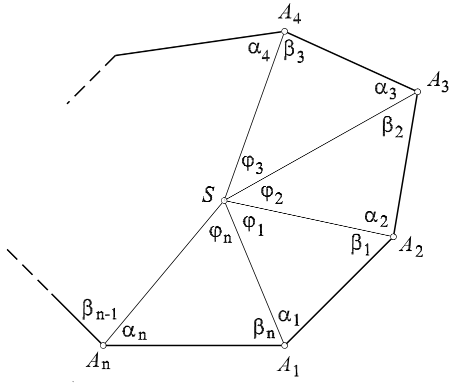
1. Poučak o zbroju unutarnjih kutova višekuta

Zbroj unutarnjih kutova višekuta s n *stranica jednak je* $(n-2)\cdot 180^\circ$*,* $n \in \mathbf{N}$*,* $n \geqslant 3$*.*

$\boxed{\textit{Dokaz 1.}}$ Neka je S bilo koja točka unutar (konveksna) višekuta $A_1A_2A_3\ldots A_n$. Uz oznake kao na slici 1., zbroj unutarnjih kutova višekuta jednak je:

$$\sum = \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \ldots + \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} + \alpha_n + \beta_n.$$



Sl. 1.

Također je $\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{n-1} + \varphi_n = 360^\circ$. Vrijedi:

$$\alpha_1 + \beta_1 = 180^\circ - \varphi_1$$
$$\alpha_2 + \beta_2 = 180^\circ - \varphi_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_n + \beta_n = 180^\circ - \varphi_n.$$

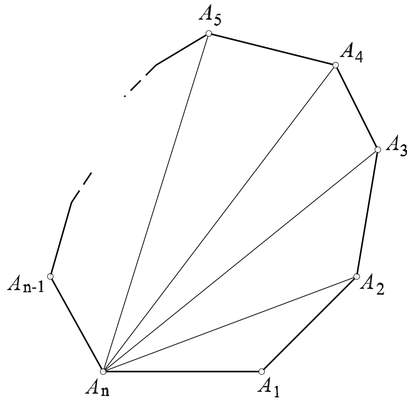
Zbrajanjem dobijemo:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \ldots + \alpha_n + \beta_n = n \cdot 180^\circ - 360^\circ = (n-2)\cdot 180^\circ,$$

odnosno

$$\sum = (n-2)180^\circ.$$

$\boxed{\textit{Dokaz 2.}}$ Dijagonale povučene iz jednog vrha višekuta dijele taj višekut na $n-2$ trokuta.



Sl. 2.

Očito je zbroj $(\sum)$ unutarnjih kutova višekuta jednak zbroju unutarnjih kutova svih trokuta. Zato je

$$\sum = (n-2) \cdot 180^\circ.$$

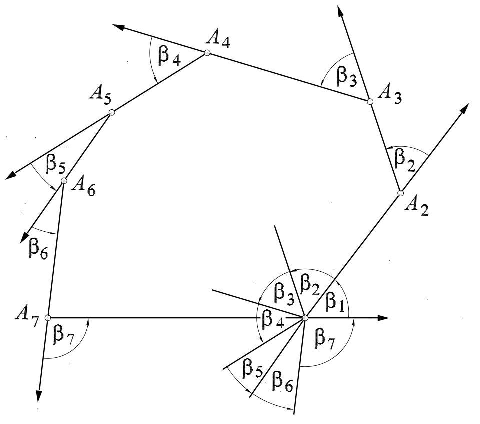
2. Poučak o zbroju vanjskih kutova višekuta

Zbroj vanjskih kutova konveksna višekuta s n *stranica* $(n \in \mathbf{N})$ *jednak je* 360°*, tj. ne zavisi o broju stranica višekuta.*

$\boxed{\textit{Dokaz 1.}}$ Vanjski kut, po definiciji je sukut unutarnjeg kuta višekuta. Označimo li s α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ unutarnje, a s β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_n$ vanjske kutove višekuta, imamo: $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = (180^\circ - \alpha_1) + (180^\circ - \alpha_2) + \ldots + (180^\circ - \alpha_n) = n \cdot 180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$.

Kako je $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = (n-2) \cdot 180^\circ$ (vidi poučak 1.) to je $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = n \cdot 180^\circ - (n-2) \cdot 180^\circ$, tj. $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = 360^\circ$.

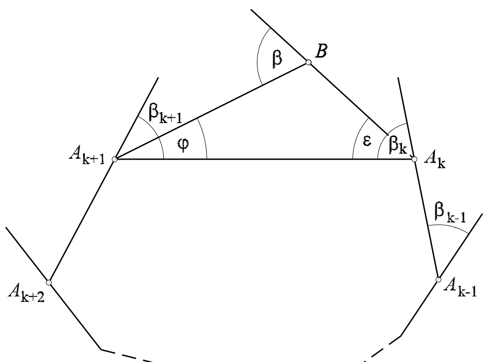
$\boxed{\textit{Dokaz 2.}}$ Iz svakoga vrha višekuta povucimo jedan polupravac koji jednu stranicu višekuta nadopunjuje na pravac, tako da su vanjski kutovi višekuta jednako orijentirani. Sada te polupravce usporednim pomakom dovedimo u jedan vrh višekuta. (To je na sl. 3. učinjeno za $n = 7$ i vrh A_1.)



Sl. 3.

Kako konveksan višekut može imati najviše jednu stranicu usporednu s bilo kojom od inih, to se lako vidi da je $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = 360^\circ$.

$\boxed{\textit{Dokaz 3.}}$ Neka je $A_1A_2\ldots A_n$ višekut s n stranica u kojem je zbroj vanjskih kutova jednak $S_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$. Neka je B bilo koja točka izvan promatrana višekuta uzeta tako da je $A_1A_2\ldots A_kBA_{k+1}\ldots A_n$ višekut s $n+1$ stranicom, također konveksan.



Sl. 4.

Uz oznake kao na slici, zbroj vanjskih kutova toga višekuta je $S_{n+1} = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + (\beta_k - \varepsilon) + \beta + (\beta_{k+1} - \varphi) + \ldots + \beta_n$, ili $S_{n+1} = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n + \beta - (\varepsilon + \varphi)$. Kut β je vanjski kut trokuta

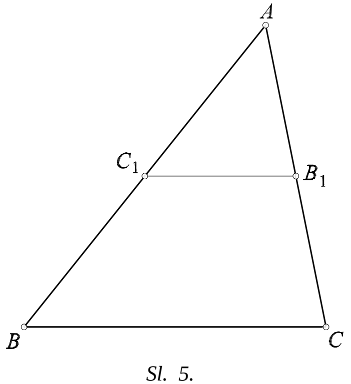
A_kBA_{k+1} pa je $\beta = \varepsilon + \varphi$. Zbog toga je $S_{n+1} = S_n$. Lako se pokaže da je za $n = 3$, tj. za trokut $S_3 = 360^\circ$. Temeljem principa matematičke indukcije zaključujemo da je $S_n = 360^\circ$, za svaki $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 3$.

3. Poučak o srednjici trokuta

Spojnica polovišta dviju stranica trokuta zove se srednjica trokuta.

Srednjica trokuta usporedna je s trećom stranicom, a njena duljina jednaka je polovici duljine te stranice.

Dokaz 1. Označimo li polovišta stranica $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC s B_1, odnosno C_1, treba dokazati da je $\overline{C_1B_1} \parallel \overline{BC}$ i $|C_1B_1| = \frac{1}{2}|BC|$.



Sl. 5.

Kako je $|AC_1| = \frac{1}{2}|AB|$ i $|AB_1| = \frac{1}{2}|AC|$, to su trokuti ABC i AC_1B_1 homotetični sa središtem homotetije u točki A i koeficijentom $\frac{1}{2}$. Zato je $\overline{C_1B_1}\|\overline{BC}$ i $|C_1B_1| = \frac{1}{2}|BC|$.

$\boxed{\textit{Dokaz 2.}}$ $\overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{AB_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Iz $\overrightarrow{C_1B_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, zaključujemo da je $\overline{C_1B_1} \parallel \overline{BC}$ i $|C_1B_1| = \frac{1}{2}|BC|$.

$\boxed{\textit{Dokaz 3.}}$ Kako je $|AB_1| = \frac{1}{2}|AC|$, $|AC_1| = \frac{1}{2}|AB|$ i $\sphericalangle B_1AC_1 = \sphericalangle CAB$, to su trokuti AC_1B_1 i ABC sukladni. Zato je $\sphericalangle AC_1B_1 = \sphericalangle ABC$, što je dovoljno da je $\overline{C_1B_1} \parallel \overline{BC}$. Zbog sličnosti vrijedi:

$$|C_1B_1| : |AC_1| = |BC| : |AB|$$

ili

$$|C_1B_1| = \frac{|AC_1|}{|AB|} \cdot |BC| = \frac{1}{2}|BC|.$$

$\boxed{\textit{Dokaz 4.}}$ Postavimo pravokutni koordinatni sustav s ishodištem u vrhu A. Koordinate vrhova su $A(0,0)$, $B(x_1,y_1)$, $C(x_2,y_2)$. Koordinate polovišta stranica $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ su $B_1\left(\frac{x_2}{2},\frac{y_2}{2}\right)$, $C_1\left(\frac{x_1}{2},\frac{y_1}{2}\right)$. Za koeficijente smjera vrijedi: $k_{C_1B_1} = \dfrac{\frac{y_1}{2} - \frac{y_2}{2}}{\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = k_{BC}$, odakle zaključujemo da je $\overline{C_1B_1} \parallel \overline{BC}$. Dalje je

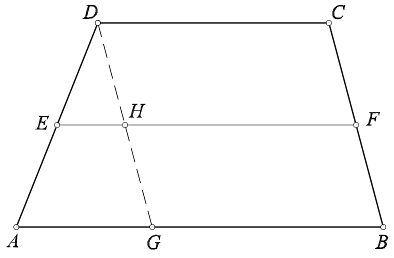
$$\begin{aligned}|C_1B_1| &= \sqrt{(\frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2})^2 + (\frac{y_2}{2} - \frac{y_1}{2})^2}\\ &= \sqrt{\frac{1}{4}(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{4}(y_2 - y_1)^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\\ &= \frac{1}{2}|BC|.\end{aligned}$$

4. Poučak o srednjici trapeza

Spojnica polovišta krakova trapeza zove se srednjica trapeza.

Srednjica trapeza usporedna je s njegovim osnovicama, a duljina srednjice jednaka je polovici zbroja duljina osnovica.

$\boxed{\textit{Dokaz 1.}}$ Ako je trapez paralelogram, poučak se jednostavno dokazuje. Zato ćemo, u svim dokazima, promatrati opći trapez.



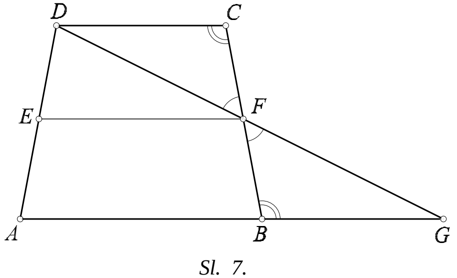
Sl. 6.

Ako su u trapezu $ABCD$ točke E i F polovišta krakova $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ treba dokazati:

$$\overline{EF} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC} \quad \text{i } |EF| = \frac{1}{2}(|AB| + |DC|)$$

Neka je G točka na stranici $\overline{AB}$ tako da je $\overline{DG} \parallel \overline{CB}$. Sjecište dužina $\overline{EF}$ i $\overline{DG}$ označimo sa H. Četverokut $GBCD$ je paralelogram pa je H polovište dužine $\overline{DG}$. Dužina $\overline{EH}$ je srednjica trokuta AGD pa je $|EH| = \frac{1}{2}|AG|$ i $\overline{EH} \parallel \overline{AG}$, zbog čega je $\overline{EF} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$. Kako je $|HF| = |GB| = |DC| = \frac{1}{2}(|GB| + |DC|)$, to je $|EF| = |EH| + |HF| = \frac{1}{2}|AG| + \frac{1}{2}(|GB| + |DC|) = \frac{1}{2}[|AG| + |GB| + |DC|] = \frac{1}{2}(|AB| + |DC|)$.

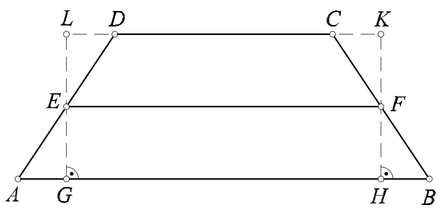
$\boxed{\textit{Dokaz 2.}}$



Sl. 7.

Produžimo osnovicu $\overline{AB}$ trapeza $ABCD$ preko vrha B do točke G tako da je $|BG| = |DC|$. Lako se vidi da su trokuti BGF i CDF sukladni, zbog čega je $|CF| = |FB|$ i $|DF| = |FG|$. Srednjica trapeza $\overline{EF}$ ujedno je i srednjica trokuta AGD. Zato je $\overline{EF} \parallel \overline{AG}$, tj. $\overline{EF} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$ i $|EF| = \frac{1}{2}|AG| = \frac{1}{2}(|AB| + |BG|) = \frac{1}{2}(|AB| + |DC|)$.

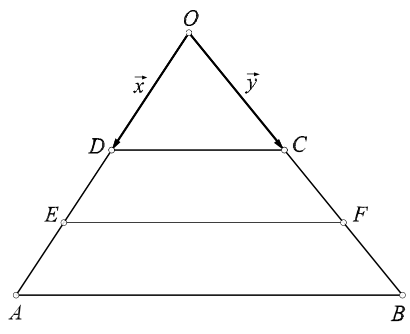
$\boxed{\textit{Dokaz 3.}}$ Neka je EF srednjica trapeza $ABCD$. Projekcije točaka E i F na pravce AB i DC su G i H, odnosno L i K. Trokuti AGE i DLE kao i BHC i CKF su, u parovima, sukladni. Zato je $|AG| = |LD|$ i $|BH| = |CK|$. Također je $2|EF| = |GH| + |LK| = |GH| + |LD| + |DC| + |CK| = |AG| + |GH| + |HB| + |DC| = |AB| + |DC|$, odakle je $|EF| = \frac{1}{2}(|AB| + |DC|)$.



Sl. 8.

Lako se pokaže da su pravokutnici $EGHF$ i $LEFK$ sukladni, zbog čega je $\overline{EF} \parallel \overline{DC} \parallel \overline{AB}$.

$\boxed{\textit{Dokaz 4.}}$ Neka se pravci krakova $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ trapeza $ABCD$ sijeku u točki O. Označimo $\overrightarrow{OD} = \vec{x}$, $\overrightarrow{OE} = \vec{y}$.



Sl. 9.

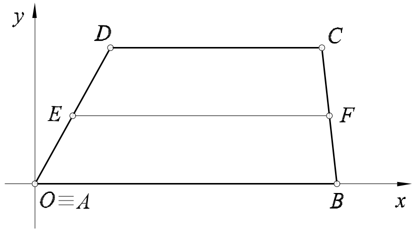
Ako su E i F polovišta krakova $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, tada postoji $\alpha \in \mathbf{R}$, tako da je $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EA} = \alpha\vec{x}$ i $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FB} = \alpha\vec{y}$. Dalje je $\overrightarrow{OE} = \vec{x} + \alpha\vec{x} =$

$(1+\alpha)\vec{x}$, $\overrightarrow{OA} = (1+2\alpha)\vec{x}$; $\overrightarrow{OF} = (1+\alpha)\vec{y}$, $\overrightarrow{OB} = (1+2\alpha)\vec{y}$.

Također je $\overrightarrow{DC} = -\vec{x}+\vec{y}$, $\overrightarrow{AB} = -(1+2\alpha)\vec{x}+(1+2\alpha)\vec{y}$, odakle je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = -2(1+\alpha)\vec{x}+2(1+\alpha)\vec{y} = 2\overrightarrow{EF}$, tj. $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$, odakle zaključujemo kao što tvrdi poučak.

$\boxed{\textit{Dokaz 5.}}$ Vrijedi: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$. Zbrajanjem dobijemo: $2\overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CF})$. Kako je $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$, to je $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$, što je tvrdnja poučka napisana u vektorskom obliku.

$\boxed{\textit{Dokaz 6.}}$ Postavimo koordinatni sustav kao na slici 10. Koordinate vrhova trapeza su $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(q,r)$, $D(p,r)$; a, p, q, $r \in \mathbf{R}^+$, $q > p$.



Sl. 10.

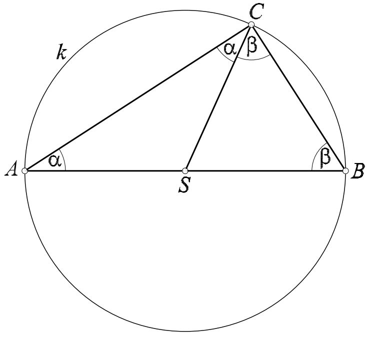
Koordinate polovišta krakova su $E(\frac{p}{2}, \frac{r}{2})$, $F(\frac{q+a}{2}, \frac{r}{2})$. Koeficijent smjera pravca EF je $k_{EF} = \dfrac{\frac{r}{2} - \frac{r}{2}}{\frac{q+a}{2} - \frac{p}{2}} = 0 = k_{AB} = k_{DC}$ odakle zaključujemo da je $\overline{EF} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

$$\begin{aligned}
|AB| &= a,\\
|DC| &= \sqrt{(q-p)^2 + (r-r)^2} = q-p,\\
|EF| &= \sqrt{\left(\frac{q+a}{2} - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2} - \frac{r}{2}\right)^2}\\
&= \frac{1}{2}(a+q-p) = \frac{1}{2}(|AB| + |DC|).
\end{aligned}$$

5. Talesov poučak

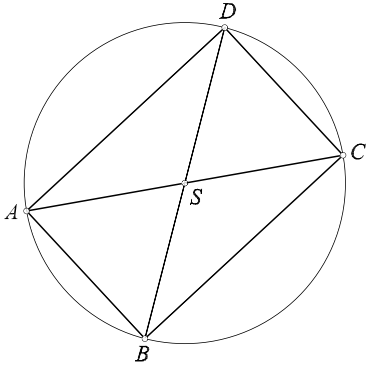
Obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.

$\boxed{\textit{Dokaz 1.}}$ Neka je $\overline{AB}$ promjer, a C bilo koja točka kružnice $k(S,r)$, $(C \neq A, C \neq B)$. Treba dokazati da je $\sphericalangle BCA = 90^\circ$. Trokut ASC je jednakokračan, jer je $|SA| = |SC| = r$. Zato je $\sphericalangle SAC = \sphericalangle SCA = \alpha$. Iz istoga razloga je $\sphericalangle SBC = \sphericalangle SCB = \beta$. Sada je dovoljno dokazati da je $\alpha + \beta = 90^\circ$. Zbroj kutova u trokutu ABC je: $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ$, a odatle $\alpha + \beta = 90^\circ$, tj. $\sphericalangle BCA = 90^\circ$.



Sl. 11.

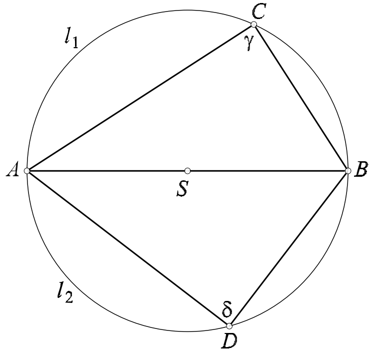
$\boxed{\textit{Dokaz 2.}}$ Neka su $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ bilo koja dva promjera kružnice $k(S,r)$. U četverokutu $ABCD$ dijagonale se raspolavljaju, jer je $|SA| = |SC| = r$ i $|SB| = |SD| = r$, pa je taj četverokut paralelogram.



Sl. 12.

Taj paralelogram ima duljine dijagonala jednake (jer je $|AC| = |BD| = 2r$), pa je taj paralelogram pravokutnik. Zato je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ADC = \sphericalangle DCB = \sphericalangle CBA = 90^\circ$.

$\boxed{\textit{Dokaz 3.}}$ Promjer $\overline{AB}$ kružnice $k(S, r)$ dijeli kružnicu na dva luka (polukružnice) l_1, l_2. Očito su duljine tih lukova jednake, tj. $l_1 = l_2$. Na lukovima l_1 i l_2 uzmimo bilo koje dvije točke C i D (različite od A i B).



Sl. 13.

Kutovi $BCA = \gamma$ i $ADB = \delta$ su obodni kutovi nad lukovima l_2 odnosno l_1. Budući je $l_1 = l_2$, to je $\delta = \gamma$. Četverokut $ADBC$ je tetivan, zbog čega je $\gamma + \delta = 180^\circ$, tj. $\gamma = \delta = 90^\circ$.

$\boxed{\textit{Dokaz 4.}}$ Uz oznake kao na slici 11., očito vrijedi: $|\overrightarrow{SA}| = |\overrightarrow{SB}| = |\overrightarrow{SC}| = r$. Također je $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CS} - \overrightarrow{SA}$, a odatle:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= (\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SA}) \cdot (\overrightarrow{CS} - \overrightarrow{SA}) \\ &= \overrightarrow{CS}^2 - \overrightarrow{SA}^2 = |CS|^2 - |SA|^2 \\ &= r^2 - r^2 = 0. \end{aligned}$$

Iz $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ $(|\overrightarrow{CA}| \neq 0, |\overrightarrow{CB}| \neq 0)$ zaključujemo da je $\overline{CA} \perp \overline{CB}$.

$\boxed{\textit{Dokaz 5.}}$ Ako na paralelogram $ABCD$ iz dokaza 2. primijenimo Eulerov poučak dobijemo (vidi poučak 11.): $2(|AB|^2 + |BC|^2) = |AC|^2 + |BD|^2 = 2|AC|^2$, tj. $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$. Vidimo da za trokut ABC vrijedi Pitagorin poučak, pa je taj trokut pravokutan, s pravim kutom ABC.

63. Poučak o kosinusima kutova trobrida

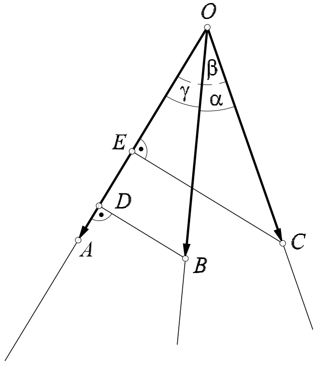
Ako su α, β, γ plošni kutovi trobrida, a α_1, β_1, γ nasuprotni kutovi pripadnih diedara, tada vrijedi:

$$\cos\alpha_1 = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$\cos\beta_1 = \frac{\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\beta},$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

$\boxed{\textit{Dokaz 1.}}$ Na bridovima trobrida s vrhom u O odredimo točke A, B i C tako da su vektori $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}$ jedinični. Neka su D i E nožišta okomica iz B i C spuštenih na polupravac OA, tada je, po definiciji kuta diedra, $\alpha_1 = \sphericalangle(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{EC})$ (vidi sl. 123.).



Sl. 123.

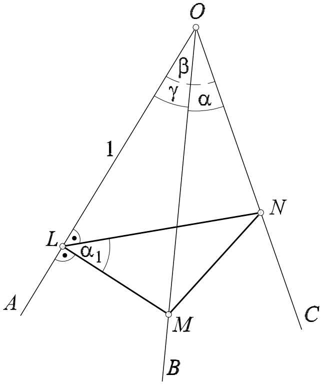
Vrijedi: $\overrightarrow{OE} = \vec{e}_1 \cdot \cos\beta$, $\overrightarrow{OD} = \vec{e}_1 \cdot \cos\gamma$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EC}$. Kako je $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \cos\alpha$, to je $\cos\alpha = (\vec{e}_1\cos\gamma + \overrightarrow{DB}) \cdot (\vec{e}_1\cos\beta + \overrightarrow{EC})$, ili $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{EC}$, jer je $\vec{e}_1^{\,2} = 1$, $\overrightarrow{DB} \cdot \vec{e}_1 = \overrightarrow{EC} \cdot \vec{e}_1 = 0$. Zbog $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{EC} = |DB| \cdot |EC| \cdot \cos\sphericalangle(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{EC}) = \sin\gamma\sin\beta\cos\alpha_1$, vrijedi $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha_1$, ili $\cos\alpha_1 = \dfrac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$, što je tvrdnja poučka.

$\boxed{\textit{Dokaz 2.}}$ Vrijedi (uz oznake kao u dokazu 1.): $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DO} + \vec{e}_2$, $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EO} + \vec{e}_3$. Kako je $\overrightarrow{DO} \cdot \vec{e}_3 = |\overrightarrow{DO}| \cdot |\vec{e}_3| \cdot (-\cos\beta) = -\cos\gamma\cos\beta$, $\overrightarrow{EO} \cdot \vec{e}_2 = -\cos\beta\cos\gamma$, to je $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{EC} = \cos\gamma\cos\beta - \cos\beta\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha$.

Konačno, zbog $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{EC} = \sin\gamma\sin\beta\cos\alpha_1$,

$$\cos\alpha_1 = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

$\boxed{\textit{Dokaz 3.}}$ Skalarnim kvadriranjem jednakosti $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC}$, dobijemo $|BC|^2 = |BD|^2 + |DE|^2 + |EC|^2 + 2\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{EC}$, jer je $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{EC} = 0$. Kako je $|BC|^2 = 2 - 2\cos\alpha$, $|BD|^2 = \sin^2\gamma$, $|DE|^2 = (|OD| - |OE|)^2 = (\cos\beta - \cos\gamma)^2$, $|EC|^2 = \sin^2\beta$, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{EC} = \sin\gamma\sin\beta\cos\alpha_1$, to je $2 - 2\cos\alpha = \sin^2\gamma + (\cos\beta - \cos\gamma)^2 + \sin^2\beta - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha_1$, $2 - 2\cos\alpha = \sin^2\gamma + \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\gamma + \sin^2\beta - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha_1$, odakle je $\cos\alpha_1 = \dfrac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$.



Sl. 124.

$\boxed{\textit{Dokaz 4.}}$ Promatrajmo trobrid što ga određuju polupravci OA, OB, OC. Na polupravcu OA odredimo točku L tako da je $|OL| = 1$. Ravnina točkom L, okomita na OA, siječe polupravce OB i OC u točkama M, odnosno N, vidi sl. 124. Po poučku o kosinusima vrijedi: $|MN|^2 = |ML|^2 + |NL|^2 - 2|ML| \cdot |NL|\cos\alpha_1$, $|MN|^2 = |OM|^2 + |ON|^2 - 2|OM| \cdot |ON|\cos\alpha$. Oduzimanjem ovih jednakosti dobijemo

$|OM|^2-|ML|^2+|ON|^2-|NL|^2+2|ML|\cdot|NL|\cos\alpha_1-2|OM|\cdot|ON|\cos\alpha=0$. Kako je $|OM|^2-|ML|^2=1$ i $|ON|^2-|NL|^2=1^2=1$, to je $1+|ML|\cdot|NL|\cos\alpha_1-|OM|\cdot|ON|\cos\alpha=0$, ili $\frac{1}{|OM|}\cdot\frac{1}{|ON|}+\frac{|ML|}{|OM|}\cdot\frac{|NL|}{|ON|}\cos\alpha_1-\cos\alpha=0$, $\cos\gamma\cdot\cos\beta+\sin\gamma\cdot\sin\beta\cos\alpha_1-\cos\alpha=0$, odakle je $\cos\alpha_1=\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$.

64. Poučak o zbroju početnih n članova aritmetičkog niza

Za zbroj početnih n članova aritmetičkog niza vrijedi:

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n),\qquad n\in\mathbf{N}.$$

$\boxed{\textit{Dokaz 1.}}$ Koristit ćemo ovu osobitost članova aritmetičkog niza: $a_{k+1}-a_k=d$ za svaki prirodan broj k, gdje je $d\in\mathbf{R}$ (ili općenitije $d\in\mathbf{C}$). Vrijedi:

$$\begin{aligned}2S_n&=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\ldots\\&\qquad+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1)\\&=(a_1+a_n)+(a_1+d+a_n-d)+(a_1+2d+a_n-2d)+\ldots\\&\qquad+(a_n-d+a_1+d)+(a_n+a_1)\\&=n(a_1+a_n),\ \text{odakle je}\\S_n&=\frac{n}{2}(a_1+a_n).\end{aligned}$$

$\boxed{\textit{Dokaz 2.}}$ $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{n}[a_1+(k-1)d]=\sum\limits_{k=1}^{n}a_1+d\sum\limits_{k=1}^{n}(k-1)=na_1+d\cdot\dfrac{(n-1)n}{2}$, $S_n=\dfrac{n}{2}[a_1+a_1+(n-1)d]=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)$.

$\boxed{\textit{Dokaz 3.}}$ (Dokaz matematičkom indukcijom) $n=1$, $S_1=\frac{1}{2}(a_1+a_1)=a_1$; $n=2$, $S_2=\frac{2}{2}(a_1+a_2)=a_1+a_2$.

Vidimo da za $n=1$ i $n=2$ postavljena tvrdnja vrijedi, zato je dovoljno dokazati: $S_k=\dfrac{k}{2}(a_1+a_k)\implies S_{k+1}=\dfrac{k+1}{2}(a_1+a_{k+1})$,

$k \in \mathbf{N}$. Vrijedi: $a_{k+1} = a_1 + kd = a_1 + k(a_{k+1} - a_k)$ odakle je $ka_k = a_1 + (k-1)a_{k+1}$. Sada je

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= S_k + a_{k+1} = \frac{k}{2}(a_1 + a_k) + a_{k+1} = \frac{ka_1}{2} + \frac{ka_k}{2} + a_{k+1} \\
&= \frac{ka_1}{2} + \frac{1}{2}[a_1 + (k-1)a_{k+1}] + a_{k+1} \\
&= \frac{ka_1}{2} + \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}(k-1+2)a_{k+1} \\
&= \frac{1}{2}(k+1)a_1 + \frac{1}{2}(k+1)a_{k+1} \quad \text{tj.} \\
S_{k+1} &= \frac{k+1}{2}(a_1 + a_{k+1}),
\end{aligned}$$

čime je dokazano da vrijedi $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, za svaki prirodan broj n.

65. Poučak o zbroju početnih n članova geometrijskog niza

Za zbroj početnih n članova geometrijskog slijeda vrijedi

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad n \in \mathbf{N},\ a_1 \neq 0,\ q \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}.$$

$\boxed{\text{Dokaz 1.}}$ Za članove geometrijskog niza vrijedi $\frac{a_{k+1}}{a_k} = q$. $S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = a_1 \cdot A$, gdje je $A = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$. Dalje je $A + q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n$, $A + q^n = 1 + q(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}) = 1 + qA$. Iz $A + q^n = 1 + qA$, imamo $A = \frac{q^n - 1}{q - 1}$, pa je $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

$\boxed{\text{Dokaz 2.}}$ $S_n = a_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n)$, $qS_n = a_1(q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n)$. Oduzimanjem ovih dviju jednakosti dobijemo: $qS_n - S_n = a_1(q^n - 1)$, odakle je $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

$\boxed{\text{Dokaz 3.}}$ $n = 1$, $S_1 = a_1 \frac{q - 1}{q - 1} = a_1$; $n = 2$, $S_2 = a_1 \frac{q^2 - 1}{q - 1} = a_1(q + 1) = a_1 + a_1 q = a_1 + a_2$. Vidimo da postavljena tvrdnja vrijedi za

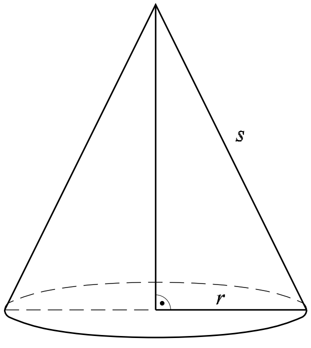
$n=1$ i $n=2$. Zato je dovoljno dokazati $S_k=a_1\dfrac{q^k-1}{q-1} \implies S_{k+1}=a_1\dfrac{q^{k+1}-1}{q-1}$, $k\in\mathbf{N}$. $S_{k+1}=S_k+a_{k+1}=a_1\dfrac{q^k-1}{q-1}+a_1q^k=a_1\left(\dfrac{q^k-1}{q-1}+q^k\right)=a_1\dfrac{q^k-1+q^{k+1}-q^k}{q-1}=a_1\dfrac{q^{k+1}-1}{q-1}$, tj. $S_{k+1}=a_1\dfrac{q^{k+1}-1}{q-1}$, čime je dokazano da postavljena tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj n.

66. Formula za ploštinu uspravnoga kružnog stošca

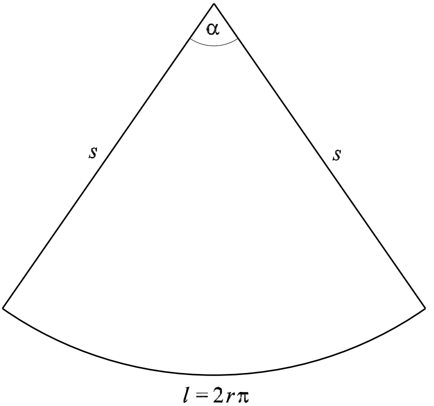
Ploština plašta uspravnoga kružnog stošca, kojemu je polumjer osnovke r, a duljina izvodnice s, jednaka je $P=rs\pi$.

Dokaz. Ako se plašt stošca razvije u ravninu, dobije se kružni isječak, kojemu je (vidi sl. 125. i 126.) polumjer jednak duljini izvodnice, a duljina luka jednaka opsegu osnovke, to jest $l=2r\pi$.

Kako je duljina luka $l=\dfrac{s\pi\alpha}{180^\circ}=2r\pi$, to je $\alpha=\dfrac{r\cdot 360^\circ}{s}$. Prema formuli za ploštinu kružnog isječka vrijedi: $P=\dfrac{s^2\pi\alpha}{360^\circ}=\dfrac{s^2\pi}{360^\circ}\cdot\dfrac{r\cdot 360^\circ}{s}$, ili $P=rs\pi$.



Sl. 125.



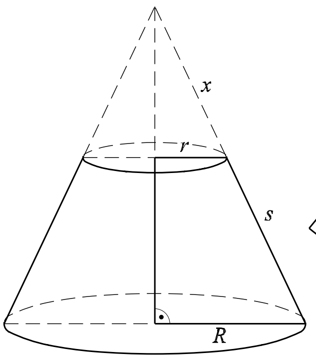
Sl. 126.

67. Formula za ploštinu plašta uspravnoga kružnoga krnjeg stošca

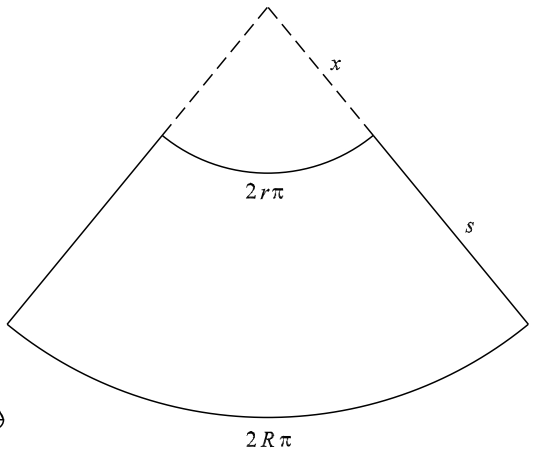
Ploština plašta uspravnoga kružnoga isječka krnjeg stošca, kojemu su polumjeri osnovaka R i r i duljina izvodnice s, jednaka je $P=(R+r)s\pi$.

Dokaz. Koristimo slike 127. i 128.

Ako je x duljina izvodnice dopunjka krnje piramide, tada, zbog sličnosti, vrijedi: $\frac{s+x}{x}=\frac{R}{r}$, $\frac{s}{x}+1=\frac{R}{r}$, odakle je $x=\frac{rs}{R-r}$. Prema formuli 66. vrijedi: $P=R(s+x)\pi-rx\pi=Rs\pi+x(R-r)\pi=Rs\pi+\frac{rs}{R-r}\cdot(R-r)\pi$, ili $P=(R+r)s\pi$.



Sl. 127.



Sl. 128.

68. Formula za obujam krnje piramide

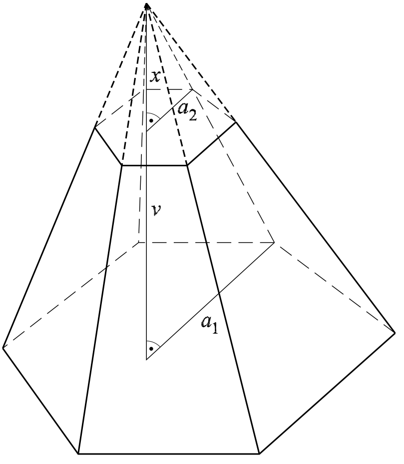
Obujam krnje piramide, kojoj su ploštine osnovaka B_1 i B_2, a visina v, iznosi: $V=\frac{v\pi}{3}(B_1+\sqrt{B_1B_2}+B_2)$.

Dokaz. Neka je visina dopunjke piramide x (sl. 129.). Zbog sličnosti vrijedi: $\frac{v+x}{x}=\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{(v+x)^2}{x^2}=\frac{a_1^2}{a_2^2}$. Kako su ploštine sličnih likova razmjerne s kvadratom koeficijenta sličnosti, to je $\dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{a_1^2}{a_2^2}$. Zato je $\dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{(v+x)^2}{x^2} \implies \dfrac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{B_2}} = \dfrac{v}{x} + 1 \implies x = \dfrac{\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}} v$.

Obujam krnje piramide jednak je razlici obujmova piramida i vrijedi:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}B_1(v+x) - \frac{1}{3}B_2 x = \frac{1}{3}B_1 v + \frac{1}{3}x \cdot (B_1 - B_2) \\
&= \frac{1}{3}\left[B_1 v + \frac{\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}} v \cdot (\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2})(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2})\right].
\end{aligned}
$$

Konačno je $V = \dfrac{v}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)$.



Sl. 129.

69. Formula za obujam uspravnoga krnjeg stošca

Obujam uspravnoga krnjeg stošca, kojemu su polumjeri osnovaka R i r, a visine v jednak je $V = \dfrac{v\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)$.

$\boxed{\textit{Dokaz.}}$ Krnji stožac i krnja piramida, koji imaju jednake ploštine osnovaka i jednake visine, imaju, prema Cavalierijevom načelu, jednake obujmove. Stavimo li u formulu 68. $B_1 = R^2\pi$, $B_2 = r^2\pi$, neposredno dobijemo $V = \dfrac{v\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)$.

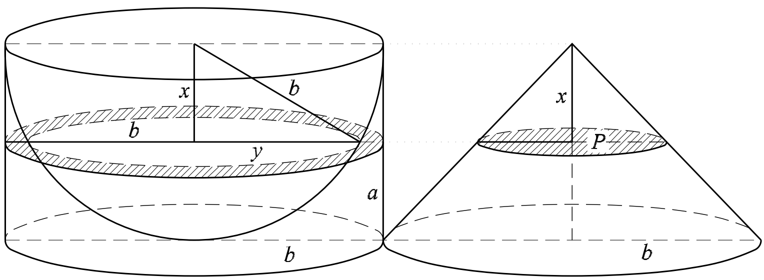
70. Obujam uspravnoga kružnog stošca

Obujam uspravnoga kružnog stošca kojemu je visina jednaka a *i polumjer osnovke* b *iznosi* $V = \frac{1}{3}b^2 a\pi$.

Koristit ćemo Cavalierijev princip.

Ako dva tijela siječemo nizom međusobno usporednih ravnina i ako svaka od tih ravnina siječe tijela u likovima jednakih ploština, onda ta tijela imaju jednake obujme.

Dokaz 1.



Sl. 130.

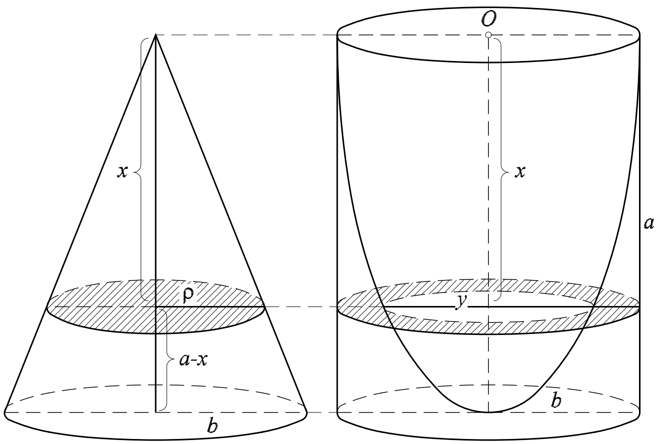
S pomoću Cavalierijeva principa može se jednostavno pokazati da formula $V = \frac{1}{3}b^2 a\pi$ vrijedi ako je $a = b$. Promatrajmo valjak i stožac koji imaju jednake polumjere osnovke b i jednake visine a. Valjak i stožac su postavljeni tako da su im osnovke u istoj ravnini, a nalaze se sa iste strane te ravnine (sl. 130.).

Iz zadanog valjka izdubi se polukugla polumjera $r = a = b$. Obujam nastalog tijela je $V = b^2 a\pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}r^3\pi = a^3\pi - \frac{2}{3}a^3\pi = \frac{1}{3}a^3\pi = \frac{1}{3}b^2 a\pi$. Tvrdimo da to tijelo i promatrani stožac imaju jednake obujme. Da to dokažemo dovoljno je dokazati da su ploštine presjeka tih tijela bilo kojom ravninom usporednom s njihovim osnovkama, međusobno jednake. Neka je ta ravnina udaljena x od vrha stošca. Ploštinu presjeka stošca označimo s P, a ploštinu na drugom tijelu sa S. Presjek stošca je krug polumjera

ρ. Kako je $b = a$, to je $\rho = x$, zbog čega je $P = \rho^2\pi = x^2\pi$. Presjek na drugom tijelu je kružni vijenac polumjera b i y, pa je $S = (b^2 - y^2)\pi$. Kako je (vidi sliku 109.) $b^2 - y^2 = x^2$, to je $S = x^2\pi$. Vidimo da je $S = P$, pa je obujam stošca $V = \frac{1}{3}b^2 a\pi$.

Postavlja se zanimljivo metodičko pitanje može li se ovaj dokaz poopćiti za bilo koji stožac. Budući je kružnica posebna elipsa (odnosno elipsa poopćenje kružnice), to je poopćenje kugle rotacijski elipsoid. Postavimo tvrdnju:

Ako se iz valjka polumjera osnovke b i visine a izdubi polovica rotacijskog elipsoida glavne poluosi a i sporedne poluosi b, tada je obujam preostalog tijela jednak obujmu stošca polumjera osnovke b i visine a (vidi sl. 131.).



Sl. 131.

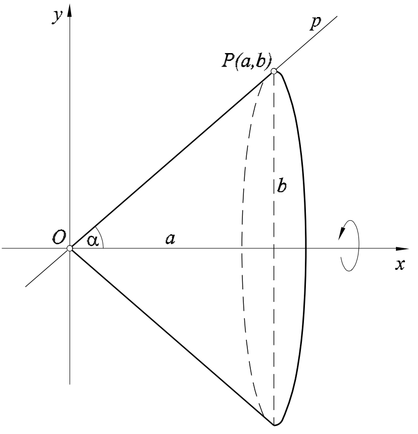
Postupamo slično kao u prethodnom slučaju. Sada je presjek stošca jednak $P = \rho^2\pi$. Zbog sličnosti je $\rho : x = b : a$, tj. $\rho = \frac{b}{a}x$, pa je $P = \frac{b^2}{a^2}x^2\pi$. Presjek na valjku iz kojeg je izdubljen rotacijski stožac je kružni vijenac polumjera b i y pa je $S = (b^2 - y^2)\pi$.

Jednadžba elipse koja izvodi vrtnju je $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ (ishodište sustava u središtu "gornje" osnovke, os apscisa u osi valjka). Zato je $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$, odnosno $b^2 - y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2$, zbog čega je $S = \frac{b^2}{a^2}x^2\pi$. Zaključujemo da stožac i valjak iz kojeg je izdubljena polovica rotacijskog elipsoida (uz navedene uvjete) imaju jednake obujme.

Kako je obujam valjka jednak $b^2 a\pi$, a obujam rotacijskog elipsoida $\frac{4}{3}b^2 a\pi$, to je obujam stošca $V = b^2 a\pi - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}b^2 a\pi = \frac{1}{3}b^2 a\pi$.

Napomena. Iz svega možemo zaključiti jednu zanimljivu tvrdnju. Ako se u valjak upiše polovica rotacijskog elipsoida, a u elipsoid stožac, uz uvjete kao je navedeno, tada plohe tih triju tijela dijele valjak na tri dijela jednakih obujama.

Dokaz 2. Obujam stošca odredimo primjenom integralnog računa. Neka pravac p prolazi ishodištem koordinatnog sustava i neka je $P(a,b)$ bilo koja točka pravca p (P različito od ishodišta O), sl. 132.



Sl. 132.

Vrtnjom dužine $\overline{OP}$ oko osi apscisa nastaje plašt stošca kojemu je b polumjer osnovke, a duljina visine jednaka a.

Koristimo formulu za obujam rotacijskog tijela: $V = \pi\int y^2 dx$. Jednadžba pravca p glasi $y = kx$, gdje je $k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$, dakle $y = \frac{b}{a}x$.

Zato je $V = \pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}x^2 dx = \pi\frac{b^2}{a^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^a$ tj. $V = \frac{1}{3}b^2 a\pi$.