1.

Općinsko natjecanje

Nakon školskih natjecanja mladih matematičara, učenika osnovnih i srednjih škola Republike Hrvatske, održanih tijekom siječnja i veljače, najbolji učenici pozvani su na općinsko natjecanje koje se održalo 4. ožujka 1995. u svim općinama, po jedinstvenim kriterijima Državne komisije za matematiku.

Osnovna škola

4. razred

4.1. a) Izračunaj: $(423 \cdot 9 - 423 \cdot 8 + 423 \cdot 2) : 3 - 24$.

b)

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 6 & \square & 4 & \square \\ - & \square & \square & 8 & \square & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 8 & 4 & 7 \end{array}$$

Upiši u kvadratiće odgovarajuće brojeve tako da naznačeno oduzimanje bude točno.

4.2. Napiši sve dvoznamenkaste brojeve koji se mogu napisati koristeći znamenke 2, 5 i 7. Koliko ima tih brojeva?

4.3. Svotu od 2400 kuna trebaju razdijeliti tri dječaka: Ante, Branko i Karlo, tako da Ante dobije 120 kuna više od Branka, a Branko dobije 240 kuna više od Karla.

Koliko će kuna dobiti svaki dječak?

4.4. Duljina osnovice jednakokračnog trokuta iznosi 36 milimetara. Opseg ovog trokuta jednak je opsegu jednakostraničnog trokuta kojemu je duljina stranice 42 milimetra.

Izračunaj duljinu kraka jednakokračnog trokuta.

Nacrtaj ovaj jednakokračni trokut.

4.5. List papira izrežimo tako da dobijemo tri dijela. Jedan od tih dijelova ponovo izrežimo tako da od njega dobijemo tri dijela. Ako taj postupak ponovimo sedam puta, koliko ćemo ukupno dijelova papira dobiti?

5. razred

5.1. Objasni zašto možemo bez izračunavanja tvrditi da je razlika

$$(18796 \cdot 123042 \cdot 2073) - (3287 \cdot 15747 \cdot 8994)$$

djeljiva s 10.

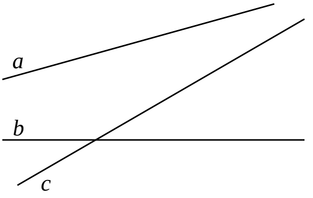
5.2. Opseg jednakokračnog trokuta je 19 cm, a razlika između duljine kraka i duljine osnovice je 2 cm. Odredi duljinu kraka i osnovice.

5.3. U jednoj posudi nalazi se tri puta više mlijeka nego u drugoj. Ako u prvu posudu dolijemo 3 litre, a u drugu 5 litara, tad će u prvoj posudi biti dva puta više mlijeka nego u drugoj.

Koliko je litara mlijeka bilo u svakoj posudi na početku, prije dolijevanja?

5.4. Zbroj dva prirodna broja je 512, a njihov najveći zajednički djelitelj je 64. Koji su to brojevi?

5.5. U ravnini su nacrtana tri pravca a, b, c kao na slici. Nacrtaj točku A na pravcu a i točku B na pravcu b, tako da točke A i B budu osnosimetrične s obzirom na pravac c.



Sl. 1.1.

6. razred

6.1. Ako neki broj podijelimo s 20, pa dobivenom količniku pribrojimo 3.75 i dobiveni zbroj pomnožimo s 0.4, dobit ćemo broj koji je za 8.25 veći od 20. Koliki je početni nepoznati broj?

6.2. Učenik je trebao pomnožiti 78 s dvoznamenkastim brojem kojemu je znamenka desetica tri puta veća od znamenke jedinica. On je greškom zamijenio znamenke u drugom faktoru i tako dobio umnožak manji od točnog umnoška za 2808. Odredi točan umnožak.

6.3. Duljine stranica pravokutnika razlikuju se za 4.2 cm, a njegov je opseg 23.2 cm. Nad njegovom duljom stranicom kao osnovicom nacrtan je s vanjske strane jednakokračan trokut kome je opseg jednak opsegu pravokutnika. Odredi duljine stranica tog trokuta.

6.4. Tri komada tkanine imaju ukupnu duljinu 14.5 m. Ako od prvog komada odrežemo polovicu njegove duljine, od drugog komada trećinu njegove duljine, a od trećeg komada četvrtinu njegove duljine, preostali dijelovi tkanine imat će jednake duljine.

Kolika je duljina svakog komada tkanine prije rezanja?

6.5. Dan je jednakokračan trokut ABC. Simetrala vanjskog kuta uz osnovicu $\overline{AB}$ i simetrala vanjskog kuta nasuprot osnovice sijeku se pod kutom od 71°. Odredi unutarnje kutove trokuta ABC.

7. razred

7.1. Za koje vrijednosti parametra a jednadžba

$$ax - 2a = 3x - 8$$

ima pozitivno rješenje?

7.2. Odredi sve dvoznamenkaste brojeve koji su za jedan manji od šesterostrukog zbroja svojih znamenki.

7.3. Koliki je opseg pravilnog mnogokuta kome je duljina stranice 12 cm, a broj svih dijagonala 252?

7.4. Tri su broja proporcionalna brojevima 1.5, 0.625, $\frac{7}{12}$. Koji su to brojevi, ako je prvi broj za 21 veći od zbroja ostalih dvaju brojeva?

7.5. Nad stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ jednakostraničnog trokuta ABC nacrtani su s vanjske strane kvadrati $ACMN$ i $BCPQ$. Pravac koji prolazi točkom B i središtem kvadrata $ACMN$ siječe pravac PM u točki D. Dokaži da je trokut BPD jednakokračan.

8. razred

8.1. Izračunaj:

$$\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}.$$

8.2. Odredi sve cijele brojeve a za koje je razlomak

$$\frac{a^2 - 11a + 24}{a^2 - 9a + 8}$$

isto cijeli broj.

8.3. Dan je pravokutnik $ABCD$, tako da je $|AC| = 2|BC|$. Neka je E nožište okomice iz vrha B na dijagonalu $\overline{AC}$. Odredi opseg i površinu pravokutnika $ABCD$ ako je $|CE| = 5$ cm.

8.4. Strojoslagar je izračunao da će tiskanje knjige završiti tri dana prije roka ako svakog dana složi dvije stranice preko norme. Ako bi svakog dana složio četiri stranice preko norme, tiskanje bi bilo završeno pet dana prije roka.

Koliko ukupno stranica treba strojoslagar otiskati i u kojem roku?

8.5. Zadan je pravokutan trokut ABC s pravim kutom u vrhu C, pri čemu je $|BC| < |AC|$. Kružnica sa središtem u vrhu C polumjera $\overline{BC}$ siječe hipotenuzu $\overline{AB}$ u točki D, tako da je $|BD| = 98$ cm i $|AD| = 527$ cm. Odredi duljine kateta pravokutnog trokuta ABC.

Srednja škola

1. razred

1.1. Na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC leže točke F, G, H tako da je F između A i G, a H između G i B. Ako je $|BH| = |BC|$, $|HG| = |HC|$, $|GF| = |GC|$, $|FA| = |FC|$, te $\sphericalangle CAB = 5^\circ$, izračunajte koliki je $\sphericalangle ABC$.

1.2. Duljine stranica baze trostrane piramide jednake su a, b, c. Svi kutovi između bridova uz njezin vrh su pravi. Izračunajte volumen piramide.

1.3. Dokažite da za realne brojeve $a \neq b \neq c \neq a$ vrijedi sljedeći identitet

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a + b + c.$$

1.4. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost

$$\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \ldots + \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} < \frac{n}{2}.$$

2. razred

2.1. Dokažite da je izraz

$$\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}-\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}$$

racionalan broj.

2.2. Dokažite da jednadžba $x^2-(a+c)x+ac-b^2=0$ ima realne korijene x_1 i x_2 za bilo koje realne koeficijente a, b i c te da su a i c korijeni jednadžbe $(y-x_1)(y-x_2)+b^2=0$.

2.3. Neka je z kompleksan broj takav da je $|z|=2$. Odredite minimum i maksimum izraza

$$\left|z-\frac{1}{z}\right|.$$

2.4. Unutar trokuta ABC nalazi se točka R. Paralela sa stranicom $\overline{AB}$ kroz R siječe stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ u točkama M i N, paralela sa stranicom $\overline{AC}$ kroz R siječe $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$ u točkama E i F, a paralela sa stranicom $\overline{BC}$ kroz R siječe $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ u K i P. Površine trokuta NER, PMR i FKR iznose redom a^2, b^2, c^2. Odredite površinu trokuta ABC.

3. razred

3.1. Riješite jednadžbu

$$\log_{(x+1)}(x^3-9x+8)\cdot\log_{(x-1)}(x+1)=3.$$

3.2. Riješite i diskutirajte jednadžbu

$$1+\cos 4x=m(\sin x-\cos x)^2$$

gdje je $m\in\mathbf{R}$.

3.3. Neka je O središte upisane kružnice trokuta ABC. Dokažite da vrijedi

$$|AO|^2\cdot|BC|+|BO|^2\cdot|AC|+|CO|^2\cdot|AB|=|AB|\cdot|BC|\cdot|CA|.$$

3.4. Konstruirajte trokut ABC ako je zadan opseg $a+b+c$, kut α i duljina h_a visine na stranicu $\overline{BC}$. Rasprava!

4. razred

4.1. Za broj $x\in(1,2)$ definiran je niz

$$a_0=1,\qquad a_n=\frac{a_{n-1}}{\log_x 2}+1,\quad n\in\mathbf{N}.$$

Dokažite da je $a_n < \log_{\frac{2}{x}} 2$ za svaki $n \in \mathbf{N}$.

4.2. Dana je pravilna trostrana prizma. Odredite kut između dijagonale pobočke i pravca koji prolazi težištem osnovice i polovištem nasuprotnog bočnog brida. Poznato je da se stranica osnovice i visina prizme odnose kao $1 : \sqrt{3}$.

4.3. Pravci $x + y + 4 = 0$ i $7x - y + 4 = 0$ tangente su kružnice čije je središte na pravcu $4x + 3y - 2 = 0$. Nađite jednadžbu te kružnice.

4.4. Neka je z kompleksan broj takav da je $|z| = 1$. Dokažite da je

$$2 \leq |z - 1| + |z + 1| \leq 2\sqrt{2}.$$

Kada vrijede znakovi jednakosti?

Rješenja zadataka

4.1. a) $(423 \cdot 9 - 423 \cdot 8 + 423 \cdot 2) : 3 - 24 = 423(9 - 8 + 2) : 3 - 24 = 423 \cdot 3 : 3 - 24 = 423 - 24 = 399$.

b)

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 6 & \boxed{7} & 4 & \boxed{0} \\ - & \boxed{1} & \boxed{3} & 8 & \boxed{9} & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 8 & 4 & 7 \end{array}$$

4.2. Uvjete zadatka zadovoljava 9 brojeva. To su: 22, 25, 27, 52, 55, 57, 72, 75 i 77.

4.3. Ako Karlo dobije x kuna tada Branko dobije $x + 240$ kuna, a Ante dobije $x + 240 + 120$ kuna, pa je $x + x + 240 + x + 240 + 120 = 2400$, tj. $x = 600$.

Karlo dobije 600 kuna, Branko 840 kuna, a Ante 960 kuna.

4.4. Opseg jednakostraničnog trokuta je $O = 3a = 3 \cdot 42 = 126$ mm. Opseg jednakokračnog trokuta je, dakle, isto 126 mm.

$O = a + 2b$, $126 = 36 + 2b$, tj. $b = 45$ mm.

Duljina kraka je 45 mm.

4.5. Nakon prvog rezanja dobivamo tri dijela. U drugom rezanju jedan od tih dijelova opet režemo na tri dijela, pa dobivamo $2 + 3 = 5$ dijelova. U trećem rezanju jedan od tih pet dijelova režemo na tri, pa dobivamo nova tri dijela, tj. $4 + 3 = 7$ dijelova. U četvrtom rezanju jedan od tih sedam dijelova režemo na tri i dobivamo $6 + 3 = 9$ dijelova. U petom rezanju jedan od tih devet dijelova režemo na tri i dobivamo $8 + 3 = 11$ dijelova. U šestom rezanju jedan od tih jedanaest dijelova režemo na tri i dobivamo $10 + 3 = 13$ dijelova. I konačno u sedmom rezanju jedan od tih trinaest dijelova režemo na tri dijela i dobivamo $12 + 3 = 15$ dijelova. Dakle, nakon sedam ponovljenih rezanja dobivamo 15 dijelova.

* * *

5.1. Zadnju znamenku umnoška možemo odrediti tako da načinimo umnožak znamenaka jedinica svakog faktora. Kako je $6 \cdot 2 \cdot 3 = 36$, slijedi da je zadnja znamenka umanjenika 6. Zadnja znamenka umanjitelja također je 6, jer je $7 \cdot 7 \cdot 4 = 196$. Prema tome, zadnja znamenka razlike je nula, a to znači da je razlika djeljiva sa 10.

5.2. Neka je $|AB| = a$ duljina osnovice, a $|AC| = |BC| = b$ duljina kraka. Kako je $a+2b = 19$, to zbog $b = a+2$ dobivamo jednadžbu $a+2(a+2) = 19$. Rješenje ove jednadžbe je $a = 5$, pa je $b = 7$.

5.3. Neka je u drugoj posudi prije dolijevanja bilo x litara mlijeka. Tada je u prvoj posudi bilo $3x$ litara. Nakon dolijevanja, u prvoj je posudi bilo $3x+3$ litara, a u drugoj $x+5$ litara. Zato vrijedi jednadžba $3x+3 = 2(x+5)$. Rješenje ove jednadžbe je $x = 7$.

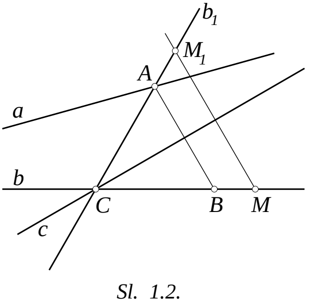
U početku je u prvoj posudi bilo 21, a u drugoj 7 litara mlijeka.

5.4. Neka su a i b traženi brojevi. Tada je $a = 64x$ i $b = 64y$, pri čemu su x i y prirodni brojevi. Kako je $64x + 64y = 512$, slijedi da je $64(x+y) = 512$, tj. $x+y = 8$. Od četiri moguća slučaja dva otpadaju. Naime, za $x = 2$, $y = 6$ i za $x = 4$, $y = 4$ najveći zajednički djelitelj traženih brojeva je veći od 64, što ne može biti.

Traženi brojevi su:

1. Za $x = 1$, $y = 7$ dobivamo $a = 64$ i $b = 448$.
2. Za $x = 3$, $y = 5$ dobivamo $a = 192$ i $b = 320$.

5.5. *Analiza.* Neka je točka C sjecište pravaca b i c; b_1 pravac simetričan pravcu b s obzirom na pravac c, a točka A sjecište pravca a i pravca b_1. Kako svaka točka pravca b_1 ima svoju simetričnu točku na pravcu b, slijedi da i točka A koja se nalazi i na pravcu b_1 i na pravcu a ima svoju simetričnu točku na pravcu b koju lako odredimo.



Sl. 1.2.

Konstrukcija. Prvo konstruiramo pravac b_1 simetričan pravcu b s obzirom na pravac c. Presjek pravca a i pravca b_1 je točka A. Okomica iz točke A na pravac c siječe pravac b u točki B.

* * *

6.1. Neka je x traženi broj. Vrijedi jednadžba

$$(x : 20 + 3.75) \cdot 0.4 = 20 + 8.25.$$

Jednadžbu rješavamo na temelju definicija računskih operacija. Rezultati na desnim stranama jednadžbi su brojevi 28.25; 70.625; 66.875 i konačno $x = 1337.5$.

6.2. Neka je $\overline{ab} = x$ traženi dvoznamenkasti broj, a $\overline{ba} = y$ broj sa zamijenjenim znamenkama. Tada vrijede redom ove jednakosti: $78x - 78y = 2808$, $78(x - y) = 2808$, $x - y = 36$.

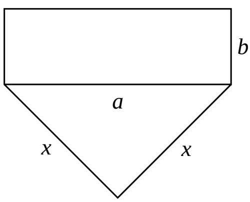
Kako je $\overline{ab} = 10a + b$ i $\overline{ba} = 10b + a$, to zamjenom u jednakosti $x - y = 36$ dobivamo redom $10a + b - (10b + a) = 36$, $9a - 9b = 36$, $9(a - b) = 36$ i $a - b = 4$, a zbog $a = 3b$ vrijedi $3b - b = 4$, tj. $b = 2$, pa je $a = 6$.

Traženi dvoznamenkasti broj je 62, a točan umnožak $78 \cdot 62 = 4836$.

6.3. Neka su a i b duljine dviju susjednih stranica pravokutnika, pri čemu je $a > b$. Iz $2a + 2b = 23.2$ slijedi $2(a + b) = 23.2$ ili $a + b = 11.6$, a zbog $a = b + 4.2$ imamo jednadžbu $b + 4.2 + b = 11.6$. Rješenje ove jednadžbe je $b = 3.7$, pa je $a = 7.9$.

Neka je x duljina kraka jednakokračnog trokuta. Tada imamo jednadžbu $7.9 + 2x = 23.2$. Rješenje jednadžbe je $x = 7.65$.

Duljina stranice je 7.9 cm, a duljina kraka 7.65 cm.

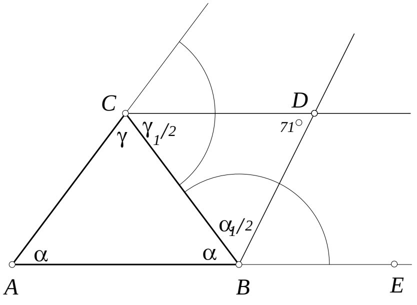


Sl. 1.3.

6.4. Neka je a duljina prvog, b duljina drugog, a c duljina trećeg komada tkanine. Tada je $a + b + c = 14.5$. Neka je k duljina jednakih dijelova tkanine nakon rezanja, tj. $\frac{1}{2}a = \frac{2}{3}b = \frac{3}{4}c = k$. Odavde slijedi $a = 2k$, $b = \frac{3}{2}k$, $c = \frac{4}{3}k$. Zamjenom ovih vrijednosti u početnoj jednakosti dobivamo jednadžbu $2k + \frac{3}{2}k + \frac{4}{3}k = 14.5$. Rješenje ove jednadžbe je $k = 3$.

Tražene duljine tkanina su $a = 6$ m, $b = 4.5$ m, $c = 4$ m.

6.5. Neka je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA = \alpha$, $\sphericalangle ACB = \gamma$, a točka D presjek simetrale vanjskog kuta α_1 kod vrha B i simetrale vanjskog kuta γ_1 kod vrha C. Iz svojstva vanjskog kuta trokuta slijedi da je $\gamma_1 = 2\alpha$ ili $\frac{\gamma_1}{2} = \alpha$, tj. $\sphericalangle DCB = \sphericalangle ABC$, a to znači da je $CD || AB$, pa zaključujemo da je $\sphericalangle EBD = \sphericalangle CDB$ (kutovi uz presječnicu), tj. $\frac{\alpha_1}{2} = 71^\circ$, pa je $\alpha_1 = 142^\circ$, a njegov sukut $\alpha = 38^\circ$. Iz $\gamma + 2\alpha = 180^\circ$ lako odredimo $\gamma = 104^\circ$.



Sl. 1.4.

* * *

7.1. Ako nepoznanicu x izrazimo pomoću parametra a, dobivamo $x = \frac{2a-8}{a-3}$, pri čemu je $a-3 \neq 0$. Rješenje će biti pozitivno ako su brojnik i nazivnik istog predznaka. Zato razlikujemo dva slučaja:

a) $2a-8>0, a-3>0$. Odavde slijedi da je $a>4$ i $a>3$. Rješenje je svaki broj $x>4$.

b) $2a-8<0, a-3<0$. Odavde slijedi da je $a<4$ i $a<3$. Rješenje je svaki broj $a<3$.

Zadana jednadžba imat će pozitivna rješenja za svaki broj $a<3$ ili $a>4$.

7.2. Neka traženi dvoznamenkasti broj ima oblik $\overline{ab}$. Tada vrijedi jednakost $10a+b+1=6(a+b)$ ili nakon sređivanja $4a+1=5b$. Ako a izrazimo pomoću b, dobivamo redom

$$4a=5b-1\ ,\ a=\frac{5b-1}{4}\ ,\ a=\frac{4b+b-1}{4}\ ,\ a=b+\frac{b-1}{4}.$$

Broj a bit će prirodan broj ako je $b-1=4k$, tj. $b=4k+1$. Uvrstimo li dobivenu vrijednost za b u jednakost $a=\frac{5b-1}{4}$, dobivamo redom

$$a=\frac{5(4k+1)-1}{4}\ ,\ a=\frac{20k+5-1}{4}\ ,\ a=\frac{20k+4}{4},$$

tj. $a=5k+1$.

Sad je očito da broj k može imati samo dvije vrijednosti, $k=0$ ili $k=1$, jer su a i b znamenke.

Za $k=0$ dobivamo $a=1$ i $b=1$, a za $k=1$ dobivamo $a=6$ i $b=5$, pa su to jedina dva rješenja.

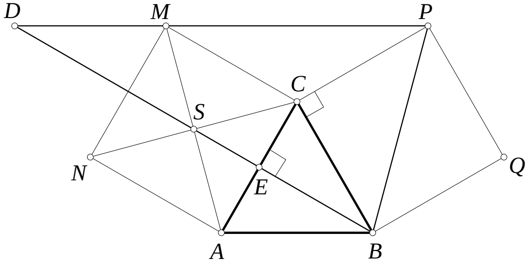
Traženi dvoznamenkasti brojevi su 11 i 65.

7.3. Neka je n broj stranica pravilnog mnogokuta. Tada je broj njegovih dijagonala $\frac{(n-3)n}{2}=252$, ili $(n-3)n=504$. Ako broj 504 rastavimo na proste faktore, dobivamo $(n-3)n=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7$, tj. $(n-3)n=21\cdot 24$ iz čega slijedi da je $n=24$. Zato je traženi opseg $24\cdot 12$, tj. 288 cm.

7.4. Neka su a, b, c redom traženi brojevi. Uvođenjem faktora proporcionalnosti k, možemo pisati $a = 1.5k, b = 0.625k, c = \frac{7}{12}k$. Iz $a = b + c + 21$ dobivamo $1.5k = 0.625k + \frac{7}{12}k + 21$, a rješenje te jednadžbe je $k = 72$. Traženi brojevi su $a = 108$, $b = 45$, $c = 42$.

7.5. Neka je točka S sjecište dijagonala kvadrata $ACMN$, a $\overline{BP}$ dijagonala kvadrata $BCPQ$. Očito je $\sphericalangle CBP = \sphericalangle CPB = 45^\circ$, jer je trokut BCP jednakokračan i pravokutan. Kako je trokut MCP jednakokračan, jer je $|CM| = |CP|$, a kut $\sphericalangle MCP = 360^\circ - (2 \cdot 90^\circ + 60^\circ)$, tj. $\sphericalangle MCP = 120^\circ$, slijedi da je $\sphericalangle CMP = \sphericalangle CPM = 30^\circ$, a to znači da je $\sphericalangle BPD = 75^\circ$.

Trokut ACS je jednakokračan, jer je $|AS| = |CS|$, a zbog $|AB| = |CB|$ zaključujemo da točke B i S leže na simetrali stranice $\overline{AC}$, pa je $BS \perp AC$. Neka je točka E sjecište pravaca BS i AC. Trokut BEC je pravokutan, jer je $\sphericalangle BEC = 90^\circ$, a zbog $\sphericalangle BCE = 60^\circ$ slijedi da je $\sphericalangle CBE = 30^\circ$, odnosno $\sphericalangle PBD = 75^\circ$. Iz jednakosti $\sphericalangle BPD = \sphericalangle PBD = 75^\circ$ zaključujemo da je trokut BPD jednakokračan.



Sl. 1.5.

* * *

8.1. Ako prvi razlomak proširimo sa $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$, a drugi sa $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$, pa dobivene razlomke svedemo na zajednički nazivnik, dobivamo redom

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} &= \frac{\sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}}{3-2\sqrt{2}} \\ &- \frac{\sqrt{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9-8}}{3-2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{9-8}}{3+2\sqrt{2}} \\ &= \frac{3+2\sqrt{2}}{9-8} - \frac{3-2\sqrt{2}}{9-8} = 3+2\sqrt{2}-3+2\sqrt{2} \\ &= 4\sqrt{2}.\end{aligned}$$

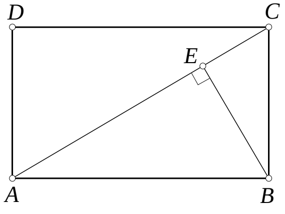
8.2. Ako brojnik i nazivnik zadanog razlomka rastavimo na faktore, dobivamo redom

$$\frac{a^2-11a+24}{a^2-9a+8} = \frac{a^2-3a-8a+24}{a^2-a-8a+8}$$

$$= \frac{a(a-3)-8(a-3)}{a(a-1)-8(a-1)}$$
$$= \frac{(a-3)(a-8)}{(a-1)(a-8)} = \frac{a-3}{a-1}$$
$$= \frac{a-1-2}{a-1} = 1 - \frac{2}{a-1}.$$

Sad je očito da će zadani razlomak biti cijeli broj ako je razlomak $\frac{2}{a-1}$ cijeli broj, a to je moguće samo ako je $a-1=1$, $a-1=-1$, $a-1=2$, $a-1=-2$, tj. ako je $a=2$, $a=0$, $a=3$, $a=-1$.

8.3. Kako je trokut ABC pravokutan, a zbog $|AC| = 2|BC|$, slijedi da je trokut ABC polovica jednakostraničnog trokuta, pa je $\sphericalangle BAC = 30^\circ$ i $\sphericalangle BCA = 60^\circ$, a to znači da je $\sphericalangle CBE = 30^\circ$ i trokut BEC je isto polovica jednakostraničnog trokuta, iz čega zaključujemo da je $|BC| = 2|CE|$, tj. $|BC| = 10$ cm, a $|AC| = 20$ cm.



Sl. 1.6.

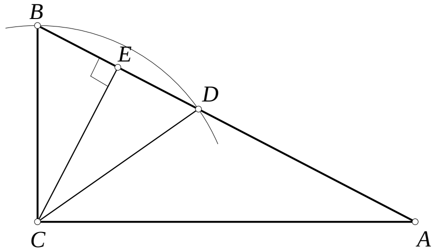
Primjenom Pitagorina poučka na trokut ABC lako odredimo $|AB|$. Naime, $|AB|^2 = 20^2 - 10^2$, odnosno $|AB|^2 = 300$, ili $|AB| = 10\sqrt{3}$ cm. Zato je traženi opseg $O = 2\cdot 10\cdot\sqrt{3}+2\cdot 10$, tj. $O = 20(\sqrt{3}+1)$ cm, a površina $P = 10\sqrt{3}\cdot 10$, tj. $P = 100\sqrt{3}$ cm^2.

8.4. Neka je x broj dana, a y broj stranica koje treba otiskati u toku jednog dana da bi tiskanje bilo završeno u predviđenom roku. Tada je xy ukupan broj stranica.

Iz prvog uvjeta slijedi jednadžba $(x-3)(y+2) = xy$, ili nakon sređivanja $2x - 3y = 6$. Iz drugog uvjeta slijedi jednadžba $(x-5)(y+4) = xy$, ili nakon sređivanja $4x - 5y = 20$. Rješenje sustava jednadžbi $2x - 3y = 6, 4x - 5y = 20$ je $x = 15, y = 8$. Strojoslagar treba za 15 dana otiskati 120 stranica knjige.

8.5. Neka je $|BC| = a, |AC| = b$ i neka je $|CE| = v$ duljina visine iz vrha C na hipotenuzu $\overline{AB}$, odnosno osnovicu $\overline{BD}$ trokuta BCD. Kako je trokut BCD jednakokračan, jer je $|CB| = |CD|$, slijedi da je $|BE| = |DE| = 49$ cm, pa je $|AE| = 527+49 = 576$ cm. Primjenom Pitagorina poučka na trokute BEC i AEC vidimo da vrijede jednakosti $v^2 = a^2 - 49^2$, odnosno $v^2 = b^2 - 576^2$. Kako su lijeve strane ovih jednakosti jednake, to očito vrijedi $b^2 - 576^2 = a^2 - 49^2$, a zbog $c^2 = 625^2$ i $a^2 = c^2 - b^2$, tj. $a^2 = 625^2 - b^2$, imamo za b jednadžbu $b^2 - 576^2 = 625^2 - b^2 - 49^2$ ili nakon sređivanja $b^2 = 360000$, pa je $b = 600$ cm.

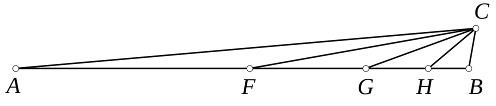
Sada lako iz jednakosti $a^2 = 625^2 - 600^2$ odredimo $a = 175$ cm.



Sl. 1.7.

* * *

1.1. Po pretpostavci trokuti AFC, FGC, GHC i HBC su jednakokračni. Zato redom imamo:

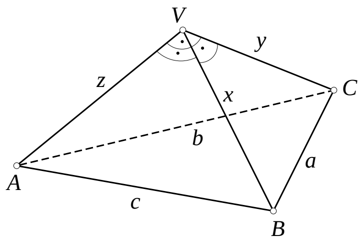


Sl. 1.8.

$$\begin{aligned}
&\sphericalangle FCA = \sphericalangle CAF = 5^\circ\\
&\sphericalangle GCF = \sphericalangle CFG = 10^\circ\\
&\sphericalangle HCG = \sphericalangle CGH = 20^\circ\\
&\sphericalangle BCH = \sphericalangle CHB = 40^\circ\\
&\sphericalangle BCA = 5^\circ + 10^\circ + 20^\circ + 40^\circ + 75^\circ\\
&\sphericalangle ABC = 180^\circ - \sphericalangle BCA - \sphericalangle CAB = 100^\circ.
\end{aligned}$$

1.2. Neka su duljine bridova koji izlaze iz vrha piramide jednaki x, y, z. Svi ravninski kutovi uz vrh su pravi i iz Pitagorina teorema dobivamo sistem jednadžbi

$$\begin{aligned}
a^2 &= x^2 + y^2\\
b^2 &= y^2 + z^2\\
c^2 &= z^2 + x^2.
\end{aligned}$$



Sl. 1.9.

Zbrajanjem ovih jednadžbi dobivamo

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

a odavde redom

$$x=\sqrt{\frac{a^2-b^2+c^2}{2}},\, y=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}},\, z=\sqrt{\frac{-a^2+b^2+c^2}{2}}.$$

Volumen piramide jednak je $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{xy}{2}\cdot z=\frac{1}{6}xyz$,

$$V=\frac{1}{24}\sqrt{2(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)(-a^2+b^2+c^2)}.$$

1.3.

$$\begin{aligned}
&\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}\\
&=\frac{(c-b)a^3+(a-c)b^3+(b-a)c^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&=\frac{(c-b)a^3+a(b^3-c^3)-bc(b^2-c^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&=\frac{(b-c)[-a^3+a(b^2+bc+c^2)-bc(b+c)]}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&=\frac{(b-c)[-a(a^2-b^2)+bc(a-b)+c^2(a-b)]}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&=\frac{(b-c)(a-b)(-a^2-ab+bc+c^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&=a+b+c.
\end{aligned}$$

1.4. Pokazat ćemo da je svaki pribrojnik na lijevoj strani manji od $\frac{1}{2}$.

$$\frac{\sqrt{k(k+1)}}{2k+1}<\frac{1}{2}\iff 4k(k+1)<(2k+1)^2\iff 0<1.$$

Kako je ova tvrdnja istinita i kako na lijevoj strani nejednakosti ima n sumanada to je i polazna tvrdnja istinita.

* * *

2.1. Racionalizacijom izraza pod korijenom dobiva se

$$\begin{aligned}\sqrt{(3-2\sqrt{2})(17+12\sqrt{2})}-\sqrt{(3+2\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})}\\ =\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\\ =(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)=2.\end{aligned}$$

2.2. Diskriminanta ove kvadratne jednadžbe je

$$D=(a+c)^2-4(ac-b^2)=(a-c)^2+(2b)^2\geq 0$$

što znači da su oba korijena x_1 i x_2 realna.

Prema Vièteovim formulama je

$$x_1+x_2=a+c,\qquad x_1\cdot x_2=ac-b^2.$$

Drugu jednadžbu zapišimo u obliku

$$y^2-(x_1+x_2)y+x_1x_2+b^2=0.$$

Uvrštavanjem gornjih formula dobivamo $(y-a)(y-c)=0$ što znači da su korijeni druge jednadžbe $y_1=a$ i $y_2=c$.

2.3. Vrijedi

$$\begin{aligned}\left|z-\frac{1}{z}\right|=\left|\frac{z^2-1}{z}\right|=\frac{1}{2}\cdot|z^2-1|\\ |z^2-1|\leq|z^2|+1=|z|^2+1=5\\ |z^2-1|\geq|z^2|-1=|z|^2-1=3\end{aligned}$$

Odavde slijedi da je $\left|z-\frac{1}{z}\right|\in[\frac{3}{2},\frac{5}{2}]$. Za $z=2$ je $\left|z-\frac{1}{z}\right|=\frac{3}{2}$. Za $z=2i$ je $\left|z-\frac{1}{z}\right|=\left|2i-\frac{1}{2i}\right|=\left|2i+\frac{i}{2}\right|=\frac{5}{2}$.

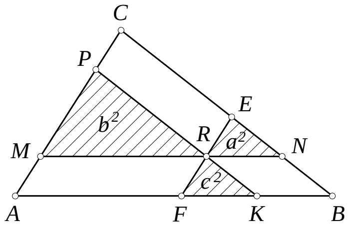
2.4. Trokuti NER i PMR su slični zbog čega je $|MP|:|RE|=b:a$. Kako je $|RE|=|PC|$ to je $|MP|:|PC|=b:a$. Trokuti PMR i PCR imaju jednaku visinu pa je

$$P_{PMR}:P_{PCR}=|MP|:|PC|=b:a,$$

odakle slijedi $P_{PCR}=\frac{a}{b}\cdot b^2=ab$ i $P_{RECP}=2ab$.

Analogno se dobiva $P_{RMAF}=2bc$, $P_{RKBN}=2ac$ i dobivamo

$$P_{ABC}=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2.$$



Sl. 1.10.

* * *

3.1. Jednadžbu zapišemo u obliku

$$\frac{\log(x^3-9x+8)}{\log(x+1)}\cdot\frac{\log(x+1)}{\log(x-1)}=3$$

odakle slijedi

$$x^3-9x+8=(x-1)^3.$$

Nakon sređivanja dobiva se jednadžba $x^2-4x+3=0$ čija rješenja su $x_1=1$, $x_2=3$.

Rješenje $x_1=1$ otpada zbog uvjeta $x-1>0$. Lako se provjeri da je $x=3$ rješenje polazne jednadžbe.

3.2. U sljedećih nekoliko koraka jednadžbu ćemo svesti na jednostavniji oblik

$$1+\cos^2 2x-\sin^2 2x=m(\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x),$$
$$2(1-\sin^2 2x)=m(1-\sin 2x),$$
$$2(1-\sin 2x)(1+\sin 2x)=m(1-\sin 2x),$$
$$(1-\sin 2x)(2\sin 2x+2-m)=0.$$

1° $\quad \sin 2x=1 \implies x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

2° $\quad \sin 2x=\frac{m}{2}-1$

Ova jednadžba ima rješenje za $\frac{m}{2}-1\in[-1,1]$ tj. za $m\in[0,4]$. Odavde se dobivaju rješenja

$$x=\frac{1}{2}\arcsin(\frac{m}{2}-1)+k\pi,\quad m\in[0,4],$$
$$x=-\frac{1}{2}\arcsin(\frac{m}{2}-1)+(k+\frac{1}{2})\pi,\quad m\in[0,4].$$

3.3. Sa slike se vidi da je $|AO|=\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Iz kosinusovog teorema $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ dobivamo

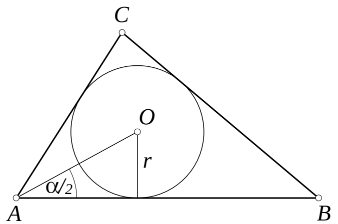
$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

tj.

$$\begin{aligned}
\sin^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{2}\Big(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Big) = \frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{4bc}\\
&= \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4}\cdot\frac{1}{bc}\\
&= \frac{(s-b)(s-c)}{bc}.
\end{aligned}$$

Sada je

$$|AO|^2 = \frac{r^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{r^2bc}{(s-b)(s-c)}.$$



Sl. 1.11.

Analogne jednakosti vrijede i u preostalim slučajevima za $|BO|^2$ i $|CO|^2$ pa je lijeva strana jednakosti jednaka

$$\begin{aligned}
&\frac{r^2abc}{(s-b)(s-c)} + \frac{r^2abc}{(s-b)(s-a)} + \frac{r^2abc}{(s-a)(s-c)}\\
&\quad= \frac{r^2abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}(s-a+s-b+s-c)\\
&\quad= \frac{r^2abc\cdot s}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{P^2\cdot abc}{P^2} = abc,
\end{aligned}$$

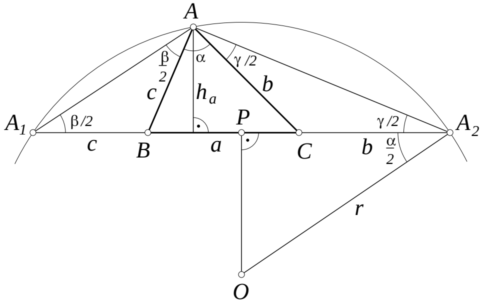
što je jednako desnoj strani.

3.4. *Analiza.* Na pravcu BC, gdje je, $|BC| = a$ odaberemo točke A_1 i A_2 tako da bude $|A_1B| = |AB| = c$, $|CA_2| = |CA| = b$ i $|A_1A_2| = a+b+c$. Promatrajmo trokut AA_1A_2 kojem je opisana kružnica sa središtem u točki O.

$$\begin{aligned}
\sphericalangle AA_1A_2 &= \sphericalangle BAA_1 = \frac{1}{2}\sphericalangle ABC = \frac{\beta}{2},\\
\sphericalangle A_1A_2A &= \sphericalangle A_2AC = \frac{1}{2}\sphericalangle BCA = \frac{\gamma}{2},\\
\sphericalangle A_2AA_1 &= \sphericalangle BAA_1 + \sphericalangle CAB + \sphericalangle A_2AC
\end{aligned}$$

$$= \alpha + \frac{\beta+\gamma}{2} = \alpha + \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) =$$
$$= 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

$\sphericalangle A_2OA_1 = 2 \cdot \sphericalangle A_2AA_1 = 180^\circ + \alpha$, pa je $\sphericalangle A_1OA_2 = 180^\circ - \alpha$ odakle se dobije $\sphericalangle A_2A_1O = \sphericalangle OA_2A_1 = \frac{\alpha}{2}$.



Sl. 1.12.

Opis konstrukcije. Konstruiramo središte O kružnice. Dio kružnog luka A_1AA_2 sa središtem u točki O polumjera $\overline{OA_1}$ sadrži točke iz kojih se dužina $\overline{A_1A_2}$ vidi pod kutem $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

Sada je $|OP| = \frac{1}{2}|A_1A_2| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Konstruiramo pravac paralelan pravcu A_1A_2 na udaljenosti h_a od njega. Taj pravac siječe kružnicu u točki koja je vrh A traženog trokuta. Simetrale dužina AA_1 i AA_2 sijeku pravac A_1A_2 u točkama B i C trokuta. 10 bodova

Rasprava. Ako je

$$|OP| + h_a < r = \frac{a+b+c}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

ili

$$\frac{a+b+c}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + h_a < \frac{a+b+c}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

tj.

$$h_a < \frac{a+b+c}{2\cos\frac{\alpha}{2}}(1 - \sin\frac{\alpha}{2}),$$

tada postoje dva rješenja.

Ako je $h_a = \dfrac{a+b+c}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\left(1 - \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$, postoji jedno rješenje.

Ako je $h_a > \dfrac{a+b+c}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\left(1 - \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$, nema nijedno rješenje.

* * *

4.1. Uvedimo supstituciju $z = \log_2 x$ i primijetimo da je $z \in (0,1)$. Sada vrijedi

$$a_0 = 1, \qquad a_n = z \cdot a_{n-1} + 1, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Indukcijom se pokazuje da je

$$a_n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k.$$

Zato

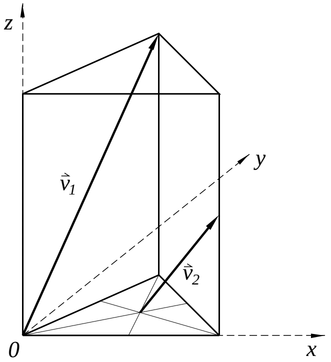
$$a_n = \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z} < \frac{1}{1 - z}, \tag{1.1}$$

jer je $z \in (0,1)$,

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1 - \log_2 x} = \frac{1}{\log_2 2 - \log_2 x} = \frac{1}{\log_2 \frac{2}{x}} = \log_{\frac{2}{x}} 2. \tag{1.2}$$

Iz (1.1) i (1.2) slijedi $a_n < \log_{\frac{2}{x}} 2$.

4.2. Uvedimo koordinatni sustav kao na slici.



Sl. 1.13.

Treba odrediti kut između vektora $\vec{v}_1 = \frac{a}{2}\vec{\imath} + \frac{a}{2}\sqrt{3}\vec{\jmath} + v\vec{k}$ i $\vec{v}_2 = \frac{a}{2}\vec{\imath} - \frac{a}{6}\sqrt{3}\vec{\jmath} + \frac{v}{2}\vec{k}$.

Odredimo koliki je kosinus tog kuta pomoću skalarnog produkta:

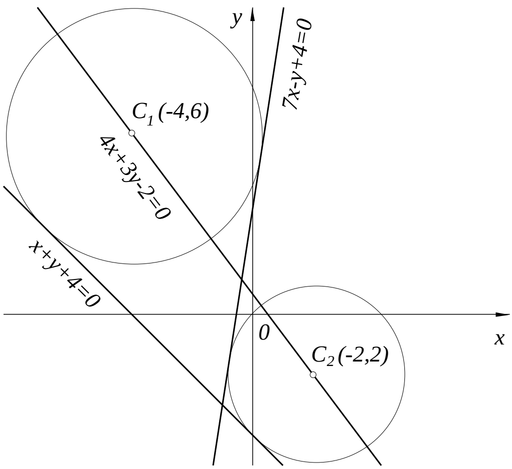
$$\cos\sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{12} + \frac{v^2}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} + v^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{36} + \frac{v^2}{4}}} = \sqrt{\frac{12}{13}}.$$

Traženi kut jednak je $\arccos\sqrt{\dfrac{12}{13}} = 16^\circ 6'$.

4.3. Neka je središte kružnice u točki (h,k). Tada je
$$\frac{h+k+4}{\sqrt{2}} = \pm\frac{7h-k+4}{5\sqrt{2}}$$
tj. $h-3k-8=0$ i $3h+k+6=0$. (Ovo su jednadžbe simetrala kuteva između ta dva pravca.)

Kako središte leži na pravcu $4x+3y-2=0$, to je $4h+3k-2=0$. Iz ove jednadžbe i $h-3k-8=0$ dobije se $h=2, k=-2$. Sada je $r=\dfrac{2-2+4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$, i jedna jednadžba kružnice je $(x-2)^2+(y+2)^2=8$.

Iz jednadžbi $4h+3k-2=0$ i $3h+k+6=0$ dobije se $h=-4$, $k=6$ i $r=3\sqrt{2}$. Jednadžba ove kružnice je $(x+4)^2+(y-6)^2=18$.

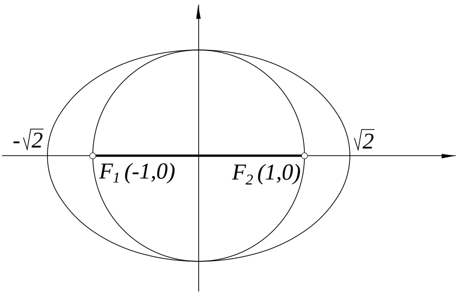


Sl. 1.14.

4.4. Jednadžbu $|z|=1$ zadovoljavaju sve točke na jediničnoj kružnici. Prema definiciji elipse, jednadžbu $|z-1|+|z+1|=2\sqrt{2}$ zadovoljavaju sve točke elipse sa žarištima $F_1(-1,0)$ i $F_2(1,0)$. Elipsa siječe y-os u točkama $\pm ai$. Tada se iz $|ai-1|+|ai+1|=2\sqrt{2}$ dobiva $a=1$. To znači da jedinična kružnica leži unutar elipse. Zato je za sve točke z na jediničnoj kružnici
$$|z-1|+|z+1|\le 2\sqrt{2}.$$

Jednakost vrijedi za točke $z=i$ te $z=-i$, koje leže na elipsi.

S druge strane, jednadžbu $|z-1|+|z+1|=2$ zadovoljavaju sve točke dužine $\overline{F_1F_2}$, tj. brojevi a za $-1\le a\le 1$. Kako su sve te točke unutar ili na rubu jedinične kružnice to mora biti
$$|z-1|+|z+1|\geqslant 2.$$



Sl. 1.15.

Jednakost vrijedi za točke $z = 1$ i $z = -1$ koje leže na kružnici.