1.

Općinsko natjecanje

Općinsko (gradsko) natjecanje je prvi stupanj natjecanja koji se organizira po jedinstvenim kriterijima Državnog povjerenstva za matematička natjecanja. Godine 1996. ono je održano 16. ožujka.

Evo postavljenih zadataka:

Osnovna škola

4. razred

4.1. Izračunaj $75 \cdot 428 - 75 \cdot 392 + 36 \cdot 63$.

4.2. Rastavi broj 1280 na dva pribrojnika tako da je jedan od njih za 250 veći od drugog.

4.3. Tri osobe podijele međusobno 3774 kune. Prva dobije 111 kuna manje od druge, a treća koliko prva i druga zajedno.

Koliko je kuna dobila svaka osoba?

4.4. Kad su Hrvoje i Ivan biciklima prešli četvrtinu puta, odluče se odmoriti. Do cilja im je ostalo još toliko koliko su prešli i još 20 kilometara.

Kolika je duljina puta što su ga do odmora prešli Hrvoje i Ivan? Koliko je kilometara dug cijeli put?

4.5. Duljina kraka b jednakokračnog trokuta dva puta je veća od duljine osnovice a. Izračunaj duljinu osnovice a ako je opseg trokuta 20 cm. Nacrtaj trokut!

5. razred

5.1. Umjesto zvjezdica stavi odgovarajuće znamenke, tako da množenje dva broja bude točno.

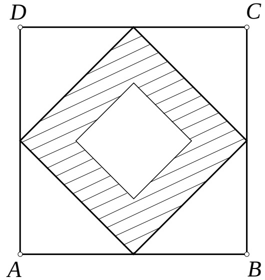
$$
\begin{array}{ccccccccc}
* & * & * & * & * & \cdot & 3 & 4 & * \\
\hline
2 & 3 & 5 & 0 & 3 & 8 & & & \\
 & * & * & * & * & * & * & & \\
 & & & * & * & * & * & * & \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & 6 &
\end{array}
$$

5.2. Majka je starija od kćeri 21 godinu. Za 10 godina majka će biti dva puta starija od kćeri. Koliko će godina imati majka za 10 godina?

5.3. Ako brojeve 701 i 592 podijelimo istim prirodnim brojem, dobivamo redom ostatke 8 i 7. Koji je broj djelitelj?

5.4. U pet kutija nalazi se ukupno 200 kuglica. U prvoj i drugoj kutiji su 104 kuglice, u drugoj i trećoj 86 kuglica, u trećoj i četvrtoj 68 kuglica, a u četvrtoj i petoj kutiji ima 60 kuglica. Koliko kuglica ima u svakoj kutiji?

5.5. Dana su tri kvadrata kao na slici. Vrhovi srednjeg kvadrata nalaze se u polovištima stranica kvadrata $ABCD$. Zbroj opsega najmanjeg i najvećeg kvadrata je 60 cm, pri čemu je opseg najmanjeg kvadrata četiri puta manji od opsega najvećeg kvadrata. Kolika je površina osjenčanog dijela, tj. površina dijela između srednjeg i najmanjeg kvadrata.



Sl. 1.1.

6. razred

6.1. Učitelj matematike je na općinsko natjecanje doveo četiri svoja učenika. Na pitanje koliko ima ukupno učenika kojima predaje matematiku, on je odgovorio: “Na školskom natjecanju sudjelovala je jedna trećina onih učenika kojima predajem, a na ovo natjecanje doveo sam jednu petnaestinu mojih učenika koji su sudjelovali na školskom natjecanju.” Koliki je broj učenika kojima ovaj učitelj predaje matematiku?

6.2. Odredi sve četveroznamenkaste brojeve oblika $\overline{abab}$ djeljive sa 16.

6.3. Polovina zbroja tri prirodna broja je 1996, pri čemu je drugi broj tri puta veći od prvog broja, a treći je broj za 1 veći od trećine prvog broja. Koji su to brojevi?

6.4. Dan je jednakostraničan trokut ABC. Na pravcu AC preko vrha C odabrana je točka D. Opseg trokuta ABD je 67 cm, a opseg trokuta BCD je 53 cm. Koliki je opseg trokuta ABC?

6.5. Simetrala vanjskog kuta trokuta ABC pri vrhu C siječe pravac AB pod kutom od $45°$. Koliki su kutovi trokuta ABC, ako je $\measuredangle ABC = 35°$?

7. razred

7.1. Biciklist se penje uzbrdo brzinom od 10 km na sat, a spušta na polazno mjesto brzinom od 15 km na sat. Razlika vremena uspinjanja i spuštanja je 12 minuta. Kolika je duljina puta uzbrdo?

7.2. Zbroj tri razlomka je $\frac{83}{72}$, pri čemu se njihovi brojnici odnose kao $5:7:1$. Nazivnik trećeg razlomka odnosi se prema nazivniku prvog razlomka kao $1:4$, a nazivnik drugog razlomka prema nazivniku trećeg razlomka odnosi se kao $3:2$. Odredi te razlomke, ako su oni do kraja skraćeni.

7.3. Nevenka je pročitala knjigu za četiri dana. Drugi je dan pročitala 20% više nego prvi dan, ali je i svaki sljedeći dan pročitala 20% više nego prethodni dan. Koliko stranica ima knjiga, ako je zbroj stranica koje je Nevenka pročitala prvi i četvrti dan za 11 veći od zbroja stranica koje je pročitala drugi i treći dan?

7.4. Dan je šiljastokutni trokut ABC. Točka D je nožište visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$, a točka E je nožište visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$. Dokaži da je $\measuredangle CAE + \measuredangle ACD = \measuredangle ABC$.

7.5. Dokaži da su polovišta stranica romba vrhovi pravokutnika.

8. razred

8.1. Izračunaj $\sqrt{20+2\sqrt{19}} + \sqrt{20-2\sqrt{19}}$.

8.2. Točka $A(-4,2)$ je vrh trokuta ABC. Na pravcu $y = 3x - 7$ leži stranica $\overline{BC}$, a na pravcu $y = 2x + 8$ leži visina iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$. Kolike su koordinate vrhova B i C trokuta ABC?

8.3. Avion je udaljenost od 6000 km preletio za neko vrijeme. Da je svakog sata avion preletio 100 km više, tada bi navedenu udaljenost preletio za dva sata manje. Za koje je vrijeme avion preletio navedenu udaljenost?

8.4. Dan je trokut ABC, pri čemu je

$$\sphericalangle CAB = 60^\circ, \quad \sphericalangle ABC = 45^\circ \text{ i } |BC| = 10\sqrt{3}.$$

Kolika je udaljenost vrha A od ortocentra trokuta ABC?

8.5. Dana je kružnica polumjera r. Iz točke A koja leži izvan kružnice konstruiraj tangente na zadanu kružnicu. Neka su točke M i N dirališta tih tangenti i zadane kružnice. Na manjem kružnom luku $\overset{\frown}{MN}$ u nekoj točki P konstruiraj tangentu t na zadanu kružnicu. Tangenta t siječe dužinu $\overline{AM}$ u točki B, a dužinu $\overline{AN}$ u točki C. Dokaži da opseg trokuta ABC ne ovisi o odabiru točke P, tj. da je opseg trokuta ABC stalan i jednak $|AM| + |AN|$.

Srednja škola

1. razred

1.1. Dokažite da ne postoje realni brojevi a, b, c koji zadovoljavaju jednakosti

$$a + b + c = 63,$$
$$ab + bc + ca = 1996.$$

1.2. Dokažite da zbroj kvadrata pet uzastopnih cijelih brojeva ne može biti kvadrat nekog cijelog broja.

1.3. Za koje vrijednosti realnog parametra a jednadžba

$$\frac{a-5}{x+1} - \frac{7+3a}{x-2} = \frac{2ax-5}{x^2-x-2}$$

nema rješenje?

1.4. Kružnici polumjera $r = 3$ dm opisan je jednakokračan trokut kojemu je kut pri vrhu 120°. Izračunajte površinu tog trokuta.

2. razred

2.1. Dokažite da je trokut jednakostraničan ako i samo ako je zbroj duljina njegovih visina jednak deveterostrukom polumjeru njegove upisane kružnice.

2.2. Odredite brojeve p i q, ako je poznato da je razlika korijena jednadžbe $x^2 + px + q = 0$ jednaka 5, a razlika njihovih kubova 35.

2.3. Neka je $\omega = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Pokažite da je

$$(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega) = a^3+b^3+c^3-3abc.$$

2.4. U trokutu ABC poznate su duljine stranica $b = |AC|$ i $c = |AB|$ i $\sphericalangle ABC = 3\sphericalangle BCA$. Na stranici $\overline{AC}$ odabrane su točke D i E takve da je $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBE = \sphericalangle EBC$. Izrazite pomoću b i c duljine dužina $\overline{AD}$, $\overline{DE}$ i $\overline{EC}$.

3. razred

3.1. Riješite jednadžbu

$$2\log_9^2 x = \log_3 x \cdot \log_3(\sqrt{2x+1} - 1).$$

3.2. Zadana je funkcija $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$.

(a) Odredite sve realne brojeve m za koje jednadžba $f(x) = m$ ima rješenje.

(b) Riješite jednadžbu $f(x) = 1$.

(c) Nađite maksimum funkcije $f(x)$ i odredite za koje vrijednosti x se on postiže.

(*Uputa.* Prikažite funkciju $f(x)$ u obliku $a\sin(bx + c)$, gdje su a, b, $c \in \mathbf{R}$.)

3.3. Zadan je konveksan četverokut $ABCD$ s kutovima α, β, γ i δ od kojih nijedan nije pravi. Dokažite da vrijedi ovaj identitet

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta} = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta.$$

3.4. Oko kružnice polumjera r opisan je trapez kojemu su kutovi uz dulju osnovicu α i β. Dokažite da je omjer površina trapeza i kruga jednak

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right).$$

4. razred

4.1. Neka je $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$ funkcija sa skupa pozitivnih cijelih brojeva u skup realnih brojeva takva da vrijedi:

(a) $f(1) = 1$,

(b) $f(1) + 2f(2) + 3f(3) + \ldots + nf(n) = n(n+1)f(n)$ za $n \geqslant 2$.

Nađite $f(1996)$.

4.2. Zadana su prva tri člana geometrijskog niza 1, q, q^2 $\quad (q > 0,\ q \neq 1)$.

(a) Odredite sve $x \in \mathbf{R}$ tako da kvadrati brojeva $1-x$, $q-x$, q^2-x čine aritmetički niz, a zatim ispitajte predznak od x za razne vrijednosti q.

(b) Izrazite razliku tog aritmetičkog niza kao funkciju od q. Koji uvjet zadovoljava q ako je ovaj niz rastući?

4.3. Neka su točke $A_i(x_i, y_i)$, $\quad i = 1, 2, 3, 4$ na hiperboli $xy = 1$. Dokažite tvrdnju: ako su sve četiri točke na istoj kružnici, onda je $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 1$.

4.4. Nađite kut između težišnica $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$ strana ABC i SAC pravilnog tetraedra $SABC$.

Rješenja zadataka

4.1. $75 \cdot 428 - 75 \cdot 392 + 36 \cdot 63 = 75 \cdot (428 - 392) + 36 \cdot 63 = 75 \cdot 36 + 36 \cdot 63 = 36 \cdot (75 + 63) = 36 \cdot 138 = 4968$.

4.2. Ako sa x označimo jedan pribrojnik tada je $x + 250$ drugi pribrojnik i vrijedi $x + (x + 250) = 1280$. Rješenje jednadžbe je $x = 515$. Traženi pribrojnici su 515 i 765.

4.3. Označimo sa x broj kuna koju je dobila druga osoba. Tada je prva osoba dobila $x - 111$ kuna, a treća $x + (x - 111)$ kuna. Sve tri zajedno su dobile $(x - 111) + x + (2x - 111)$ kuna. Treba riješiti jednadžbu

$$(x - 111) + x + (2x - 111) = 3774.$$

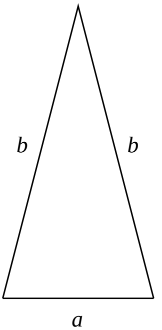
Rješenje je $x = 999$, pa je prva osoba dobila 888 kuna, druga 999 kuna, a treća 1887 kuna.

4.4. Cijeli put ima četiri četvrtine. Hrvoje i Ivan prešli su jednu četvrtinu, a ostala im je još jedna četvrtina i 20 km. Dakle, tih 20 km je dvije četvrtine puta, pa jedna četvrtina puta ima 10 km.

Hrvoje i Ivan prešli su 10 km, a ukupno će prijeći 40 km.

Sl. 1.2.

4.5. Kako je duljina kraka b dva puta veća od duljine osnovice a, to opseg zapisujemo u obliku $O = b + b + a = 2a + 2a + a$, tj. $20 = 5a$. Duljina osnovice je 4 cm, a kraka 8 cm.



Sl. 1.3.

* * *

5.1. Očito je prvi djelomični umnožak 235038 djeljiv s 3, pa je 78346 prvi faktor. Kako je znamenka jedinica trećeg djelomičnog umnoška 6, slijedi da je znamenka jedinica drugog faktora 1 ili 6. Znamenka 6 otpada jer je umnožak $78346 \cdot 6$ šesteroznamenkasti broj, a treći djelomični umnožak je peteroznamenkasti broj. Zato je drugi faktor 341. Sada lako odredimo preostale znamenke.

$$\begin{array}{ccccccccc}
7 & 8 & 3 & 4 & 6 & \cdot & 3 & 4 & 1 \\
\hline
2 & 3 & 5 & 0 & 3 & 8 & & & \\
 & 3 & 1 & 3 & 3 & 8 & 4 & & \\
 & & & 7 & 8 & 3 & 4 & 6 & \\
\hline
2 & 6 & 7 & 1 & 5 & 9 & 8 & 6 &
\end{array}$$

5.2. Neka je x broj godina koje kćer ima sada. Onda majka sada ima $x+21$ godinu. Za 10 godina kćer će imati $x+10$ godina, a majka $x+31$ godinu. Vrijedi jednadžba $x+31=2(x+10)$. Rješenje jednadžbe je $x=11$. Kćer sada ima 11 godina, a majka će za 10 godina imati 42 godine.

5.3. Broj $701-8$, tj. 693 i broj $592-7$, tj. 585 imaju zajedničkog djelitelja. Rastavimo dobivene brojeve na proste faktore, tj. $693=3\cdot3\cdot7\cdot11$ i $585=3\cdot3\cdot5\cdot13$. Zajednički djelitelji ova dva broja su 3 i 9. Kako djelitelj mora biti veći od ostatka, zaključujemo da je traženi djelitelj broj 9.

5.4. U drugoj, trećoj, četvrtoj i petoj kutiji ima 86+ 60= 146 kuglica, a u svih pet ih ima 200, pa zaključujemo da ih u prvoj ima $200-146=54$. U prvoj i drugoj kutiji ima 104 kuglice, a samo u prvoj ima 54, pa u drugoj ima $104-54=50$ kuglica. U drugoj i trećoj zajedno ima 86 kuglica, a samo u drugoj ima 50 kuglica, pa u trećoj ima $86-50=36$ kuglica. U trećoj i četvrtoj ih ima ukupno 68, a u trećoj ima 36 kuglica, pa u četvrtoj ima $68-36=32$ kuglice. I konačno, u četvrtoj i petoj kutiji ima 60 kuglica, u četvrtoj 32, pa u petoj ima $60-32=28$ kuglica.

5.5. Neka su M, N, K i L vrhovi srednjeg kvadrata. Kako je opseg najmanjeg kvadrata 4 puta manji od opsega najvećeg kvadrata, slijedi da je $60 : 5$, tj. 12 cm opseg najmanjeg kvadrata, a $12 \cdot 4$, tj. 48 cm opseg najvećeg kvadrata. Zato je duljina stranice najmanjeg kvadrata 3 cm, a njegova površina 9 cm^2, te duljina stranice najvećeg kvadrata 12 cm, a njegova površina 144 cm^2. Površina pravokutnog trokuta LAM je $\frac{6 \cdot 6}{2}$, tj. 18 cm^2. Svaki od ostala 3 pravokutna trokuta ima površinu 18 cm^2. Površina kvadrata $MNKL$ jednaka je razlici površine najvećeg kvadrata i zbroja površina 4 pravokutna trokuta, tj. $144 - 4 \cdot 18$, tj. 72 cm^2. Prema tome, površina osjenčanog dijela jednaka je razlici površina srednjeg i najmanjeg kvadrata, odnosno $72 - 9$, tj. 63 cm^2.

* * *

6.1. Neka je x broj učenika kojima učitelj predaje matematiku. Tada je na školskom natjecanju sudjelovalo $\frac{1}{3}x$ učenika, a na općinskom natjecanju $\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{3}x$ učenika. Zato vrijedi jednadžba $\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{3}x = 4$. Rješenje ove jednadžbe je $x = 180$. Broj učenika kojima učitelj predaje matematiku je 180.

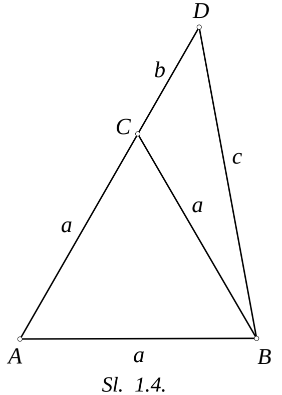
6.2. Četveroznamenkasti broj $\overline{abab}$ možemo pisati kao

$$\overline{abab} = 1000a + 100b + 10a + b = 1010a + 101b = 101(10a + b).$$

Traženi četveroznamenkasti broj bit će djeljiv sa 16 ako je dvoznamenkasti broj $10a + b$ djeljiv sa 16, jer je 101 prost broj. Svi dvoznamenkasti višekratnici broja 16 su brojevi: 16, 32, 48, 64, 80, 96. Traženi četveroznamenkasti brojevi su: 1616, 3232, 4848, 6464, 8080, 9696.

6.3. Neka su a, b, c tri prirodna broja. Tada je $\frac{a+b+c}{2} = 1996$, ili $a + b + c = 2 \cdot 1996$, tj. $a + b + c = 3992$. Kako je $b = 3a$ i $c = \frac{1}{3}a + 1$, zamjenom u zadnjoj jednakosti dobivamo $a + 3a + \frac{1}{3}a + 1 = 3992$. Rješenje ove jednadžbe je $a = 921$. Sad lako odredimo $b = 2763$ i $c = 308$.

6.4.

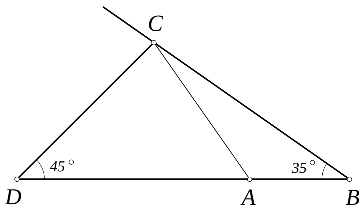


Sl. 1.4.

Neka je a duljina stranice jednakostraničnog trokuta ABC, $|CD| = b$, $|BD| = c$. U trokutu ABD vrijedi $2a+b+c = 67$, a u trokutu BCD vrijedi $a+b+c = 53$.

Iz $2a+b+c=67$ dobivamo redom $a+a+b+c=67$, $a+53=67$, tj. $a=14$. Opseg trokuta ABC je 42 cm.

6.5. Neka je $\sphericalangle BAC=\alpha, \sphericalangle ABC=\beta, \sphericalangle ACB=\gamma$ i γ_1 vanjski kut kod vrha C. U trokutu BCD vrijedi $\sphericalangle BCD=180^\circ-(35^\circ+45^\circ)$, ili $\sphericalangle BCD=180^\circ-80^\circ$, tj. $\sphericalangle BCD=100^\circ$. Sada je očito $\gamma+\frac{\gamma_1}{2}=100^\circ$, a zbog $\gamma_1=\alpha+\beta$ (svojstvo vanjskog kuta trokuta), tj. zbog $\frac{\gamma_1}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$, vrijedi jednakost $100^\circ=\gamma+\frac{\alpha+\beta}{2}$, odnosno $100^\circ=\frac{2\gamma+\alpha+\beta}{2}$, ili $100^\circ=\frac{\gamma+\gamma+\alpha+\beta}{2}$, tj. $100^\circ=\frac{\gamma+180^\circ}{2}$. Rješenje zadnje jednadžbe je $\gamma=20^\circ$. Zato je $\alpha=180^\circ-(35^\circ+20^\circ)$, tj. $\alpha=125^\circ$.



Sl. 1.5.

* * *

7.1. Neka je x duljina puta uzbrdo, odnosno nizbrdo. Tada je biciklist udaljenost uzbrdo prešao za $\frac{x}{10}$ sati, a nizbrdo za $\frac{x}{15}$ sati. Zato vrijedi jednadžba $\frac{x}{10}-\frac{x}{15}=\frac{12}{60}$. Rješenje ove jednadžbe je $x=6$. Duljina puta uzbrdo je 6 km.

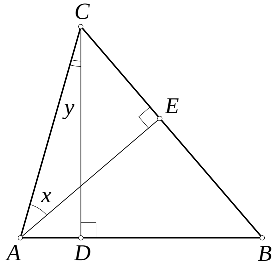
7.2. Neka je $\frac{x}{a}$ prvi razlomak, $\frac{y}{b}$ drugi i $\frac{z}{c}$ treći razlomak. Tada je $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{83}{72}$. Odnose brojnika možemo zapisati produženim razmjerom $x:y:z=5:7:1$, odnosno vrijedi da je $x:z=5:1$, tj. $x=5z$, odnosno $y:z=7:1$, tj. $y=7z$. Odnose nazivnika možemo zapisati razmjerima $c:a=1:4$, tj. $a=4c$, odnosno $b:c=3:2$, ili $2b=3c$, tj. $b=\frac{3c}{2}$. Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u prvu jednakost dobivamo redom

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{83}{72}, \frac{5z}{4c}+\frac{7z}{\frac{3}{2}c}+\frac{z}{c}=\frac{83}{72}, \frac{5z}{4c}+\frac{14z}{3c}+\frac{z}{c}=\frac{83}{72},$$

$\frac{15z+56z+12z}{12c}=\frac{83}{72}$, $\frac{83z}{12c}=\frac{83}{72}$. Sad je nužno $z=1$ i $c=6$. Zato je $x=5, y=7, a=24, b=9$. Prema tome, traženi su razlomci $\frac{x}{a}=\frac{5}{24}, \frac{y}{b}=\frac{7}{9}, \frac{z}{c}=\frac{1}{6}$.

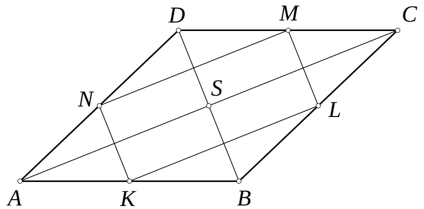
7.3. Neka je x broj stranica koje je Nevenka pročitala prvi dan. Onda je drugi dan pročitala $1.2x$ stranica, treći dan $1.44x$ stranica i četvrti dan $1.728x$ stranica. Zato vrijedi jednadžba $x+1.728x=1.2x+1.44x+11$. Rješenje ove jednadžbe je $x=125$. Nevenka je prvi dan pročitala 125, drugi dan 150, treći dan 180, a četvrti dan 216 stranica. Knjiga ima 671 stranicu.

7.4. Neka je $\sphericalangle CAB=\alpha$, $\sphericalangle ABC=\beta$, $\sphericalangle ACB=\gamma$, $\sphericalangle CAE=x$, $\sphericalangle ACD=y$. U pravokutnom trokutu AEC vrijedi $x+\gamma=90^\circ$, a u pravokutnom trokutu ADC vrijedi $y+\alpha=90^\circ$. Zbrajanjem ove dvije jednakosti dobivamo $x+y+\alpha+\gamma=180^\circ$, a zbog $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ dobivamo novu jednakost $x+y+\alpha+\gamma=\alpha+\beta+\gamma$, ili $x+y=\beta$, odakle je $\sphericalangle CAE+\sphericalangle ACD=\sphericalangle ABC$.



Sl. 1.6.

7.5. Neka je četverokut $ABCD$ romb, a točke K,L,M,N redom polovišta stranica $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD}$ i $\overline{AD}$, te neka je točka S sjecište dijagonale $\overline{AC}$ i dijagonale $\overline{BD}$. Očito je dužina $\overline{NK}$ srednjica trokuta ABD, a dužina $\overline{ML}$ srednjica trokuta BCD, pa je $NK \parallel BD$, odnosno $ML \parallel BD$, iz čega slijedi da je $NK \parallel ML$.



Sl. 1.7.

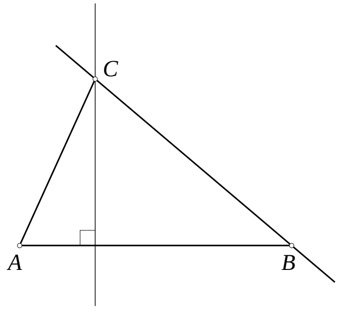
U trokutu ABC srednjica je dužina $\overline{KL}$, a dužina $\overline{MN}$ je srednjica trokuta ACD. Iz toga slijedi da je $KL \parallel AC$, odnosno $MN \parallel AC$, a to znači da je $KL \parallel MN$ (svojstvo tranzitivnosti paralelnih pravaca). Kako su nasuprotne stranice četverokuta $KLMN$ paralelne, zaključujemo da je četverokut $KLMN$ paralelogram. Kut $\sphericalangle NKL$ i kut $\sphericalangle ASB$ su dva kuta s međusobno usporednim kracima, a zbog $\sphericalangle ASB=90^\circ$, jer su dijagonale romba međusobno okomite, nužno slijedi da je $\sphericalangle NKL=90^\circ$. Ako paralelogram ima jedan pravi kut, onda su nužno i ostala tri kuta prava, a to znači da je četverokut $KLMN$ pravokutnik.

* * *

8.1. Prvo rješenje. Neka je $x=\sqrt{20+2\sqrt{19}}+\sqrt{20-2\sqrt{19}}$. Ako ovu jednakost kvadriramo, dobivamo redom:
$x^2=20+2\sqrt{19}+2\sqrt{(20+2\sqrt{19})(20-2\sqrt{19})}+20-2\sqrt{19}$, $x^2=40+2\sqrt{400-4\cdot 19}$, $x^2=40+2\cdot 18$, $x^2=76$, ili $x^2=4\cdot 19$, tj. $x=2\sqrt{19}$.

Drugo rješenje. $\sqrt{20+2\sqrt{19}}+\sqrt{20-2\sqrt{19}}=\sqrt{(\sqrt{19}+1)^2}$ $+\sqrt{(\sqrt{19}-1)^2}=\sqrt{19}+1+\sqrt{19}-1=2\sqrt{19}.$

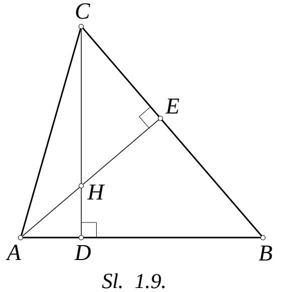
8.2. Rješenje sustava jednadžbi $y=3x-7, y=2x+8$ jeste $x=15, y=38$, a to su koordinate vrha C, tj. $C(15,38)$. Kako je pravac AB okomit na pravac čija je jednadžba $y=2x+8$, to ćemo jednadžbu pravca AB odrediti po formuli $y-y_0=a(x-x_0)$, pri čemu je $a=-\frac{1}{2}$, a (x_0,y_0) su koordinate točke A. Zato vrijedi $y-2=-\frac{1}{2}(x+4)$, ili $y=-\frac{1}{2}x$. Rješenje sustava $y=-\frac{1}{2}x, y=3x-7$ jeste $x=2, y=-1$, a to su koordinate vrha B, tj. $B(2,-1)$.



Sl. 1.8.

8.3. Neka je x vrijeme za koje je avion preletio navedenu udaljenost bez povećanja brzine. Tada je taj put preletio brzinom $\frac{6000}{x}$ km na sat. Da je svakog sata preletio 100 km više, avion bi danu udaljenost preletio brzinom $\frac{6000}{x-2}$ km na sat. Zato vrijedi jednadžba $\frac{6000}{x-2}=\frac{6000}{x}+100$. Nakon sređivanja dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2-2x-120=0$. Dalje vrijedi $x^2-12x+10x-120=0, x(x-12)+10(x-12)=0$, ili $(x-12)(x+10)=0$. Sad je očito samo $x-12=0$, tj. $x=12$. Avion je udaljenost od 6000 km preletio za 12 sati.

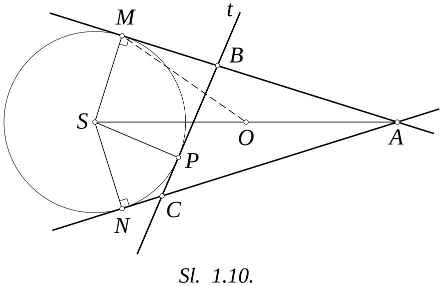
8.4.



Sl. 1.9.

Neka je točka D nožište visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$, točka E nožište visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$ i neka je točka H ortocentar trokuta ABC. Kako je $\measuredangle ABC=45^\circ$, a $\measuredangle CDB=90^\circ$, slijedi da je $\measuredangle BCD=45^\circ$, a to znači da je pravokutni trokut CDB jednakokračan, tj. vrijedi $|CD|=|BD|$, pa je $|BC|=|CD|\sqrt{2}$, ili $|CD|\sqrt{2} = 10\sqrt{3}$, tj. $|CD| = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$. Pravokutni trokut ADC je polovica jednakostraničnog trokuta, jer je $\sphericalangle ADC = 90^\circ$, a $\sphericalangle CAD = 60^\circ$, pa je $|CD| = \frac{|AC|\sqrt{3}}{2}$, odnosno $5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{|AC|\sqrt{3}}{2}$, ili $10\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = |AC|\sqrt{3}$, tj. $|AC| = 10\sqrt{2}$, a zbog $|AD| = \frac{|AC|}{2}$ slijedi da je $|AD| = \frac{10\sqrt{2}}{2}$, tj. $|AD| = 5\sqrt{2}$. Očito je u pravokutnom trokutu CEH kut $\sphericalangle CHE = 45^\circ$, iz čega slijedi da je $\sphericalangle AHD = 45^\circ$ (vršni kutovi), pa je $\sphericalangle HAD = 45^\circ$, a to znači da je pravokutni trokut ADH jednakokračan, tj. $|AD| = |HD|$. Zato je $|AH| = |AD|\sqrt{2}$, ili $|AH| = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, tj. $|AH| = 10$.

8.5. Neka je točka S središte dane kružnice polumjera r, a točka O središte kružnice promjera $\overline{AS}$. Konstrukcija dvije tangente iz točke A na danu kružnicu izvodi se primjenom Talesovog poučka. Lako se dokaže da je $\triangle SMO \cong \triangle SNO$, jer je $|SM| = |SN| = r$ i $|OS| = |OM| = |ON|$, pa je $\sphericalangle OSM = \sphericalangle OSN$. Sada dokažimo da je $\triangle SMA \cong \triangle SNA$. Naime, $|SM| = |SN| = r$, dužina $\overline{AS}$ je zajednička stranica i $\sphericalangle ASM = \sphericalangle ASN$, a to znači da je $|AM| = |AN|$. Pravac CN i pravac CP su dvije tangente iz točke C na danu kružnicu, a pravci BP i BM su druge dvije tangente na danu kružnicu. Prema prethodno dokazanom slijedi da je $|CN| = |CP|$ i $|BP| = |BM|$. Kako je $|BC| = |BP| + |CP|$, slijedi da je opseg trokuta ABC jednak $|AB| + |BC| + |AC| = |AB| + |BP| + |CP| + |AC|$ ili $|AB| + |BC| + |AC| = |AB| + |BM| + |CN| + |AC|$, tj. $|AB| + |BC| + |AC| = |AM| + |AN|$.



Sl. 1.10.

* * *

1.1. Pretpostavimo da postoje takvi brojevi. Tada iz identiteta

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

i danih uvjeta u zadatku slijedi

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 63^2 - 2 \cdot 1996 \\ &= 3969 - 3992 = -23 < 0. \end{aligned}$$

Kako smo došli do proturječja, polazna pretpostavka nije istinita, tj. takvi brojevi ne postoje.

1.2. Promatrajmo zbroj kvadrata pet uzastopnih cijelih brojeva $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$, tj.

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5(n^2+2).$$

Da bi ovaj broj bio potpun kvadrat, broj n^2+2 morao bi biti djeljiv s 5, a to znači da bi n^2 morao završavati znamenkom 3 ili 8.

No, to je nemoguće jer kvadrat cijelog broja završava samo jednom od znamenaka 0, 1, 4, 5, 6 ili 9.

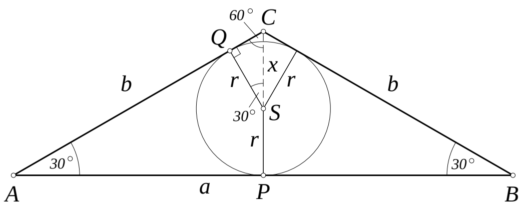
1.3. Množenjem jednadžbe sa $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ dobivamo nakon sređivanja

$$x=\frac{8-5a}{4(a+3)}.$$

Za $a=-3$ je $8-5\cdot(-3)\neq 0$ i stoga za $a=-3$ jednadžba nema rješenje.

Iz istih razloga $x=-1$ i $x=2$ ne mogu biti rješenja. Uvrstimo li $x=-1$, dobivamo $a=20$, odnosno za $x=2$ dobivamo $a=-\frac{16}{13}$. Dakle, za $a\in\{-3,-\frac{16}{13},20\}$ jednadžba nema rješenje.

1.4.



Sl. 1.11.

Uz oznake kao na slici trokut CQS je polovica jednakostraničnog trokuta stranice $x=|CS|$. Zato je

$$r=\frac{x}{2}\sqrt{3}\quad\Longrightarrow\quad x=2\sqrt{3}.$$

Označimo s $a=|AB|$, $v=r+x=3+\sqrt{3}$, visinu trokuta ABC i $2v=|AC|=|BC|$. Trokut APC je polovica jednakostraničnog, pa je

$$\frac{a}{2}=\frac{2v}{2}\sqrt{3}\quad\Longrightarrow\quad a=12+6\sqrt{3}.$$

Sada je površina trokuta $P=\frac{av}{2}=(36+21\sqrt{3})\ \mathrm{dm}^2$.

* * *

2.1. Iz formula

$$2P=ah_a=bh_b=ch_c=2rs=r(a+b+c),$$

gdje je P površina trokuta, slijedi

$$\begin{aligned} h_a + h_b + h_c &= 2P\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \\ &= r(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \\ &= r\left(3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right). \end{aligned}$$

Kako je $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$, pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b$, itd., slijedi

$$h_a + h_b + h_c \geqslant r(3+2+2+2) = 9r,$$

s jednakošću ako i samo ako je $a = b = c$.

2.2. Prema uvjetu zadatka je

$$x_1 - x_2 = 5, \quad x_1^3 - x_2^3 = 35,$$

odakle slijedi $\quad x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 7.$

Sada je

$$\begin{aligned} q = x_1x_2 &= \frac{1}{3}[(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - (x_1 - x_2)^2] \\ &= \frac{1}{3}(7 - 25) = -6. \end{aligned}$$

Također

$$p^2 = (x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2 = 25 - 24 = 1$$

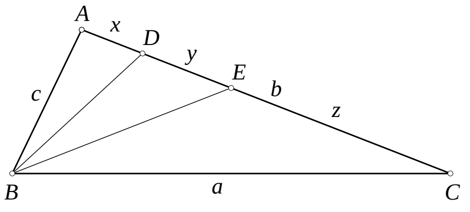
te je $p = \pm 1$.

2.3. Primijetimo da je $\omega^3 = 1$, $\omega^4 = \omega$, $\omega + \omega^2 = -1$, odakle je

$$\begin{aligned} &(a+b+c)(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega) \\ &\qquad = (a+b+c)[a^2 + b^2 + c^2 + \omega(ab+bc+ca) + \omega^2(ab+bc+ca)] \\ &\qquad = (a+b+c)[a^2 + b^2 + c^2 - (ab+bc+ca)] \\ &\qquad = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc. \end{aligned}$$

2.4. Označimo $x = |AD|$, $y = |DE|$ i $z = |EC|$ kao na slici.

Primijetimo da je $\measuredangle BCE = \measuredangle EBC$ i $\measuredangle BEA = 2\measuredangle EBC = \measuredangle ABE$. Zato su trokuti BCE i ABE jednakokračni $|BE| = |CE|$ i $|AB| = |AE|$).



Sl. 1.12.

Simetrala kuta ABE je BD. Stoga vrijedi

$$x + y + z = b,$$
$$x + y = c,$$
$$x : y = c : z.$$

Rješavanjem ovog sistema dobije se $x = \dfrac{c^2}{b}$, $y = \dfrac{c(b-c)}{b}$, $z = b - c$.

* * *

3.1. Dana jednadžba ekvivalenta je redom sa

$$2(\frac{1}{2}\log_3 x)^2 = \log_3 x \cdot \log_3(\sqrt{2x+1} - 1),$$

tj.

$$\log_3 x(\frac{1}{2}\log_3 x - \log_3(\sqrt{2x+1} - 1) = 0.$$

Treba, dakle, riješiti jednadžbe

$$\log_3 x = 0, \qquad \frac{1}{2}\log_3 x - \log_3(\sqrt{2x+1} - 1) = 0.$$

Rješenje prve jednadžbe je $x = 1$, a druga jednadžba je ekvivalentna sa

$$\sqrt{x} = \sqrt{2x+1} - 1$$

tj.

$$\sqrt{x} + 1 = \sqrt{2x+1} \qquad /^2$$
$$2\sqrt{x} = x \qquad /^2$$

pa je $x = 4$.

Rješenja polazne jednadžbe su $x = 1$ i $x = 4$.

3.2. Transformirajmo jednadžbu u pogodniji oblik:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) \\ &= 2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x + \cos\frac{\pi}{6}\sin x\right) \\ &= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

(a) Promatrajmo jednadžbu $f(x) = m$ tj.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{m}{2}.$$

Ona ima rješenje ako i samo ako je $\frac{m}{2} \in [-1, 1]$, odnosno ako i samo ako je $m \in [-2, 2]$.

(b) Jednadžbu $f(x) = 1$ možemo zapisati u obliku

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

odakle slijedi $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ili $x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Rješenja su oblika $x = 2k\pi$ i $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

(c) Funkcija $f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$ ima maksimum 2. Treba naći one vrijednosti x za koje je

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

Dobijemo, $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Maksimum se postiže za $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$.

3.3. Prvo rješenje. Možemo pretpostaviti da je $\alpha + \beta \neq 90^\circ$ i $\alpha + \beta \neq 270^\circ$. (Dovoljno je, npr. uzeti da je α najmanji i β najveći kut. Tada je $0 < \alpha \leqslant 90^\circ$ i $90^\circ < \beta < 180^\circ$ pa je $90^\circ < \alpha + \beta < 270^\circ$.) Tada je i $\gamma + \delta \neq 90^\circ$ i $\gamma + \delta \neq 270^\circ$.

Vrijedi ova jednakost

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(360^\circ - (\gamma + \delta)) = -\operatorname{tg}(\gamma + \delta),$$

tj.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg}(\gamma + \delta) = 0$$

i nadalje

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} + \frac{\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta}{1 - \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta} = 0.$$

Kada ovo sredimo dobijemo

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta.$$

Dijeljenjem s $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta$ dobivamo traženu jednakost.

Drugo rješenje. Kao u prvom rješenju možemo pretpostaviti da je $\alpha + \beta \neq 90^\circ$ i $\alpha + \beta \neq 270^\circ$.

Vrijedi ova jednakost

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \operatorname{tg}(360^\circ - \delta) = -\operatorname{tg}\delta,$$

tj.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)+\operatorname{tg}\delta=0.$$

Sada računamo

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)&=\operatorname{tg}((\alpha+\beta)+\gamma)=\dots\\&=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma)}.\end{aligned}$$

Sada vrijedi

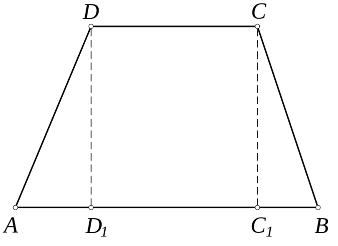
$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma)}+\operatorname{tg}\delta=0,$$

odnosno

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\delta=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\delta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta.$$

Dijeljenjem s $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta$ dobijemo traženu jednakost.

3.4. Prvo rješenje.



Sl. 1.13.

Označimo sa C_1 i D_1 nožišta okomica spuštenih iz C i D na AB. Iz trokuta AD_1D dobivamo $|AD|=d=\frac{2r}{\sin\alpha}$, a iz trokuta BCC_1, $|BC|=b=\frac{2r}{\sin\beta}$.

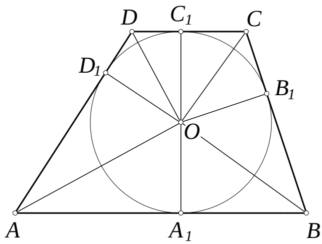
Četverokut $ABCD$ je tangencijalan pa je $a+c=b+d$. Odredimo površinu trapeza:

$$\begin{aligned}P_{ABCD}&=\frac{1}{2}(a+c)v=\frac{1}{2}(b+d)\cdot 2r\\&=r(b+d)=r\left(\frac{2r}{\sin\alpha}+\frac{2r}{\sin\beta}\right)\\&=2r^2\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right).\end{aligned}$$

Kako je površina kruga jednaka $r^2\pi$ traženi omjer je jednak

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right).$$

Drugo rješenje.



Sl. 1.14.

Označimo točke dodira trapeza i upisane kružnice s A_1, B_1, C_1, D_1. Označimo $|AD_1| = |AA_1| = x$, $|BA_1| = |BB_1| = y$, $|CB_1| = |CC_1| = z$, $|DC_1| = |DD_1| = w$. Tada je površina trapeza $P = rs = r(x+y+z+w)$, (s je poluopseg).

Iz trokuta OAA_1 imamo $x = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Analogno je $y = r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$.

Iz trokuta OCC_1 je $z = r\operatorname{ctg}\frac{\pi-\alpha}{2} = r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ i slično $w = r\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

Stoga je

$$P = r^2\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right).$$

Iz $\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = \frac{2}{\sin 2x}$, slijedi

$$P = 2r^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right).$$

Kako je površina kruga jednaka $r^2\pi$ traženi omjer je jednak

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right).$$

* * *

4.1. Prvo rješenje. Uvjet (b) možemo zapisati u obliku

$$n^2 f(n) = f(1) + 2f(2) + 3f(3) + \ldots + (n-1)f(n-1) \quad \text{za} \quad n \geqslant 2.$$

Nađimo prvih nekoliko vrijednosti za $f(n)$:

$$f(2) = \frac{1}{4}, \quad f(3) = \frac{1}{6}, \quad f(4) = \frac{1}{8}, \quad f(5) = \frac{1}{10}.$$

Slutimo da je $f(n) = \frac{1}{2n}$ za $n \geqslant 2$. Dokažimo ovu slutnju metodom matematičke indukcije.

Baza indukcije: Za $n = 2$ tvrdnja vrijedi.

Pretpostavka: Neka je za neki $n \geqslant 2$, $\quad f(n) = \frac{1}{2n}$.

Korak indukcije:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \frac{1}{(n+1)^2}(f(1)+2f(2)+\ldots+(n-1)f(n-1)+nf(n)) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2}(n^2f(n)+nf(n)) = \frac{1}{(n+1)^2}n(n+1)f(n) \\ &= \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Odakle slijedi da tvrdnja vrijedi i za $n+1$.

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbf{N}$, pa je $f(1996) = \frac{1}{3992}$.

Drugo rješenje. Za $n = 2$, $f(1) + 2f(2) = 2\cdot 3f(2) \implies f(2) = \dfrac{1}{4}$.

Za $n > 2$ vrijedi

$$f(1) + 2f(2) + \ldots + (n-1)f(n-1) = (n-1)\cdot nf(n-1).$$

Iz pretpostavke indukcije i ove jednakosti slijedi

$$(n-1)\cdot nf(n-1) + nf(n) = n(n+1)f(n),$$

a odatle

$$(n-1)f(n-1) = nf(n).$$

Stavljajući u dobivenu jednakost redom 3, 4,. . . , n dobivamo

$$2f(2) = 3f(3) = \ldots = (n-1)f(n-1) = nf(n),$$

odnosno

$$f(n) = \frac{2}{n}\cdot f(2) = \frac{1}{2n}$$

zbog $f(2) = \dfrac{1}{4}$. Zato je

$$f(1\,996) = \frac{1}{3\,992}.$$

4.2. (a) U aritmetičkom nizu svaki član je aritmetička sredina susjednih članova:

$$\begin{aligned} 2(q-x)^2 &= (1-x)^2 + (q^2-x)^2, \\ 2x(1+q^2-2q) &= 1+q^4-2q^2, \\ 2x(1-q)^2 &= (1-q^2)^2, \end{aligned}$$

Kako je $q \neq 1$ to je

$$x = \frac{(1-q)^2(1+q)^2}{2(1-q)^2} \quad\implies\quad x = \frac{(1+q)^2}{2}.$$

Slijedi, za svako $q \in \mathbf{R}$ je $x > 0$.

(b)

$$d = (q-x)^2 - (1-x)^2 = q^2 - 1 + 2x(1-q) = (q-1)(q+1-2x)$$
$$= (q-1)(q+1-(1+q)^2) = q(1-q^2).$$

Ako je aritmetički niz rastući onda je $d > 0$, tj. $q(1-q^2) > 0$. Zbog $q > 0$ dobivamo $1 - q^2 > 0$, odnosno $q \in (0,1)$.

4.3. Kako su točke $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1,2,3,4$ na hiperboli i na kružnici, (x_i, y_i), $i = 1,2,3,4$ su rješenja sustava

$$\begin{cases} xy = 1, \\ x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0. \end{cases}$$

Uvrštavanjem $y = \frac{1}{x}$ u drugu jednadžbu dobijemo

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + Ax + B\frac{1}{x} + C = 0,$$

odnosno

$$x^4 + Ax^3 + Cx^2 + Bx + 1 = 0.$$

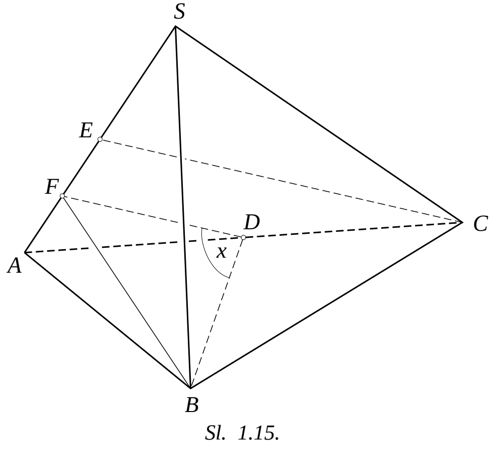
Rješenja ove jednadžbe su x_1, x_2, x_3, x_4 pa slijedi

$$x^4 + Ax^3 + Cx^2 + Bx + 1 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4).$$

Uspoređivanjem slobodnih članova na lijevoj i desnoj strani jednakosti imamo

$$1 = x_1 x_2 x_3 x_4.$$

4.4. Prvo rješenje.



Sl. 1.15.

Neka je točka F na bridu $\overline{AS}$ takva da je $FD \parallel EC$. Kut x kojeg tražimo izračunat ćemo iz trokuta BDF.

$$|BD| = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$
$$|FD| = \frac{1}{2}|EC| = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

($\overline{FD}$ je srednjica trokuta AEC .)

Duljinu $|FB|$ ćemo izračunati iz pravokutnog trokuta FEB, pravi kut je kod vrha E :

$$\begin{aligned}|FB| &= \sqrt{|FE|^2 + |EB|^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{a\sqrt{13}}{4}.\end{aligned}$$

Prema kosinusovom poučku je

$$\cos x = \frac{|BD|^2 + |FD|^2 - |FB|^2}{2|BD| \cdot |FD|} = \frac{1}{6}.$$

Sada je $x = \arccos \frac{1}{6} \approx 80^\circ 24'$.

Drugo rješenje. Izrazimo $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{EC}$ pomoću $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ i $\overrightarrow{SC}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) \\ &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{SC}, \\ \overrightarrow{EC} &= -\tfrac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}.\end{aligned}$$

Možemo uzeti da je $|\overrightarrow{SA}| = |\overrightarrow{SB}| = |\overrightarrow{SC}| = 1.$ Onda je

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Zato je

$$\cos x = \frac{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{EC}}{|\overrightarrow{BD}| \cdot |\overrightarrow{EC}|} = \ldots = \frac{1}{6}$$

i $x = \arccos \frac{1}{6} \approx 80^\circ 24'$.