1.

Uvodni dio

Da bi se s potpunim razumijevanjem mogao pratiti sadržaj ove knjige, nužna su neka znanja iz srednjoškolske nastave matematike. To se u prvom redu odnosi na temeljne pojmove geometrije ravnine i prostora. Iz područja planimetrije trebalo bi znati sve činjenice i poučke o trokutu koji se obrađuju u srednjoškolskom programu. Isto tako, iz područja stereometrije treba vladati činjenicama o temeljnim odnosima pravaca i ravnina u prostoru, s posebnim naglaskom na usporednost i okomitost.

Pri dokazu poučaka i rješavanju zadataka nastojalo se, gdje je to moguće, koristiti geometrijsku (sintetičku) metodu. Međutim, ponegdje se nije mogla izbjeći primjena trigonometrije ili je pak sama narav zadatka, odnosno poučka to zahtijevala. Zato se pretpostavlja da čitatelj vlada temeljnim pojmovima o trigonometrijskim funkcijama i trigonometrijskim poučcima o trokutu.

Isto se tako u tekstu prirodno pojavila primjena vektorskog računa. Zato je potrebno da su čitatelju poznati pojmovi: zbrajanje i oduzimanje, kao i množenje vektora skalarom, zatim linearna nezavisnost vektora, te svojstva skalarnog, vektorskog i mješovitog umnoška vektora. U nekoliko zadataka tetraedar je zadan pomoću vrhova u prostornom koordinatnom sustavu. Zbog toga su potrebna elementarna znanja iz analitičke geometrije prostora, kao što su udaljenost točaka u prostoru, jednadžba ravnine, udaljenost točke od ravnine i slično.

Također su korišteni neki poučci i formule elementarne matematike koji se, neki rjeđe, a neki uopće ne pojavljuju u srednjoškolskim programima matematike.

Takve ćemo poučke i formule posebno navesti, a neke od njih i dokazati.

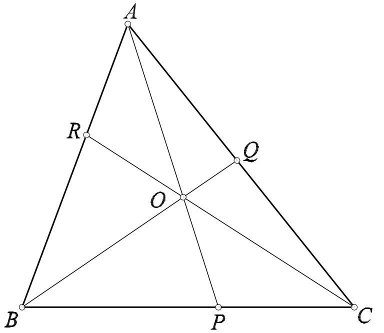
Poznata je **Heronova formula za ploštinu trokuta** kojemu su zadane duljine stranica a, b i c. Ta formula glasi $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gdje je s poluopseg trokuta. Ova se formula može napisati u drugom obliku:

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)}. \qquad \text{(F1)}$$

Formula (F1) je pogodna ako su duljine stranica realni brojevi ili algebarski izrazi pod znakom $\sqrt{\ }$, zbog čega će se u takvim slučajevima više puta koristiti. Dokaz formule može se naći u [2].

Navest ćemo tri posebna poučka za trokut, i to iz dvaju razloga. Prvi je razlog što su ti poučci korišteni u nekim dokazima, a drugi je razlog što postoje analogni poučci za tetraedar, o čemu će u daljnjem tekstu biti više riječi.

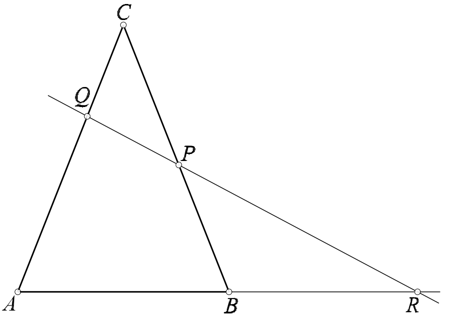
P1. *Neka su na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC redom točke P, Q i R. Pravci AP, BQ i CR sijeku se u jednoj točki ako i samo ako je $|AR| \cdot |BP| \cdot |CQ| = |BR| \cdot |CP| \cdot |AQ|$ (sl. 1.1.).*



Sl. 1.1.

Ovo je **Cevin poučak**. Postavio ga je i dokazao 1678. godine talijanski matematičar **Giovanni Ceva** (1648. – 1734.).

P2. *Ako pravac siječe pravce stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC u točkama P, Q i R, tada vrijedi: $|AR|\cdot|BP|\cdot|CQ| = |BR|\cdot|CP|\cdot|QA|$ (sl. 1.2.).*



Sl. 1.2.

Poučak nosi ime starogrčkog matematičara **Menelaja**, a sljedeći je **Van Aubelov poučak**.

P3. *Ako su P, Q i R točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC uzete tako da se pravci AP, BQ i CR sijeku u točki O, tada vrijedi* $\dfrac{|CO|}{|OR|} = \dfrac{|CQ|}{|QA|} + \dfrac{|CP|}{|PB|}$ *(sl. 1.1.).*

Uočimo neke veze među ovim poučcima. Cevin i Menelajev poučak su takozvani dualni poučci i izražavaju se istom formulom. Uvjeti koje zadovoljava trokut u Cevinom i Van Aubelovom poučku su istovjetni.

Dokazi ovih poučaka mogu se naći u [2]. (U toj je knjizi navedeno više dokaza pojedinog poučka. Tako je Cevin poučak dokazan na sedam načina.)

Isto je tako manje poznat jedan poučak o ortocentru trokuta, a korišten je u knjizi.

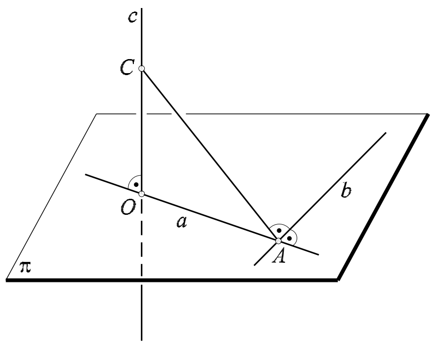
P4. *Ortocentar trokuta dijeli svaku visinu trokuta na dva dijela, tako da je umnožak duljina tih dijelova stalan i jednak* $4R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, *gdje je R polumjer trokutu opisane kružnice, a α, β i γ kutovi trokuta.*

Poučak je također dokazan u [2].

Poučak koji govori o posebnom položaju pravaca u prostoru poznat je kao **poučak o trima okomicama** i glasi:

P5. *Neka su a i b dva međusobno okomita pravca ravnine π, a A njihovo sjecište, i neka je pravac c s točkom O pravca a $(O \neq A)$ okomit na ravninu π. Ako je C bilo koja točka pravca c, tada su pravci CA i b također okomiti.*

Dokaz. Budući da je pravac c okomit na ravninu π, c je okomit na svaki pravac te ravnine, pa je okomit i na pravac b (sl. 1.3.).



Sl. 1.3.

Vidimo da je pravac b okomit na pravce a i c. Zato je b okomit na svaki pravac ravnine što je određuju pravci a i c, a time okomit i na pravac CA, što je tvrdnja poučka. Q.E.D.

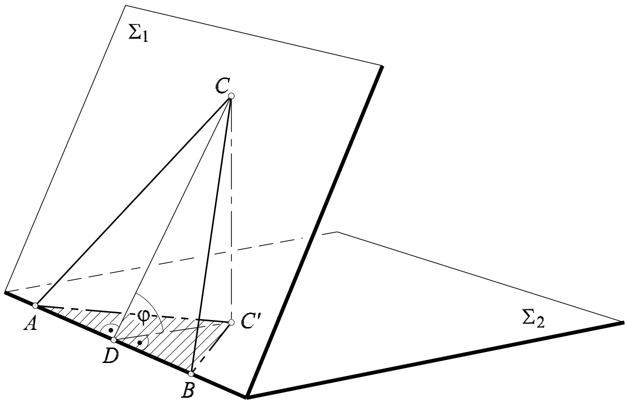
Sljedeći ćemo poučak često koristiti i pri dokazu nekih poučaka i pri rješavanju više zadataka. Zato ćemo taj poučak i dokazati. Poučak glasi:

P6. *Ravnine* $\sum_1$ *i* $\sum_2$ *zatvaraju kut* φ. *Višekut ploštine* P *nalazi se u ravnini* $\sum_1$*, a ortogonalna projekcija tog višekuta na ravninu* $\sum_2$ *je višekut ploštine* $\mathbf{Q}$. *Vrijedi* $\mathbf{Q} = P\cos\varphi$.

Dokaz. Koristimo oznake kao na sl. 1.4. Svaki se višekut može rastaviti na konačan broj trokuta. Ploština trokuta, a time i ploština njegove projekcije ne zavisi o položaju trokuta u ravnini $\sum_1$. Zato je dovoljno dokazati da poučak vrijedi za trokut u položaju kao na slici.

Neka je trokut ABC postavljen u ravnini $\sum_1$ tako da je stranica $\overline{AB}$ na presjeku ravnina, a vrh C u bilo kojoj točki ravnine $\sum_1$. Ako je C' ortogonalna projekcija točke C na ravninu $\sum_2$, tada je trokut ABC' ortogonalna projekcija trokuta ABC.

Ako je D nožište visine trokuta ABC iz vrha C, tada je $P = \dfrac{1}{2}|AB| \cdot |DC|$.

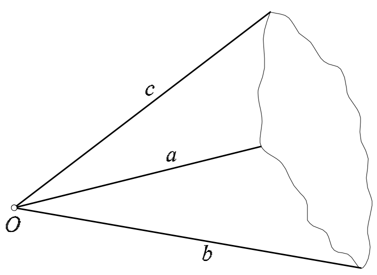


Sl. 1.4.

Prema poučku o trima okomicama (vidi P5), DC' je okomit na AB. To znači da je DC' visina trokuta ABC' iz vrha C'. Zato je $Q = \dfrac{1}{2}|AB| \cdot |DC'| = \dfrac{1}{2}|AB| \cdot |DC| \cos\varphi = P\cos\varphi$. Q.E.D.

Sada ćemo se pozabaviti jednim vrlo važnim pojmom geometrije prostora. Taj pojam i poučke koji su s njim u neposrednoj vezi često ćemo koristiti u daljnjem tekstu. To je **trobrid**.

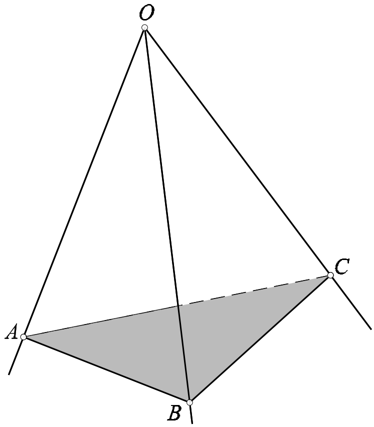
D1. *Neka su a, b i c polupravci prostora koji nisu u istoj ravnini, sa zajedničkim početkom u točki O. Dio prostora omeđen kutovima što ih u parovima određuju ti polupravci zove se trobrid ili triedar.*



Sl. 1.5.

Točka O je vrh, a polupravci a, b i c su bridovi trobrida. Dijelovi ravnina koje određuju po dva brida su strane ili plohe trobrida. Trobrid u ravnini prikazujemo u projekciji, kao na sl. 1.5.

Trobrid je važan pri proučavanju tetraedra. Navedimo jednu analogiju trokut – tetraedar. Ako se kut s vrhom u točki A presiječe pravcem koji krakove kuta siječe u točkama B i C, time je kut podijeljen na dva dijela, jedan omeđen i drugi neomeđen. Omeđeni dio je trokut ABC, kojemu su A, B i C vrhovi.



Sl. 1.6.

Slično bismo mogli definirati i tetraedar: ako se trobrid s vrhom u točki O presiječe ravninom koja bridove trobrida siječe u točkama A, B i C, time je trobrid podijeljen na dva dijela, jedan omeđen i jedan neomeđen. Omeđeni dio je **tetraedar** $ABCO$, kojemu su točke A, B, C i O vrhovi, što je prikazano na sl. 1.6.

U trobridu se definiraju dvije vrste kutova.

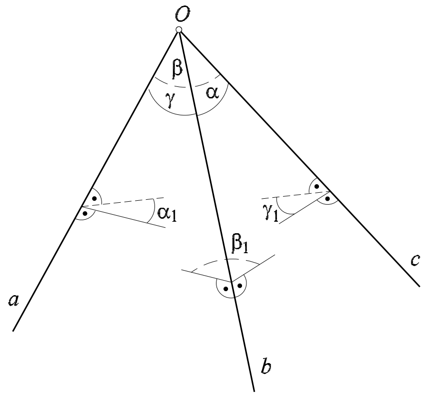
1. *Kutovi što ih određuju po dva brida zovu se* **bridni** *ili* **plošni kutovi** *trobrida. Trobrid ima tri takva kuta.*
2. *Kutovi između dviju strana ili kutovi pojedinih diedara, što ih određuju po dvije strane trobrida. Trobrid očito ima tri takva kuta.*

Ovdje na žalost moram navesti da u hrvatskom matematičkom nazivlju ne postoji usuglašenost glede naziva ovih kutova.

Kada se kaže kut pri određenom bridu trobrida, misli se na kut između dviju strana kojima je taj brid zajednički.

Svakom bridnom kutu pridružujemo kut dviju strana uz brid koji nije brid toga kuta. Kažemo da svakom bridnom kutu pridružujemo nasuprotni kut dviju strana trobrida.

U trobridu s vrhom O i bridovima a, b i c bridne kutove označavat ćemo s α, β i γ, a kutove strana (diedarske kutove) s α_1, β_1 i γ_1, kao što je prikazano na sl. 1.7.



Sl. 1.7.

Vidimo da je nasuprot, na primjer, bridu a bridni kut α, a pripadni kut strana pri tom bridu je α_1. Ista takva usuglašenost oznaka vrijedi i za ine bridove i kutove.

Za bridne kutove trobrida vrijede sljedeći poučci.

P7. *Svaki je bridni kut trobrida manji od zbroja inih dvaju, a veći od razlike tih dvaju kutova.*

Poučak se jednostavno dokaže tako da se jedan brid ortogonalno projicira na ravninu nasuprotne strane, čime se kut nasuprot tom bridu podijeli na dva dijela od kojih je svaki manji od odgovarajućeg bridnog kuta.

P8. *Ako su u trobridu dva bridna kuta jednaka, tada su i nasuprotni kutovi strana jednaki.*

Naputak za dokaz: projicirajte (ortogonalno) zajednički brid jednakih bridnih kutova na nasuprotnu stranu i bilo koju točku tog brida na ina dva brida.

P9. *Ako za bridne kutove trobrida vrijedi $\alpha < \beta < \gamma$, tada za nasuprotne kutove strana vrijedi $\alpha_1 < \beta_1 < \gamma_1$.*

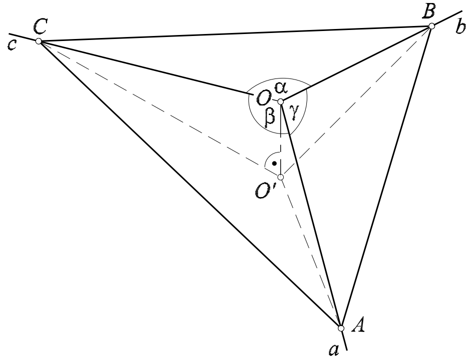
I ovaj se poučak jednostavno dokazuje tako da jedan brid trobrida projiciramo na ravninu nasuprotne strane.

Navedeni poučci podsjećaju na tvrdnje o unutarnjim kutovima trokuta. Znamo da je zbroj tih kutova jednak $180°$.

Međutim, zbroj bridnih kutova trobrida nije stalan i vrijedi sljedeći poučak.

P10. *Zbroj bridnih kutova trobrida manji je od* 360° *.*

Dokaz. Trobrid s vrhom O i bridnim kutovima α, β i γ presiječemo bilo kojom ravninom, tako da ona siječe bridove trobrida u točkama A, B i C, kao na sl. 1.8.



Sl. 1.8.

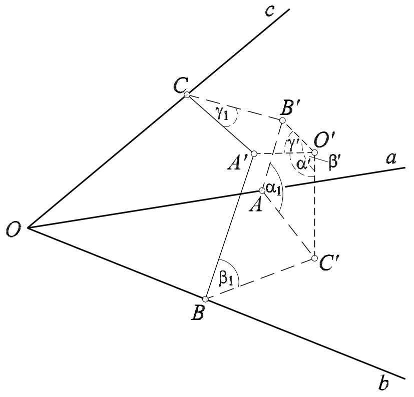
Ako je O' ortogonalna projekcija vrha O na ravninu ABC, tada je očito da vrijedi $\alpha = \sphericalangle BOC < \sphericalangle BO'C$, $\beta = \sphericalangle COA < \sphericalangle CO'A$, $\gamma = \sphericalangle AOB < \sphericalangle AO'B$. Odavde se dobije $\alpha + \beta + \gamma < \sphericalangle BO'C + \sphericalangle CO'A + \sphericalangle AO'B$, ili $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$. Q.E.D.

Isto tako zbroj kutova po dviju strana trobrida nije stalan, o čemu govori sljedeći poučak.

P11. *Za kutove strana (diedarske kutove) trobrida vrijedi:*

$$180^\circ < \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 < 540^\circ.$$

Dokaz. Promatrajmo trobrid s vrhom u točki O. Neka je O' bilo koja točka unutar trobrida, a A', B' i C' projekcije točke O na strane trobrida. Okomice iz tih točaka na bridove trobrida sijeku se u parovima na tim bridovima u točkama A, B i C, kao na sl. 1.9.



Sl. 1.9.

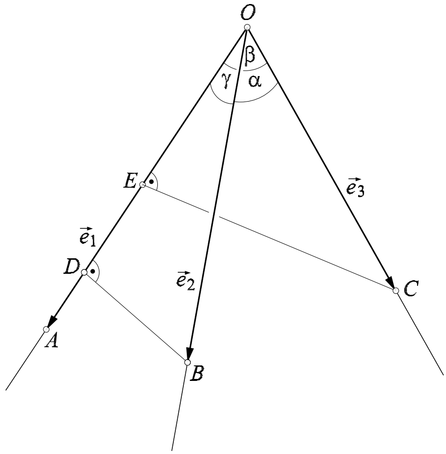
Diedarski kutovi promatranog trobrida su: $\alpha_1 = \sphericalangle C'AB'$, $\beta_1 = \sphericalangle A'BC'$, $\gamma_1 = \sphericalangle B'CA'$. Označimo li bridne kutove trobrida $A'B'C'O'$ s α', β', γ', tada je $\alpha_1 + \alpha' = 180^\circ$, $\beta_1 + \beta' = 180^\circ$, $\gamma_1 + \gamma' = 180^\circ$. Odavde se zbrajanjem dobije $(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)+(\alpha'+\beta'+\gamma') = 540^\circ$. Primijenimo li na trobrid $O'A'B'C'$ poučak P10., neposredno slijedi tvrdnja poučka. Q.E.D.

Sljedeći poučak govori o tome kako se iz poznatih bridnih kutova mogu izračunati kutovi strana trobrida. Za sadržaj ove knjige ovaj je poučak vrlo važan, jer ćemo ga često koristiti.

P12. *Ako su α, β i γ bridni, a α_1, β_1 i γ_1 nasuprotni diedarski kutovi trobrida, tada je*

$$\cos\alpha_1 = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}, \qquad \cos\beta_1 = \frac{\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha},$$
$$\cos\gamma_1 = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Dokaz. Na bridovima trobrida s vrhom u točki O odredimo točke A, B i C tako da su vektori $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}$ jedinični. Neka su D i E nožišta okomica iz točaka B i C na pravac OA. Tada je, po definiciji kuta diedra, $\alpha_1 = \sphericalangle(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{EC})$ (sl. 1.10.).



Sl. 1.10.

Vrijedi $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DO} + \vec{e}_2$, $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EO} + \vec{e}_3$. Kako je $\overrightarrow{DO} \cdot \vec{e}_3 = |DO| \cdot 1 \cdot \cos(-\beta) = -\cos\gamma\cos\beta$, $\overrightarrow{EO} \cdot \vec{e}_2 = -\cos\beta\cos\gamma$, stoga je $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{EC} = \cos\gamma\cos\beta - \cos\beta\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha$. Konačno, zbog $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{EC} = \sin\gamma\sin\beta\cos\alpha_1$, je $\cos\alpha_1 = \dfrac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$. Isto se tako dokažu i ine dvije formule poučka. Q.E.D.

Navedimo formulu za obujam tetraedra određenog vektorima bridova s početcima u jednom vrhu tetraedra

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\,\right| = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{matrix} \right\|. \tag{F2}$$

2.

Definicije, temeljni pojmovi i poučci o tetraedru

Prije nego navedemo samu definiciju tetraedra, kazat ćemo nešto o definiciji općenito. Definicija se često shvaća prekruto, pri čemu se drži da definicija nekog (matematičkog) pojma glasi tako i tako, i nikako drugačije. Ako se u dvjema različitim knjigama za isti pojam (na primjer, za paralelogram) nađu dvije različite definicije, to učenicima stvara ozbiljne poteškoće i nedoumice. Razjasnit ćemo to upravo na primjeru paralelograma, koji ćemo definirati na dva načina.

1. *Četverokut kojemu se dijagonale raspolavljaju zove se paralelogram.*
2. *Četverokut kojemu su dvije stranice usporedne i imaju jednake duljine zove se paralelogram.*

Obje su ove definicije dobre i ispravne. One su i istoznačne ili ekvivalentne, što znači da ako jednu od njih prihvatimo, tada se tvrdnja druge može dokazati. Ali definicije se ne dokazuju. Zato, ako jednu od navedenih izjava smatramo definicijom, tada druga **ne može** biti definicija. Ona je u tom slučaju poučak. Ovo se navelo da se izbjegnu možebitne zabune ili nedoumice kod čitatelja ako u tekstu naiđe na neku definiciju različitu od njemu već poznate.

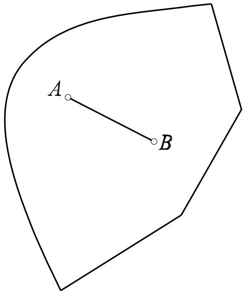
Želimo uvesti analogne definicije trokuta i tetraedra.

Prije nego to učinimo, definirajmo jedan vrlo važan pojam, a to je **konveksan skup**.

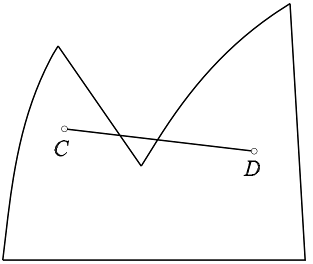
Ako se za bilo koje dvije točke A i B skupa S, i dužina $\overline{AB}$ nalazi unutar skupa S, kažemo da je S konveksan skup. Inače je nekonveksan ili konkavan.

Matematičkim simbolima to se piše: $(\forall A)(\forall B)(A, B \in S \implies \overline{AB} \subset S)$, skup S je konveksan.

Tako je na sl. 2.1. skup S_1 konveksan, a skup S_2 na sl. 2.2. nije konveksan.



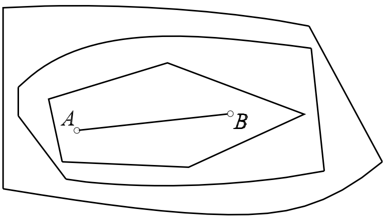
Sl. 2.1.



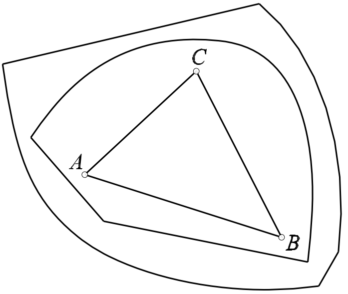
Sl. 2.2.

Naravno da za dvije različite točke A i B postoji beskonačno mnogo konveksnih skupova koji sadrže te točke, što se zaključuje iz sl. 2.3.

Ako je u nizu skupova $S_1, S_2, S_3, \ldots,$ $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \ldots$, kažemo da je S_1 **najmanji** od navedenih skupova. Sa sl. 2.3. lako se zaključi da je najmanji konveksan skup koji sadrži dvije različite točke A, B dužina $\overline{AB}$.



Sl. 2.3.



Sl. 2.4.

Ako su A, B i C bilo koje tri nekolinearne točke (to jest točke koje ne pripadaju istom pravcu), tada je najmanji konveksan skup koji sadrži te tri točke trokut ABC (sl. 2.4.). Zato je ova definicija dobra.

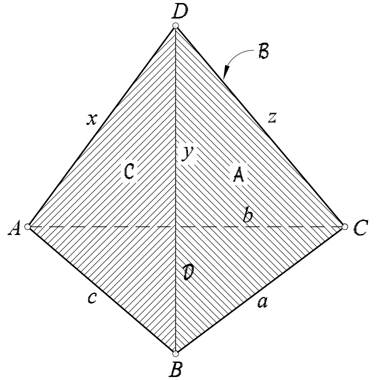
D2. *Trokut je najmanji konveksan skup koji sadrži tri nekolinearne točke. Te su točke vrhovi trokuta.*

Iz definicije trokuta jasno je da je trokut skup u ravnini, jer bilo koje tri nekolinearne točke određuju ravninu.

Točke koje pripadaju istoj ravnini su komplanarne, a one koje ne pripadaju su nekomplanarne.

Definiciji D1. slična je sljedeća definicija tetraedra.

D3. *Tetraedar je najmanji konveksan skup koji sadrži četiri nekomplanarne točke. Te su točke vrhovi tetraedra.*



Sl. 2.5.

Vidimo da je tetraedar prostorni skup točaka, zbog čega se njegova prava slika ne može nacrtati u ravnini. Zato tetraedar crtamo u projekciji, kao na sl. 2.5., gdje je nacrtan tetraedar kojemu su vrhovi točke A, B, C i D. Kazat ćemo kraće da je to tetraedar $ABCD$.

Dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ i $\overline{DC}$ su **bridovi** tetraedra. Vidimo da tetraedar ima šest bridova. Dva brida koja nemaju zajednički vrh su **nasuprotni** bridovi. Tetraedar ima tri para nasuprotnih bridova. Trokuti ABC, DAB, DBC i DCA su **strane** ili **plohe** tetraedra. Tetraedar ima četiri strane. Strane tetraedra nasuprot vrhovima A, B, C i D označavat ćemo $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$.

Iako svjesni razlike, te ćemo oznake radi kratkoće zapisa rabiti i za ploštine tih strana.

Ako posebno istaknemo jednu stranu tetraedra (obično je to ona strana na kojoj tetraedar "stoji"), tada tu stranu zovemo **osnovka** ili **baza** tetraedra. Vrh koji ne pripada toj osnovki zove se kratko **vrh tetraedra**. Ostale su strane, u tom slučaju, **pobočne strane** ili kraće, **pobočke** tetraedra. Ovi nazivi potječu iz činjenice da se tetraedar može definirati pomoću jednog trokuta (osnovke) i jedne točke (vrha) koja ne pripada ravnini toga trokuta. U ovom slučaju i bridovi imaju posebne nazive. Bridovi koji su stranice osnovke su **osnovni**, a bridovi koji se sastaju u vrhu nasuprot osnovki su **pobočni** bridovi tetraedra.

Uvest ćemo neke stalne oznake za tetraedar.

Ako neku dužinu označimo jednim malim slovom, na primjer d, tada često, radi kratkoće, a na štetu preciznosti, ta oznaka znači i duljinu te dužine.

Tako će nam oznake a, b, c, x, y i z, koje ćemo najčešće rabiti za bridove tetraedra $ABCD$ kao na sl. 2.5., značiti same bridove, ali i njihove duljine.

Kod tetraedra razlikujemo dvije vrste kutova.

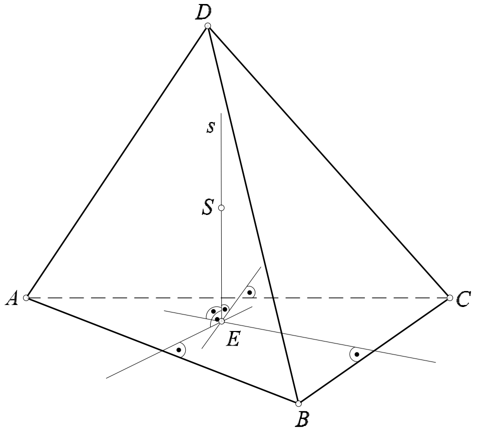
Kutovi koje zatvaraju po dva brida jedne strane zovu se **bridni** kutovi. To su zapravo (unutarnji) kutovi trokuta koji su strane ili plohe tetraedra. Zato se ponegdje zovu i **plošni** kutovi tetraedra. Vidimo da tetraedar ima pri svakom vrhu tri, dakle ukupno 12 bridnih kutova.

Druga vrsta su **kutovi strana** tetraedra. To su zapravo diedri čija svaka strana sadrži po jednu stranu tetraedra. Nije točno kazati da su to kutovi ravnina po dviju strana tetraedra, i to iz istog razloga zbog kojih kutovi trokuta nisu i kutovi po dvaju pravaca stranica trokuta. Kao što svakom vrhu trokuta pripada jedan (unutarnji) kut toga trokuta, tako i svakom bridu tetraedra pripada jedan (unutarnji) kut strana tetraedra. To znači da tetraedar ima šest kutova strana.

Tri temeljna poučka o tetraedru

P13. *Simetralne ravnine bridova tetraedra sijeku se u jednoj točki. Ta je točka središte sfere opisane tetraedru.*

Dokaz. Promatrajmo najprije simetralne ravnine bridova $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ tetraedra $ABCD$ (sl. 2.6.). Te ravnine sijeku ravninu trokuta ABC u pravcima okomitim na stranice toga trokuta. A budući da ti pravci prolaze polovištima stranica, oni se sijeku u jednoj točki, koju smo označili s E, a koja je središte trokutu ABC opisane kružnice. Kako su ove tri ravnine okomite na ravninu ABC, sijeku se u jednom pravcu s, koji je očito okomit na ravninu ABC, a prolazi točkom E. Svaka točka pravca s jednako je udaljena od vrhova A, B i C.



Sl. 2.6.

Neka simetralna ravnina brida $\overline{CD}$ siječe pravac s u točki S. Tada je $|SC| = |SD|$. Na temelju svega je $|SA| = |SB| = |SC| = |SD|$. Međutim, iz $|SA| = |SD|$ i $|SB| = |SD|$ zaključujemo da i simetralne ravnine bridova $\overline{AD}$ i $\overline{BD}$ sadrže točku S, a to opet znači da se simetralne ravnine svih bridova tetraedra sijeku u točki S. Kako je ta točka jednako udaljena od svih vrhova tetraedra, ona je središte tetraedru opisane sfere. Q.E.D.

P14. *Simetralne ravnine diedara što ih određuju strane tetraedra sijeku se u jednoj točki. Ta je točka središte tetraedru upisane sfere.*

Dokaz. Promatrajmo tetraedar $ABCD$. Simetralne ravnine kutova strana uz bridove $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$, to jest uz bridove strane ABC, označimo s Δ_1, Δ_2 i Δ_3. Među tim ravninama nema usporednih, zbog čega se one sijeku ili u jednom pravcu ili u jednoj točki. Da bi se te ravnine sjekle u jednom pravcu, svaka od njih bi morala biti okomita na ravninu ABC, što je nemoguće. Zato se te ravnine sijeku u jednoj točki, koju označimo sa S. Točka S pripada ravnini Δ_1, zbog čega je jednako udaljena od strana ABC i ABD. Isto je tako, zbog $S \in \Delta_2$ i $S \in \Delta_3$, točka S jednako udaljena od strana BCA i BCD, odnosno od strana CAB i CAD. To znači da je točka S jednako udaljena od ravnine svake strane promatranog tetraedra, to jest svaka od njih je tangencijalna ravnina sfere sa središtem u točki S. Lako je pokazati da je ta točka jednoznačno određena, to jest da se u toj točki sijeku i simetralne ravnine kutova strana uz bridove ostalih strana tetraedra. Time je poučak dokazan. Q.E.D.

Prije nego prijeđemo na poučak o težištu tetraedra, moramo kazati nešto više o problemu težišta općenito.

Težište je prvotno fizikalni pojam. Uveo ga je, definirao i obradio *Arhimed* (oko 287.–212. pr. Kr.). O tome čitatelj može više naći u knjižici: B. Pavković, P. Mladinić *Arhimedova metoda težišta*, HMD, Zagreb, 1998. Navest ćemo tri temeljna stavka koje ćemo koristiti.

1. *Težište sustava dvaju tijela jednakih masa nalazi se u polovištu spojnice tih tijela.*
2. *Težište sustava dvaju tijela različitih masa* m_1 *i* m_2, *smještenih u točkama* A *i* B, *nalazi se u točki* T *na dužini* $\overline{AB}$, *pri čemu vrijedi* $|AT| \cdot m_1 = |BT| \cdot m_2$.
3. *Težište homogenog štapa nalazi se u njegovom polovištu.*

Pod tijelom se podrazumijeva tijelo oblika kugle zanemariva polumjera, a pod homogenim štapom tijelo oblika valjka zanemarive ploštine osnovke.

Kada govorimo o težištu trokuta, možemo razlikovati četiri težišta.

1. *Vršno težište trokuta, to jest težište sustava triju tijela jednakih masa, smještenih u vrhovima trokuta.*
2. *Stranično težište trokuta, to jest težište triju homogenih štapova čiji su rubovi u vrhovima trokuta.*
3. *Plošno težište trokuta, to jest težište uspravne trostrane prizme zanemarive visine.*
4. *Fizikalno težište trokuta.*

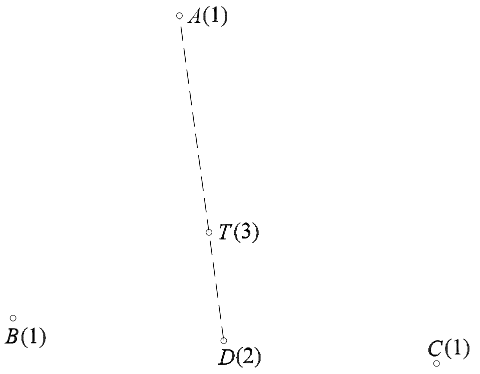
Plošno težište trokuta smatra se i fizikalnim težištem trokuta.

Odredimo vršno težište trokuta.

Neka su u nekolinearnim točkama A, B i C postavljena tijela jednake mase, koju ćemo uzeti za jediničnu masu. To pišemo $A(1)$, $B(1)$, $C(1)$. Sustav tijela $A(1)$, $B(1)$ možemo zamijeniti njihovim težištem, koje se, prema stavku 1., nalazi u polovištu dužine $\overline{BC}$, to jest s $D(2)$. To znači da se težište sustava tijela A, B, C podudara s težištem sustava tijela $A(1)$, $D(2)$. Prema stavku 2. to je točka T na dužini $\overline{AD}$, za koju vrijedi $1 \cdot |AT| = 2 \cdot |BT|$ ili $|AT| : |BT| = 2 : 1$.

Matematički se to težište može definirati ovako:

odredimo polovište stranice $\overline{BC}$, točku D, a potom na dužini $\overline{AD}$ točku T tako da je $|AT| : |BT| = 2 : 1$ (sl. 2.7.).



Sl. 2.7.

Dužinu $\overline{AD}$ zovemo težišnicom, a točku T težištem trokuta ABC.

Ovako definirano težište je **matematičko** težište, jer je određeno samo matematičkim pojmovima, nezavisno o fizikalnim veličinama (masama).

Vidimo da se matematičko težište podudara s vršnim težištem trokuta. Može se pokazati da se to težište podudara i s plošnim, odnosno fizikalnim, a ne podudara sa straničnim težištem.

Zato ćemo pod težištem trokuta podrazumijevati njegovo matematičko težište.

Pokazat ćemo još jedno važno matematičko svojstvo težišta trokuta.

Ako je O bilo koja točka prostora, a T težište trokuta ABC, tada je

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right). \tag{F3}$$

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right),\end{aligned}$$

odnosno $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$. Q.E.D.

Sada ćemo definirati težište tetraedra. Jasno je da bismo mogli definirati čak pet težišta tetraedra: vršno, bridno, plošno, volumno (fizikalno) i matematičko. Bavit ćemo se samo **matematičkim težištem**, ne ulazeći u to podudara li se ono s nekim od inih težišta.

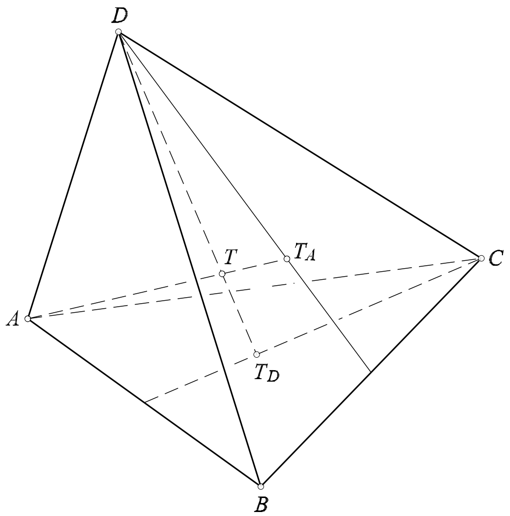
Najprije definirajmo težišnice tetraedra.

D4. *Spojnica vrha tetraedra s težištem nasuprotne strane zove se težišnica tetraedra.*

Očito je da tetraedar ima četiri težišnice. Vrijedi poučak o težištu tetraedra.

P15. *Težišnice tetraedra sijeku se u jednoj točki — težištu tetraedra. Težište tetraedra dijeli svaku težišnicu u omjeru* $3:1$, *mjereći od vrha tetraedra.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ tetraedar i O bilo koja točka prostora, a T_D težište strane ABC (sl. 2.8.).



Sl. 2.8.

Prema (F3) vrijedi $\overrightarrow{OT_D} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$. Odredimo položaj točke T tako da je $|DT| : |TT_D| = 3 : 1$, ili, što je isto, da je $\overrightarrow{DT} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DT_D}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DT} = \overrightarrow{OD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DT_D} = \overrightarrow{OD} + \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{DT_2} - \overrightarrow{OD}\right) \\ = \overrightarrow{OD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{OD} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)\end{aligned}$$

Odavde slijedi važna formula

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right). \tag{F4}$$

Postupkom sličnim kao kod trokuta lako se pokaže da (F4) vrijedi i za vršno težište tetraedra, odnosno za sustav od četiriju tijela jednakih masa, postavljenih u točke A, B, C i D.

Pokažimo da je $\overrightarrow{AT} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AT_A}$, gdje je T_A težište strane BCD. Vrijedi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OT} &= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) - \overrightarrow{OA} \\ &= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - 3\overrightarrow{OA}\right)\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}\overrightarrow{AT_A} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OT_A} - \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} &= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) - \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} \\ &= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - 3\overrightarrow{OA}\right).\end{aligned} \tag{2}$$

Iz (1) i (2) zaključujemo da je $\overline{AT} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AT_A}$.

Iz posljednje jednakosti zaključujemo da se težišnice iz vrhova A i D tetraedra $ABCD$ sijeku u točki T, koja svaku od tih težišnica dijeli u omjeru $3:1$. Na isti se način pokaže da to vrijedi i za ine dvije težišnice, čime je poučak o težištu tetraedra dokazan. Q.E.D.

Vidimo da za tri značajne točke trokuta (središte opisane kružnice, središte upisane kružnice i težište) postoje analogne točke tetraedra (središte opisane sfere, središte upisane sfere i težište).

Sada se samo po sebi postavlja već prije postavljeno pitanje; postoji li u tetraedru analogna točka sjecištu visina, ortocentru trokuta.

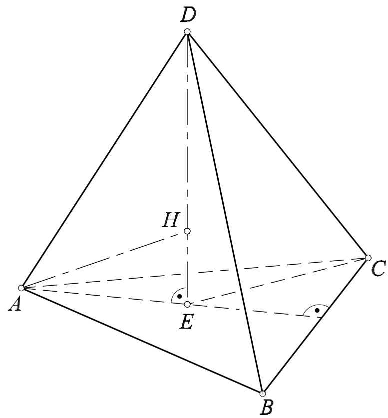
Prije nego odgovorimo na to pitanje, definirat ćemo visine tetraedra i dokazati dva poučka.

D5. *Okomica spuštena iz vrha tetraedra na ravninu nasuprotne strane zove se visina tetraedra.*

Često će se, kao što je već rečeno i za bridove, pod visinom smatrati definirana dužina, ali i, radi kratkoće, duljina te dužine.

P16. *Visine tetraedra sijeku se u jednoj točki ako i samo ako su nasuprotni bridovi tetraedra međusobno okomiti.*

Dokaz. Neka se visine tetraedra $ABCD$ sijeku u točki H (sl. 2.9.). To znači da je DH okomito na ravninu ABC i AH okomito na ravninu BCD. Odavde zaključujemo da je pravac BC okomit i na DH i na AH, što znači da je pravac BC okomit na ravninu DAH, a zbog toga okomit na svaki pravac te ravnine. Dakle, pravci BC i AD međusobno su okomiti.



Sl. 2.9.

Isto se to dokaže i za ina dva para nasuprotnih bridova.

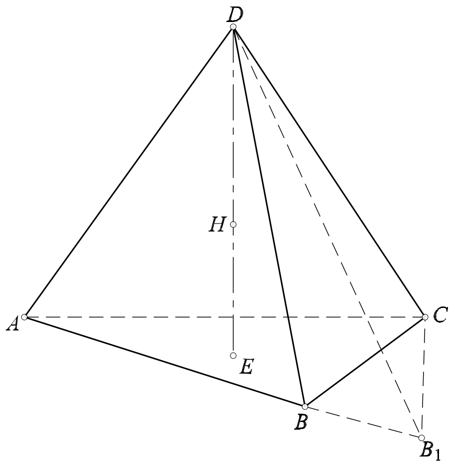
Obratno, neka su nasuprotni bridovi tetraedra $ABCD$ međusobno okomiti. Tada bridom AD prolazi ravnina okomita na pravac BC. Lako se pokaže da visine tetraedra iz vrhova A i D pripadaju toj ravnini, zbog čega se moraju sjeći u nekoj točki na pravcu okomitom na ravninu ABC. Sada se lako pokaže da se i ine dvije visine sijeku u toj točki. Q.E.D.

P17. *Ako se visine tetraedra sijeku u jednoj točki, tada se nožište visine iz svakog vrha tetraedra na nasuprotnu stranu podudara s ortocentrom te strane.*

Dokaz. Neka se visine tetraedra $ABCD$ sijeku u točki H i neka je nožište visine iz vrha D na stranu ABC točka E (sl. 2.9.). Pravac DE je okomit na svakom pravcu ravnine ABC, zbog čega je $BC \perp DE$. Prema P16. je $BC \perp AD$, zbog čega je BC okomito na ravninu DAE, a zbog toga je $AE \perp BC$. Na isti način se pokaže da je $CE \perp AB$. Iz posljednjih dviju relacija zaključujemo da je točka E ortocentar trokuta ABC, što je tvrdnja poučka. Isto se pokaže i za visine iz inih triju vrhova tetraedra. Također se jednostavno dokaže da vrijedi i obrat poučka, što se prepušta čitatelju. Q.E.D.

Sada možemo pokazati da se visine tetraedra **općenito** ne sijeku.

Neka se u tetraedru $ABCD$ visine sijeku u točki H. Prema P17. pravac DH probada ravninu ABC u točki E, koja je ortocentar trokuta ABC. Isto je tako, prema P16., $BC \perp AD$. Neka je B_1 bilo koja točka polupravca AB $(B_1 \neq B)$ (sl. 2.10.). Pravci CB i CB_1 očito nisu usporedni, zbog čega pravci CB_1 i AD nisu okomiti, a to znači da se visine tetraedra AB_1CD ne sijeku u jednoj točki.



Sl. 2.10.

Mogli smo razmišljati i ovako. Pravac DH je okomit na zajedničku ravninu trokuta ABC i AB_1C i taj pravac probada tu ravninu u točki E. Ako bi se visine i tetraedra $ABCD$ i tetraedra AB_1CD sjekle u jednoj točki, tada bi točka E morala biti ortocentar i trokuta ABC i trokuta AB_1C, što očito nije moguće.

D6. *Ako se visine tetraedra sijeku u jednoj točki, tu ćemo točku zvati ortocentar tetraedra, a za tetraedar ćemo kazati da je ortocentričan.*

Ortocentričan tetraedar ima još zanimljivih osobitosti koje su istoznačne dvjema navedenim, o čemu će biti još govora.