1.

Općinsko natjecanje

Općinska i gradska natjecanja održana su u svim gradovima i općinama naše domovine 7. ožujka 2003.

Osnovna škola

4. razred

4.1. Izračunaj

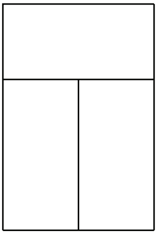
$$(481 \cdot 325 - 75 \cdot 481) : 5 + (2 \cdot 43758 - 43758) \cdot (56 - 7 \cdot 8).$$

4.2. Na polici se nalaze knjige iz matematike i knjige iz prirode. Svih knjiga ukupno ima 44, ali matematičkih knjiga ima za 8 više nego knjiga iz prirode. Koliko knjiga ima iz matematike, a koliko iz prirode?

4.3. Koliko ima troznamenkastih brojeva kojima je zbroj znamenaka jednak 5? Ispiši sve te troznamenkaste brojeve.

4.4. Sonja se sprema za zimske radosti na snijegu pa se mora toplo obući. Majka joj je rekla da obavezno obuče jaknu, šal, kapu i rukavice. Na koliko načina može to učiniti ako Sonja ima crvenu i plavu jaknu, crveni, zeleni i bijeli šal, plavu i žutu kapu te smeđe rukavice? Ispiši sve načine na koje Sonja može biti obučena.

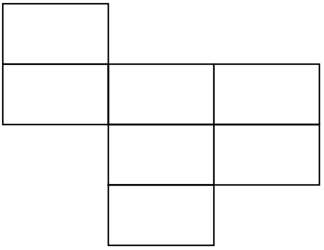
4.5. Ako je opseg jedne domino pločice 186 mm, kolika je površina lika kojeg prekrivaju tri domino pločice složene kao na slici:



Sl. 1.1.

5. razred

5.1. Koliko pravokutnika vidiš na slici?



Sl. 1.2.

5.2. Odredi nepoznate znamenke a i b u šesteroznamenkastom broju $\overline{a2003b}$ tako da bude djeljiv s 18.

5.3. Dvije školske knjige zajedno imaju masu od 126 dag. Masa jedne knjige je 30 dag veća od mase druge. Kolika je masa svake knjige pojedinačno?

5.4. Pokaži da je umnožak zbroja i razlike dva uzastopna neparna prirodna broja djeljiv s 8.

5.5. Duljina stranice kvadrata je 1 dm 2 cm, a njegova je površina jednaka površini pravokutnika kojemu je duljina jedne stranice 1 dm 8 cm. Koji lik ima veći opseg?

6. razred

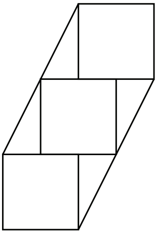
6.1. Izračunaj

$$\left(2+\frac{1}{5}-\frac{5-\frac{1}{2}}{3}\right)\cdot\left(2+\frac{6}{7}\right)+\frac{\frac{4}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{3}{44}+\frac{4}{33}}.$$

6.2. Pravokutnik ima stranice duljine a i b. Stranica a produži se za $\frac{1}{4}$ svoje duljine, a stranica b skrati za $\frac{1}{3}$ svoje duljine. Je li se površina pravokutnika povećala ili smanjila i za koliko?

6.3. Ana je prvi dan pročitala $\frac{1}{7}$ knjige, drugi dan 0.3 ostatka, a treći dan $\frac{1}{2}$ novog ostatka. Nakon toga ostale su joj još 42 nepročitane stranice. Koliko knjiga ima stranica?

6.4. Izračunaj površinu lika na slici sastavljenog od četiri sukladna trokuta i tri sukladna kvadrata ako je duljina stranice kvadrata 4 cm i vrh gornjeg kvadrata je polovište stranice donjeg kvadrata.



Sl. 1.3.

6.5. U trokutu $\triangle ABC$ visina na stranicu $\overline{AB}$ prolazi točkom T presjeka simetrale kuta $\sphericalangle BAC$ i simetrale stranice $\overline{AC}$. Koliko iznosi kut $\sphericalangle BAC$?

7. razred

7.1. Riješi jednadžbu

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x}{3}+2}{3}+2}{3}+2}{3}=1.$$

7.2. Marko je 26 godina stariji od Vedrana, a za 10 godina bit će tri puta stariji. Koliko godina danas ima Marko, a koliko Vedran?

7.3. Koliko litara 30%-tnog alkohola, a koliko litara 10%-tnog alkohola treba pomiješati da se dobije 600 litara 15%-tnog alkohola?

7.4. Neki posao 12 radnika obavilo bi za 14 dana. Nakon 2 dana rada razbole se 3 radnika. Za koliko će ukupno dana posao biti gotov?

7.5. Odredi kutove trapeza kojemu su duljine stranica 2 cm, 2 cm, 2 cm, 4 cm.

8. razred

8.1. Usporedi razlomke

$$\frac{\frac{1}{6}-\left(23\frac{1}{8}-19\frac{5}{12}\right):17.8}{0.6:4.2-\frac{2}{7}} \quad \text{i} \quad \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2+\sqrt{72}}{32}.$$

8.2. Broj vrhova mnogokuta P za 3 je veći od broja vrhova mnogokuta M, dok je broj svih dijagonala mnogokuta P tri puta veći od broja svih dijagonala mnogokuta M. Koliko stranica imaju mnogokuti P i M?

8.3. Opseg romba je 52 cm, a opseg jednog od trokuta koji nastaju povlačenjem dijagonala je 30 cm. Izračunaj površinu romba.

8.4. Dva paralelna pravca sijeku kružnicu u četiri točke. Dokaži da su te točke vrhovi jednakokračnog trapeza.

8.5. Dva automobila krenula su istovremeno, jedan iz mjesta A u mjesto B, a drugi iz mjesta B u mjesto A. Vozeći svaki stalnom, ali međusobno različitim brzinama susreli su se nakon 8 sati vožnje. Ako bi brzina automobila iz mjesta A bila 14% veća nego što jeste, a brzina automobila iz mjesta B 15% veća nego što jeste, onda bi se susreli nakon 7 sati vožnje.

Koji je automobil bio brži i koliko je puta njegova brzina veća od brzine sporijeg automobila?

Srednja škola

1. razred

1.1. Jedinica za asfaltiranje sastoji se od određenog broja radnika i pripadne mehanizacije. Tri jedinice asfaltirale su 20 km autoceste za 10 dana. Koliko još jedinica treba uključiti da radovi budu gotovi za 15 dana ako je preostalo 50 km autoceste za asfaltiranje?

1.2. Dan je jednakokračan trokut ABC kojemu je kut uz vrh A jednak $120°$. Okomica iz tog vrha na krak trokuta dijeli trokut na dva trokuta od kojih tupokutan ima polumjer upisane kružnice 1. Kolika je površina trokuta ABC?

1.3. Odredite sumu

$$\frac{2}{2\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 8}+\ldots+\frac{2}{1997\cdot 2000}+\frac{2}{2000\cdot 2003}.$$

1.4. Ako za realne brojeve a, b, c vrijedi

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1,$$

dokažite da je

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

2. razred

2.1. Na skupu realnih brojeva definirana je funkcija

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}}.$$

Odredite $f(1)+f(2)+\ldots+f(2003)$.

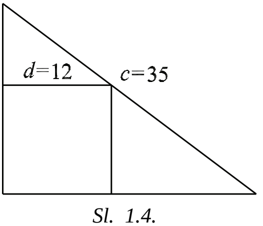
2.2. U jednakostraničnom trokutu ABC dane su točke $D\in\overline{AB}$ i $E\in\overline{BC}$ takve da je $|AD|=\frac{1}{3}|AB|$ i $|BE|=\frac{1}{3}|BC|$. Pravci AE i CD sijeku se u točki P. Koliki je kut $\sphericalangle BPC$?

2.3. Neka su z_1 i z_2 kompleksni brojevi modula 1. Dokažite da je

$$\frac{1-z_1z_2}{z_1-z_2}$$

realan broj.

2.4. U pravokutan trokut s hipotenuzom duljine $c=35$ upisan je kvadrat sa stranicom duljine $d=12$, kao na slici. Odredite duljine kateta tog trokuta.



Sl. 1.4.

3. razred

3.1. Riješite nejednadžbu

$$2 \cdot 125^x - 3 \cdot 50^x - 9 \cdot 20^x + 10 \cdot 8^x \leqslant 0.$$

3.2. Odredite sve parove (x, y) realnih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu

$$\operatorname{tg}^2 x + 2y \cos 4x \cdot \operatorname{tg} x + y^2 = 0.$$

3.3. U trokutu ABC duljine stranica su $|AB| = 20$, $|AC| = 21$ i $|BC| = 29$. Točke D i E su na stranici $\overline{BC}$ takve da je $|BD| = 8$ i $|EC| = 9$. Odredite veličinu kuta $\sphericalangle DAE$.

3.4. Ako su a_1, a_2, ..., a_{2003} cijeli brojevi i b_1, b_2, ..., b_{2003} ti isti brojevi poredani na neki drugi način, dokažite da je produkt

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdot \ldots \cdot (a_{2003} + b_{2003})$$

paran broj.

4. razred

4.1. Nad stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, kvadrata $ABCD$ konstruirani su s vanjske strane jednakostranični trokuti BCE, CDF, DAG. Odredite, kao funkciju duljine a stranice kvadrata, volumen tijela koje nastaje rotacijom lika $BECFDGA$ oko pravca AB.

4.2. Neka je p realan broj. Odredite rješenja x_1, x_2, x_3 jednadžbe

$$x^3 + 2px^2 - px + 10 = 0,$$

ako je poznato da su ona uzastopni članovi aritmetičkog niza.

4.3. Ako su α i β kutovi trokuta, dokažite nejednakost

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta} \geqslant \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

4.4. Nađite sve brojeve djeljive s 90 koji imaju točno 20 djelitelja.

Rješenja

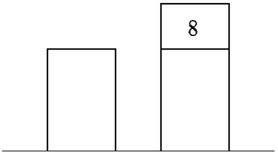
Osnovna škola

4.1.

$$\begin{aligned}(481 \cdot 325 - 75 \cdot 481) : 5 + (2 \cdot 43758 - 43758) \cdot (56 - 7 \cdot 8)&\\ = (481 \cdot 325 - 75 \cdot 481) : 5 + (2 \cdot 43758 - 43758) \cdot 0&\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 481 \cdot (325 - 75) : 5 \\
&= 481 \cdot 250 : 5 \\
&= 120250 : 5 \\
&= 24050.
\end{aligned}
$$

4.2.



Sl. 1.5.

Matematičkih knjiga ima koliko i knjiga iz prirode plus 8 knjiga. To znači da knjiga ukupno ima dva puta toliko koliko ih ima iz prirode plus 8 knjiga. Ukupno knjiga ima 44 pa je dvostruki broj knjiga iz prirode jednak $44 - 8 = 36$. Slijedi da knjiga iz prirode ima $36 : 2 = 18$ pa knjiga iz matematike ima 8 više, tj. $18 + 8 = 26$.

4.3. Troznamenkasti brojevi kojima je zbroj znamenaka jednak 5 ne mogu imati znamenke veće od 5. Takvih troznamenkastih brojeva koji imaju znamenku 5 ima točno jedan: 500. Traženi troznamenkasti brojevi koji imaju znamenku 4 moraju kao druge dvije znamenke imati 0 i 1. Troznamenkastih brojeva sa znamenkama 4, 1 i 0 ima četiri i to su 410, 401, 140 i 104. Traženi troznamenkasti brojevi koji imaju znamenku 3 moraju kao druge dvije znamenke imati 1 i 1 ili 2 i 0. Takvih troznamenkastih brojeva ima sedam i to su: 311, 131, 113, 320, 302, 230, 203. Traženi troznamenkasti brojevi koji nemaju znamenke 5, 4 ili 3 su: 221, 212 i 122. Sveukupno takvih troznamenkastih brojeva ima 15.

4.4. Svi načini oblačenja ispisani su u tablici. Ima ih 12.

crvena jakna	plava jakna	crveni šal	zeleni šal	bijeli šal	plava kapa	žuta kapa	smeđe rukavice
+		+			+		+
+			+		+		+
+				+	+		+
+		+				+	+
+			+			+	+
+				+		+	+
	+	+			+		+
	+		+		+		+
	+			+	+		+
	+	+				+	+
	+		+			+	+
	+			+		+	+

4.5. Ako s a označimo duljinu kraće stranice domino pločice, tada sa slike vidimo da je $6a = 186$ pa je $a = 31$ mm. Stranice jedne domino pločice duge su

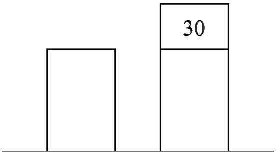
31 mm i 62 mm, pa je površina jedne domine $P = 31 \cdot 62 = 1922$ mm^2. Iz toga slijedi da je tražena površina jednaka $3 \cdot 1922 = 5766$ mm^2.

* * *

5.1. Pravokutnika koji se sastoje od jednog osnovnog ima 7. Pravokutnika koji se sastoje od dva osnovna ima 7. Pravokutnika koji se sastoje od tri osnovna ima 2. Pravokutnika koji se sastoje od četiri osnovna ima 1. Na slici vidimo $7 + 7 + 2 + 1 = 17$ pravokutnika.

5.2. Ako je broj djeljiv s 18, tada je djeljiv s 2 i s 9. Iz djeljivosti s 2 slijedi da je znamenka b jednaka 0, 2, 4, 6 ili 8. Ako je $b = 0$, tada zbog djeljivosti s 9 mora biti i zbroj $a + 2 + 3 + 0$ djeljiv s 9, tj. $a = 4$. Ako je $b = 2$, tada je $a = 2$. Ako je $b = 4$, tada je $a = 0$ ili $a = 9$, ali za $a = 0$ ne dobivamo šesteroznamenkasti broj pa to nije rješenje. Ako je $b = 6$, tada je $a = 7$. Ako je $b = 8$, tada je $a = 5$.

5.3. Uvjet zadatka možemo grafički prikazati ovako:



Sl. 1.6.

Dva neiscrtana pravokutnika i 30 dag zajedno čine 126 dag, tj. dva pravokutnika imaju vrijednost $126 - 30 = 96$ dag, odnosno jednome odgovara masa od 48 dag. Lakša knjiga ima masu 48 dag, a teža $48 + 30 = 78$ dag.

5.4. Označimo s x neparni prirodni broj. Tada je $x + 2$ njegov neparni sljedbenik. Zbroj ta dva broja je $x + (x + 2) = 2x + 2 = 2(x + 1)$. Razlika ta dva broja je $(x+2) - x = 2$. Umnožak zbroja i razlike iznosi $2(x+1) \cdot 2 = 4(x+1)$. Taj je umnožak očito djeljiv s 4. Treba još pokazati da je faktor $x + 1$ djeljiv s 2. Ali to slijedi iz činjenice da ako je x neparan broj, tada je $x + 1$ parni, tj. djeljiv s 2. Tako je cijeli umnožak djeljiv s 8.

5.5. Stranica kvadrata duga je 12 cm, pa je njegov opseg $O = 4a = 4 \cdot 12 = 48$ cm. Površina kvadrata je $P = a \cdot a = 12 \cdot 12 = 144$ cm^2. Jedna stranica pravokutnika duga je $a = 18$ cm, a za drugu stranicu b vrijedi: $144 = 18 \cdot b$, $b = 144 : 18$, $b = 8$ cm. Opseg pravokutnika je $O = 2a + 2b = 2 \cdot 18 + 2 \cdot 8 = 36 + 16 = 52$ cm. Pravokutnik ima veći opseg od kvadrata.

* * *

6.1.

$$\begin{aligned}\left(2+\frac{1}{5}-\frac{5-\frac{1}{2}}{3}\right)\cdot\left(2+\frac{6}{7}\right)+\frac{\frac{4}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{3}{44}+\frac{4}{33}} &= \left(\frac{11}{5}-\frac{\frac{9}{2}}{3}\right)\cdot\frac{20}{7}+\frac{\frac{16+9}{12}}{\frac{9+16}{11\cdot 12}}\\ &= \left(\frac{11}{5}-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{20}{7}+\frac{\frac{25}{12}}{\frac{25}{11\cdot 12}}\\ &= \frac{22-15}{10}\cdot\frac{20}{7}+\frac{25\cdot 11\cdot 12}{25\cdot 12}\\ &= \frac{7}{10}\cdot\frac{20}{7}+11=2+11=13.\end{aligned}$$

6.2. Površina polaznog pravokutnika sa stranicama a i b je $P=ab$. Stranice novog pravokutnika su

$$\begin{aligned}a+\frac{1}{4}a&=\frac{5}{4}a\\ b-\frac{1}{3}b&=\frac{2}{3}b.\end{aligned}$$

Površina novog pravokutnika jednaka je

$$P_N=\frac{5}{4}a\cdot\frac{2}{3}b=\frac{5}{6}ab=\frac{5}{6}P.$$

Dakle, površina pravokutnika se smanjila i to za $\frac{1}{6}$ površine polaznog pravokutnika.

6.3. Označimo s x broj stranica u knjizi.

Prvi dan Ana je pročitala $\frac{1}{7}x$ stranica. Ostalo joj je za pročitati $\frac{6}{7}x$ stranica.

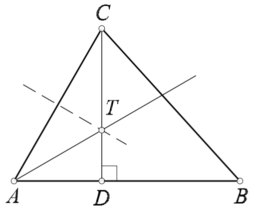
Drugi dan je pročitala $0.3\cdot\frac{6}{7}x$ stranica. Ostalo joj je za pročitati $0.7\cdot\frac{6}{7}x=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{7}x=\frac{3}{5}x$ stranica.

Treći dan je pročitala $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}x$ stranica. Ostalo joj je za pročitati $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}x=\frac{3}{10}x$ stranica, što iznosi 42 stranice, pa je $\frac{3}{10}x=42$. Odavde slijedi $x=140$, tj. knjiga ima 140 stranica.

Zadatak se može riješiti i metodom rješavanja unatrag. Naime, 42 nepročitane stranice su u stvari $\frac{1}{2}$ drugog ostatka, pa zaključujemo da drugi ostatak iznosi 84 stranice. Sad su te 84 stranice 0.7 prvog ostatka, tj. prvi ostatak iznosi 120 stranica, a to je $\frac{6}{7}$ broja svih stranica knjige. Broj stranica knjige je 140.

6.4. Iz uvjeta zadatka zaključujemo da je duljina dulje stranice trokuta jednaka duljini stranice kvadrata (4 cm), a duljina kraće stranice trokuta polovini duljine stranice kvadrata (2 cm). Površina kvadrata stranice duljine a je $P = a \cdot a$, pa je površina tri kvadrata sa slike jednaka $P_1 = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ cm^2. Trokuti sa slike su pravokutni. Površina pravokutnog trokuta stranica a, b je $P = \frac{a \cdot b}{2}$, pa je površina četiri trokuta sa slike jednaka $P_2 = 4 \cdot \frac{4 \cdot 2}{2} = 16$ cm^2. Površina lika sa slike jednaka je zbroju prethodnih površina tj. $P = 48 + 16 = 64$ cm^2.

6.5. *Skica.*



Sl. 1.7.

Označimo s D nožište visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$, a s α kut $\sphericalangle CAB$. Kako je s simetrala stranice $\overline{AC}$, a točka T leži na s, to je $|\overline{AT}| = |\overline{CT}|$. Dakle, trokut $\triangle ATC$ je jednakokračan, pa je $\sphericalangle ACT = \sphericalangle CAT$. Pravac AT je simetrala kuta BAC, pa vrijedi $\sphericalangle ACT = \sphericalangle CAT = \frac{\alpha}{2}$. Nadalje, trokut $\triangle ADC$ je pravokutan, pa je $\sphericalangle ACD + \sphericalangle CAD = 90^\circ$. Kako je $\sphericalangle ACD = \frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle CAD = \alpha$, to je $\frac{3\alpha}{2} = 90^\circ$. Odavde slijedi $\alpha = 60^\circ$.

* * *

7.1. *1. način.* Postupnim sređivanjem jednadžbe redom dobivamo

$$\frac{\frac{x}{3}+2}{3}+2 = \frac{\frac{x}{3}+2+6}{3} = \frac{\frac{x}{3}+8}{3} = \frac{x+24}{9},$$

$$\frac{\frac{x+24}{9}}{3}+2 = \frac{x+24}{27}+2 = \frac{x+24+54}{27} = \frac{x+78}{27},$$

$$\frac{\frac{x+78}{27}}{3}+2 = \frac{x+78}{81}+2 = \frac{x+78+162}{81} = \frac{x+240}{81}.$$

Sada je

$$\frac{\frac{x+240}{81}}{3} = \frac{x+240}{243} = 1.$$

Konačno, dobivamo $x = 243 - 240 = 3$, što je rješenje jednadžbe.

2. način. Jednostavniji je postupak "unatrag":

$$\frac{\frac{\frac{\frac{x}{3}+2}{3}+2}{3}+2}{3}+2=3, \qquad \frac{\frac{\frac{\frac{x}{3}+2}{3}+2}{3}+2}{3}=1,$$

$$\frac{\frac{\frac{x}{3}+2}{3}+2}{3}+2=3, \qquad \frac{\frac{\frac{x}{3}+2}{3}+2}{3}=1,$$

$$\frac{\frac{x}{3}+2}{3}+2=3, \qquad \frac{\frac{x}{3}+2}{3}=1, \qquad \frac{x}{3}+2=3,$$

$$\frac{x}{3}=1, \qquad x=3.$$

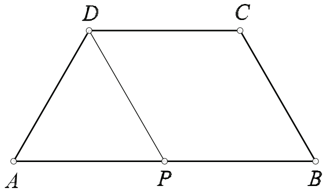
7.2. Označimo s x Markove godine, a s y Vedranove godine u ovom trenutku. Kako je Marko stariji od Vedrana 26 godina, to vrijedi jednakost $x = y + 26$. Za 10 godina Marko će imati $x+10 = y+26+10 = y+36$ godina, a Vedran $y+10$ godina. Tada će Marko biti 3 puta stariji od Vedrana pa vrijedi $y+36 = 3(y+10)$. Iz te jednadžbe je $y + 36 = 3y + 30$, odnosno $2y = 6$, odakle je $y = 3$. Sada je $x = y + 26 = 3 + 26 = 29$. Dakle, Marko ima 29 godina, a Vedran 3 godine.

7.3. Neka je x količina (u litrama) 30%-tnog alkohola koju trebamo pomiješati. Tada je $600 - x$ količina (u litrama) 10%-tnog alkohola koju trebamo pomiješati. Količina alkohola u 30%-tnoj otopini je $0.3x$, a količina alkohola u 10%-tnoj otopini je $0.1(600 - x)$. Prema tome količina alkohola u nastalom 15%-tnom alkoholu je $0.3x + 0.1(600 - x)$. Prema uvjetu zadatka količina alkohola u 600 litara 15%-tnog alkohola je $0.15 \cdot 600 = 90$ litara. Dakle vrijedi jednakost $0.3x + 0.1(600 - x) = 90$, odakle je $0.2x + 60 = 90$, pa je $0.2x = 30$, tj. $x = 150$ litara. Prema tome, količina 30%-tnog alkohola je 150 litara, a količina 10%-tnog alkohola je $600 - 150 = 450$ litara.

7.4. Jedan radnik bi obavio taj posao za $12 \cdot 14 = 168$ dana. Nakon dva dana napravljena je $\frac{2}{14} = \frac{1}{7}$ posla, dakle ostalo je još $\frac{6}{7}$ posla. Prema tome, jedan bi radnik ostatak tog posla obavio za $\frac{6}{7} \cdot 168 = 144$ dana. Kako su se 3 radnika razbolila, ostalo ih je 9. Oni će ostatak posla obaviti za $144 : 9 = 16$ dana. Konačno, radnici će završiti posao za $2 + 16 = 18$ dana.

Zadatak je moguće riješiti i pomoću jednadžbe. Neka je x broj dana potreban da 9 radnika dovrše posao. Tada vrijedi $12 \cdot 14 = 2 \cdot 12 + 9x$, odakle dobivamo da je $x = 16$, tj. ukupan broj dana za dovršenje posla je 18.

7.5. Uočimo ponajprije da je duljina jedne osnovice trapeza jednaka 4 cm. Naime, u suprotnom bi osnovice trapeza bile jednake duljine, pa bi on bio paralelogram, a nije zato jer nema dva para stranica jednakih duljina. Dakle, imamo jednakokračan trapez $ABCD$ kao na slici.



Sl. 1.8.

Neka je P polovište osnovice $\overline{AB}$ duljine 4 cm. Tada je $|PB| = 2$ cm. Kako je $|PB| = |DC| = 2$ cm i $\overline{PB} \parallel \overline{DC}$, to je četverokut $PBCD$ paralelogram. Zato je $|DP| = |CB| = 2$ cm, pa je $PBCD$ ujedno i romb. Promotrimo trokut APD. Kako je $|AP| = |PD| = |DA| = 2$ cm, zaključujemo da je APD jednakostraničan trokut. Zato je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle PAD = 60^\circ$. Konačno, kako je trapez jednakokračan lagano dobivamo preostale kutove: $\sphericalangle ABC = 60^\circ$, $\sphericalangle BCD = \sphericalangle CDA = 120^\circ$.

* * *

8.1.

$$\frac{\frac{1}{6}-\left(\frac{185}{8}-\frac{233}{12}\right):\frac{178}{10}}{\frac{6}{10}:\frac{42}{10}-\frac{2}{7}} = \frac{\frac{1}{6}-\left(\frac{555-466}{24}\right)\cdot\frac{10}{178}}{\frac{6}{10}\cdot\frac{10}{42}-\frac{2}{7}}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}-\frac{89}{24}\cdot\frac{10}{178}}{\frac{1}{7}-\frac{2}{7}} = \frac{\frac{1}{6}-\frac{5}{24}}{-\frac{1}{7}} = \frac{7}{24},$$

$$\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2+\sqrt{72}}{32} = \frac{6-2\sqrt{18}+3+\sqrt{36\cdot 2}}{32}$$

$$= \frac{9-6\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{32} = \frac{9}{32}.$$

Usporedimo razlomke $\frac{7}{24}$ i $\frac{9}{32}$. $7\cdot 32 = 224 > 216 = 9\cdot 24$, tj. $\frac{7}{24} > \frac{9}{32}$.

8.2. Označimo s n broj vrhova mnogokuta P. Tada je $n-3$ broj vrhova mnogokuta M. Broj svih dijagonala mnogokuta P je $S(n) = \frac{n(n-3)}{2}$, a broj svih dijagonala mnogokuta M je $S(n-3) = \frac{(n-3)(n-6)}{2}$. Iz uvjeta zadatka slijedi $\frac{n(n-3)}{2} = 3\cdot\frac{(n-3)(n-6)}{2}$. Rješavanjem ove jednadžbe dobivamo: $n = 3(n-6)$, tj. $n = 9$. Mnogokut P ima 9 stranica, a mnogokut M 6 stranica.

8.3. Iz podatka o opsegu romba izračunamo duljinu stranice: $a = O : 4 = 13$ cm. Povlačenjem dijagonala nastaju 4 sukladna pravokutna trokuta sa stranicama a, $\frac{e}{2}$, $\frac{f}{2}$, pa imamo da je $a+\frac{e}{2}+\frac{f}{2}=30$, $\frac{e}{2}+\frac{f}{2}=30-13$, $\frac{e}{2}+\frac{f}{2}=17$, $e+f=34$. Primjenom Pitagorina poučka na taj trokut dobivamo: $\left(\frac{e}{2}\right)^2+\left(\frac{f}{2}\right)^2=a^2$, $e^2+f^2=676$.

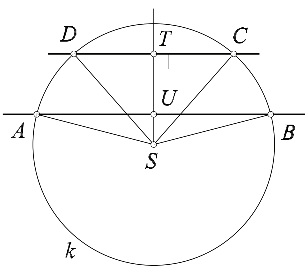
Dalje možemo postupati na dva načina.

1. način. Kvadriramo obje strane jednakosti $e+f=34$. Dobivamo $e^2+2ef+f^2=1156$. Umjesto e^2+f^2 uvrstimo 676, pa imamo $2ef+676=1156$, $2ef=480$, $ef=240$. Površina romba je $P=\frac{ef}{2}=120\text{ cm}^2$.

2. način. Iz jednakosti $e+f=34$ izrazimo nepoznanicu e i uvrstimo u drugu jednadžbu. $e=34-f$, $(34-f)^2+f^2=676$, $f^2-34f+240=0$. Ovu kvadratnu jednadžbu riješimo dopunom do potpunog kvadrata. $(f^2-34f+17^2)-17^2+240=0$, $(f-17)^2=49$. Rješenja su $f_1=24$ cm, $f_2=10$ cm. Druga dijagonala ima duljinu $e_1=10$ cm, $e_2=24$ cm.

U oba slučaja romb ima površinu 120 cm^2.

8.4. *Skica.*



Sl. 1.9.

Označimo s A i B presjeke jednog pravca s kružnicom, a s C i D presjeke drugog pravca s kružnicom. Četverokut $ABCD$ je očito trapez jer su stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ paralelne. Treba još dokazati da se radi o jednakokračnom trapezu. Povucimo okomicu iz središta kružnice S na pravce AB i CD. Presjek okomice s pravcem AB označimo s U, a s pravcem CD s T. Trokut SCD je jednakokračan, pa visina na osnovicu ujedno leži na simetrali osnovice $\overline{CD}$, tj. okomica ST raspolavlja stranicu $\overline{CD}$. Budući da je i trokut ASB jednakokračan vrijedi sličan zaključak da okomica SU raspolavlja stranicu $\overline{AB}$.

Dalje imamo (barem) dva puta zaključivanja.

1. način. Promotrimo osnu simetriju s obzirom na os ST. Ona točku C preslikava u točku D, točku B u točku A, a točka S ostaje fiksna. Dakle, trokut SBC preslikava se u trokut SAD, a budući da osna simetrija trokut preslikava u njemu sukladan trokut, slijedi da je $\triangle SBC\cong\triangle SAD$, tj. $|BC|=|AD|$. Dakle, trapez je jednakokračan.

2. način. $\overline{ST}$ je visina jednakokračnog trokuta SCD pa raspolavlja i kut $\sphericalangle CSD$, tj. $\sphericalangle CST=\sphericalangle DST$. Slično, $\sphericalangle BSU=\sphericalangle ASU$. Iz toga slijedi

$\sphericalangle BSC = \sphericalangle ASD$. Sad su trokuti BSC i ASD sukladni jer se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih. Iz te sukladnosti slijedi $|BC| = |AD|$. Dakle, trapez je jednakokračan.

8.5. Označimo brzinu automobila koji je krenuo iz mjesta A s x, a brzinu drugog s y. Tada vrijedi $8x + 8y = s$, gdje je s duljina puta između mjesta A i B. Ako bi se brzina prvog povećala za 14%, tada bi mu brzina iznosila $1.14x$, a ako bi se brzina drugog povećala za 15%, brzina bi mu iznosila $1.15y$. Tada vrijedi $7 \cdot 1.14x + 7 \cdot 1.15y = s$. Izjednačimo te dvije jednadžbe:

$$8x + 8y = 7.98x + 8.05y.$$

Dobivamo da je $0.02x = 0.05y$ odnosno $x = 2.5y$.

Dakle, veća je brzina automobila koji je krenuo iz mjesta A i to 2.5 puta od brzine drugog automobila.

Srednja škola

1.1. *Prvo rješenje.* Neka je d duljina asfaltirane autoceste, x broj jedinica koje su bile uključene u asfaltiranje, y broj dana koji su bili potrebni za asfaltiranje i a konstanta proporcionalnosti. Tada vrijedi

$$d = a \cdot x \cdot y.$$

Tokom prvih 10 dana asfaltiranja bilo je: $d = 20$, $x = 3$, $y = 10$, odakle slijedi

$$a = \frac{d}{x \cdot y} = \frac{2}{3}.$$

U preostalom dijelu asfaltiranja je: $d = 50$, $y = 15$, odakle se dobiva

$$x = \frac{d}{a \cdot y} = \frac{50}{\frac{2}{3} \cdot 15} = 5.$$

Treba ukupno 5 jedinica, što znači da treba uključiti još dvije jedinice.

Drugo rješenje. Prikažimo podatke i međurezultate u obliku tabele:

broj jedinica	km	dani
3	20	10
?	50	15
3	20	10
3	10	5
1	10	15
5	50	15

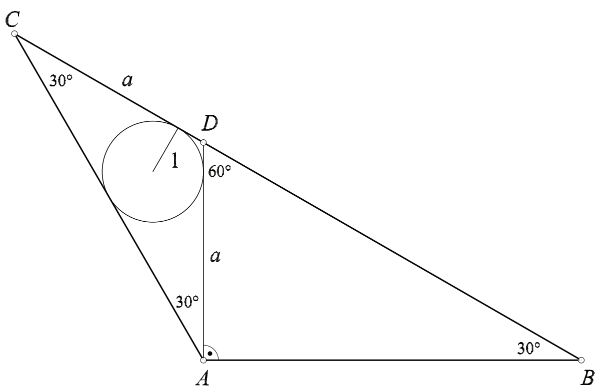
Znamo da više dana znači više km (km i dani su direktno proporcionalni), pa će 3 jedinice asfaltirati 10 km za 5 dana; broj jedinica i broj dana su obrnuto proporcionalni, zato će 1 jedinica asfaltirati 10 km za 15 dana; kako je broj jedinica direktno proporcionalan broju km, 5 jedinica će asfaltirati 50 km za 15 dana. Dakle, za asfaltiranje 50 km za 15 dana treba 5 jedinica, a kako su tri već na terenu, treba uključiti još dvije jedinice.

1.2. *Prvo rješenje.* Neka je D točka u kojoj okomica na $\overline{AB}$ kroz točku A siječe stranicu $\overline{BC}$. Uz oznaku $a = |AD| = |CD|$ i $r = 1$ – polumjer trokutu ACD upisane kružnice, dobivamo $|AC| = 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$. Površina trokuta ACD jednaka je površini jednakostraničnog trokuta stranice a, a možemo je prikazati i pomoću duljina stranica i polumjera upisane kružnice trokuta ACD. Dakle,

$$P(ACD) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cdot r(a + a + a\sqrt{3}),$$

tj.

$$a = \frac{2(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}.$$



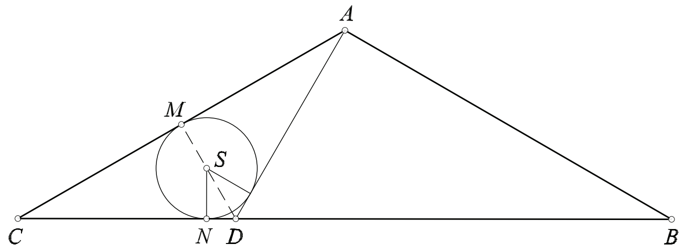
Sl. 1.10.

Površina trokuta ABC jednaka je površini jednakostraničnog trokuta stranice $a\sqrt{3}$:

$$P(ABC) = \frac{(a\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \cdot 3\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{2(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{3\sqrt{3}}{4}$$
$$= (2+\sqrt{3})^2\sqrt{3} = 7\sqrt{3} + 12.$$

Drugo rješenje. Neka je S središte kružnice upisane u tupokutan trokut ACD, N diralište upisane mu kružnice i stranice $\overline{CD}$, a M diralište te kružnice i stranice $\overline{AC}$.

Kutovi trokuta SND su: $\sphericalangle N = 90^\circ$ i $\sphericalangle D = 60^\circ$, pa je on “polovica jednakostraničnog trokuta”. Kako je $|SN| = 1$, slijedi $|SD| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.



Sl. 1.11.

Odavde slijedi:

$$|MD| = |MS| + |SD| = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}},$$
$$|AD| = 2|MD| = \frac{2(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}},$$
$$|AM| = |MD|\sqrt{3} = 2+\sqrt{3},$$
$$|AC| = 2|AM| = 2(2+\sqrt{3}),$$
$$P(ABC) = \frac{|AC|^2\sqrt{3}}{4} = (2+\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{3} = 12+7\sqrt{3}.$$

1.3. Danu sumu možemo prikazati na ovaj način:

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{2\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 8}+\ldots+\frac{2}{1997\cdot 2000}+\frac{2}{2000\cdot 2003}\\
&\quad=\frac{2}{3}\left(\frac{5-2}{2\cdot 5}+\frac{8-5}{5\cdot 8}+\ldots+\frac{2000-1997}{1997\cdot 2000}+\frac{2003-2000}{2000\cdot 2003}\right)\\
&\quad=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{1997}-\frac{1}{2000}+\frac{1}{2000}-\frac{1}{2003}\right)\\
&\quad=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2003}\right)=\frac{667}{2003}.
\end{aligned}$$

1.4. Jednakost

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$$

množimo redom s a, b, c i dobivene jednakosti zbrojimo. Dobiva se

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=a+b+c-\frac{ab+bc}{c+a}-\frac{ac+bc}{a+b}-\frac{ab+ac}{b+c}=0.$$