

# Ravna trigonometrija.

## Goniometrijske funkcije šiljastih kutova.

1. Neka se proračunaju goniometrijske funkcije kuta  $\beta$ , koji je unutrašnji kut pravokutnoga trokuta  $ABC$  ( $a$  mu je hipotenuza,  $b$  i  $c$  su katete), ako imamo:

a)  $b = 3$ ,  $c = 4$ ;

b)  $a = 17$ ,  $b = 8$ ;

c)  $a = 24 \cdot 05$ ,  $c = 24$ ;

d)  $b = \sqrt{m^2 + n^2}$ ,  $c = \sqrt{2mn}$ .

2. Neka se nacрта kut  $\beta$ , ako je:

a)  $\sin \beta = \frac{3}{5}$ ;

b)  $\cos \beta = \frac{1}{2}$ ;

c)  $\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{3}$ ;

d)  $\operatorname{cotg} \beta = \frac{5}{8}$ .

3. U pravokutnom trokutu  $ABC$  ( $a$  mu je hipotenuza,  $b$  i  $c$  su katete) imamo:

a)  $\sin \beta = \frac{4}{5}$ ,  $\alpha = 15 \cdot 5$ ;

b)  $\cos \beta = \frac{9}{10}$ ,  $c = 3$ ;

c)  $\operatorname{tg} \beta = \frac{33}{56}$ ,  $b = 21$ ;

d)  $\operatorname{cotg} \beta = 0 \cdot 94$ ,  $b = 16$ .

Neka se za svaki trokut proračunaju nepoznata još stranica i funkcije kuta  $\beta$ .

4. Neka se proračunaju katete  $b$ ,  $c$  pravokutna trokuta iz pljoštine  $P = 12 \text{ cm}^2$  i iz  $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{2}$ .

5. Neka su  $a$  osnovka,  $b$  krak istokračna trokuta; proračunajte funkcije kuta  $\beta$ , koji na osnovci leži.

6. Neka se proračunaju funkcije kuta, koji ima a)  $36^\circ$ , b)  $18^\circ$ .

Neka se proračunaju funkcije šiljasta kuta  $\alpha$ , ako imamo:

7. a)  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ; b)  $\sin \alpha = 0.8$ ; c)  $\sin \alpha = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ .

8. a)  $\cos \alpha = \frac{40}{41}$ ; b)  $\cos \alpha = 0.28$ ; c)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ .

9. a)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{28}{45}$ ; b)  $\operatorname{tg} \alpha = 2.4$ ; c)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{m}$ ; d)  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ ;  
e)  $\operatorname{tg} \alpha = (\sqrt{2} - 1)$ .

10. a)  $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{31}{480}$ ; b)  $\operatorname{cotg} \alpha = 0.5$ ; c)  $\operatorname{cotg} \alpha = \sqrt{3}$ ;  
d)  $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ ; e)  $\sec \alpha = 2$ ; f)  $\sec \alpha = m$ ; g)  $\operatorname{cosec} \alpha = \sqrt{2}$ ; h)  $\operatorname{cosec} \alpha = k$ .

11. Neka se proračunaju sve funkcije šiljasta kuta  $x$ , ako je

a)  $\frac{2 \operatorname{tg} x + 1}{2 \operatorname{tg} x - 1} + \frac{2 \operatorname{tg} x - 1}{2 \operatorname{tg} x + 1} = \frac{10}{3}$ ; b)  $9 \sin^2 x + 27 \sin x = 10$ ;

c)  $\cos x = 2 - 3 \cos^2 x$ ; d)  $\frac{2}{\operatorname{cotg} x} + \frac{\operatorname{cotg} x}{2} = 2 \operatorname{cotg} x$ .

12. Neka se pretvori:

a)  $\sec^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \operatorname{cotg}^2 \alpha$  u izraz, u kojem je samo  $\sin \alpha$  i njegove potencije;

b)  $\sec \alpha - \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha}$  u izraz, u kojem je samo  $\cos \alpha$  i njegove potencije;

c)  $\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} + \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{1 - \cos^2 \alpha} \cos \alpha$  u izraz, u kojem je samo  $\operatorname{cotg} \alpha$ .

Neka se dokaže ispravnost ovih formula:

13. a)  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha} = \sin \alpha \cos \alpha$ ;

b)  $\frac{\sin \beta + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{cotg} \beta + \operatorname{cosec} \beta} = \sin \beta \operatorname{tg} \beta$ .

14. a)  $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{1 + \operatorname{cotg} x}{1 - \operatorname{cotg} x}$ ;

b)  $\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{cotg} \alpha$ ;

$$c) (1 + \operatorname{tg} \beta)(1 + \operatorname{cotg} \beta) = \frac{(\sin \beta + \cos \beta)^2}{\sin \beta \cos \beta}.$$

$$15. a) \sqrt{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)} = \sin \alpha;$$

$$b) \sqrt{(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)} = \cos \alpha;$$

$$c) \sqrt{(1 - \cos^2 \beta) : (1 - \sin^2 \beta)} = \operatorname{tg} \beta;$$

$$d) \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{cotg} \gamma = \frac{1 - 2 \cos^2 \gamma}{\sin \gamma \cos \gamma};$$

$$e) \frac{\operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta} \cdot \frac{\operatorname{cotg}^2 \beta - 1}{\operatorname{cotg} \beta} = 1.$$

Išti iz tablicâ ove logaritme:

$$16. \begin{array}{l} \log \sin \quad 15^\circ 29' 30'', \\ \log \cos \quad 38^\circ 17' 42'', \\ \log \operatorname{tg} \quad 75^\circ 4' 29'', \\ \log \operatorname{cotg} \quad 68^\circ 0' 53''. \end{array}$$

$$17. \begin{array}{l} \log \sin \quad 47^\circ 18' 19'', \\ \log \cos \quad 12^\circ 42' 40'', \\ \log \operatorname{tg} \quad 83^\circ 11' 46'', \\ \log \operatorname{cotg} \quad 9^\circ 11' 13''. \end{array}$$

$$18. \begin{array}{l} \log \sin \quad 77^\circ 33' 46'', \\ \log \cos \quad 33^\circ 41' 28'', \\ \log \operatorname{tg} \quad 68^\circ 57' 15'', \\ \log \operatorname{cotg} \quad 25^\circ 46' 12''. \end{array}$$

$$19. \begin{array}{l} \log \sin \quad 25^\circ 27' 35'', \\ \log \cos \quad 62^\circ 51' 24'', \\ \log \operatorname{tg} \quad 12^\circ 48' 33'', \\ \log \operatorname{cotg} \quad 84^\circ 6' 45''. \end{array}$$

Neka se proračuna:

$$20. x = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} 69^\circ 35' 82''}{\cos 47^\circ 47' 8''}}.$$

$$21. x = \sqrt[3]{\frac{\sin 11^\circ 57' 23''}{\cos^2 67^\circ 27' 14'' \cdot \operatorname{tg} 54^\circ 38' 20''}}.$$

Neka se odrede ovim logaritmima pripadni kutovi:

$$22. \begin{array}{l} \log \sin \quad \alpha = 9.57138, \\ \log \cos \quad \beta = 9.95695, \\ \log \operatorname{tg} \quad \gamma = 9.59225, \\ \log \operatorname{cotg} \quad \delta = 9.49978. \end{array}$$

$$23. \begin{array}{l} \log \sin \quad \alpha = 9.42667, \\ \log \cos \quad \beta = 9.71220, \\ \log \operatorname{tg} \quad \gamma = 9.59056, \\ \log \operatorname{cotg} \quad \delta = 1.02368. \end{array}$$

$$24. \begin{array}{l} \log \sin \quad \alpha = 9.98381, \\ \log \cos \quad \beta = 9.87132, \\ \log \operatorname{tg} \quad \gamma = 0.19258, \\ \log \operatorname{cotg} \quad \delta = 0.055841. \end{array}$$

$$25. \begin{array}{l} \log \sin \quad \alpha = 9.96959, \\ \log \cos \quad \beta = 9.26044, \\ \log \operatorname{tg} \quad \gamma = 9.94975, \\ \log \operatorname{cotg} \quad \delta = 9.56260. \end{array}$$

Neka se odredi šiljasti kut  $x$ , ako je:

$$26. \sin x = \frac{15433}{15434}.$$

$$27. \sin x = \sqrt{0.14}.$$

$$28. \cos x = \frac{3}{4}.$$

$$29. \operatorname{tg} x = \sqrt[3]{\frac{1}{5}}.$$

$$30. \operatorname{tg} x = \frac{0.5712^3}{\sqrt{1.465}}.$$

$$31. \sin x = \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

$$32. \operatorname{cotg} x = \frac{1.482\sqrt{5.76}}{0.47^3}.$$

$$33. \sin x = \sqrt{0.625 - \sqrt{0.078125}}.$$

34. Neka se proračuna:  $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ , ako je  $\log a = 1.75911$ ,  $\log b = 1.85074$ , upotreblivši pomoćni kut  $\varphi$ , koji izlazi iz jednadžbe  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$ .

### Proračunavanje (razrješavanje) pravokutnih trokuta.

(U pravokutnom trokutku označuje:

$a$  hipotenuzu,  $b$  i  $c$  katete,  $\beta$  i  $\gamma$  šiljaste kutove nasuprot stranicama  $b$  i  $c$ ,  $v$  visinu te je  $v \perp a$ ,  $p$  i  $q$  projekcije kateta  $b$  i  $c$  na hipotenuzi,  $P$  pljoštinu.)

**A. Neka se razriješi pravokutni trokut ne upotreblivši logaritme, ako je zadano:**

$$35. c = 93970, \beta = 20^\circ.$$

$$36. b = 3, \beta = 30^\circ.$$

$$37. a = 12, c = 6.$$

$$38. a = 307, b = 105.$$

$$39. b = 17365, \gamma = 80^\circ.$$

$$40. b = 109, c = 205.$$

$$41. c = 1, a = 1.1547.$$

**B. Neka se razriješi pravokutni trokut, ako je zadano:**

$$42. a = 169, \beta = 44^\circ 45' 47''.$$

$$43. a = 210.45, \beta = 57^\circ 20' 18''.$$

$$44. a = 312.94, \gamma = 42^\circ 12' 41''.$$

$$45. b = 23.75, \gamma = 68^\circ 47' 29''.$$

46.  $b = 160, \beta = 34^\circ 42' 29''$ .

47.  $c = 2400 \cdot 9, \gamma = 77^\circ 14' 53''$ .

48.  $a = 6525, b = 3276$ .

49.  $a = 258 \cdot 7, c = 68 \cdot 8$ .

50.  $b = 336, c = 377$ .

51.  $b = 54\,093, c = 9031$ .

52.  $a = 21\frac{4}{7}, b = 8\frac{5}{9}$ .

53. U kosokutnu je trokutu stranica  $b = 108$ , stranica  $c = 75$ , visina  $v_1 = 54$  m (gdje je  $v_1 \perp a$ ); koliki su kuti  $\beta, \gamma$  i stranica  $a$ ?

Neka se razriješi pravokutni trokut, ako je zadano:

54.  $v = 84 \cdot 4971, \beta = 45^\circ 14' 23''$ .

55.  $a = 175 \cdot 32$  m,  $b : c = 25 : 36$ .

56.  $b = 3$  m,  $c : a = 3 : 5$ .

57.  $P = 138$  m<sup>2</sup>,  $\beta = 27^\circ 53'$ .

58.  $p = 3 \cdot 2, q = 1 \cdot 8$ .

59.  $b = 396 \cdot 5, \varrho$  (polumjer opisanoga kruga) =  $117 \cdot 4$ .

60.  $a = 205, v = 76 \cdot 6244$ .

61.  $a = 61, P = 330$ .

### C. Planimetrijske zadaće:

62. Dijagonala pravokutnika ima  $42 \cdot 5$ , a kraća njegova stranica  $8 \cdot 7$ ; kolik je kut između dijagonale i dulje mu stranice?

63. Neka se proračunaju stranica  $a$  i dijagonale  $e, f$  romba iz njegove pljoštine  $P$  i unutrašnjega kuta  $\alpha$ . N. pr.  $P = 240, \alpha = 56^\circ 8' 42''$ .

64. Dijagonale romba, kojemu je pljoština  $P = 100$  m<sup>2</sup>, odnose se kao  $3 : 4$ ; kolik mu je šiljasti unutrašnji kut i kolika mu je stranica  $a$ ?

65. Dijagonale pravokutnika, kojemu je pljoština  $P = 100$ , sijeku se pod kutom  $\varphi = 20^\circ 32' 10''$ ; kolike su mu stranice  $a$  i  $b$ ?

66. Ako se raspolove stranice pravokutnika i polovišta redom spoje, nastat će romb. Kolik je polumjer kruga, koji je tomu rombu upisan, ako su  $a = 20, b = 16$  stranice pravokutnika?

67. Tetivi kruga, kojoj je dužina  $s = 9 \cdot 6$ , pripada obodični kut  $\varphi = 41^\circ 6' 44''$ ; kolika je njezina udaljenost od središta kruga?

68. Opseg kruga jest  $40 \cdot 84$ ; kolika je njegova tetiva, kojoj pripada obodični kut  $\varphi = 76^\circ 45' 14''$ .

69. Daljina tačke od središta kruga jest  $14 \cdot 24$ ; kolik je kut između tangenata potegnutih s te tačke na opseg toga kruga, ako mu je polumjer  $r = 12 \cdot 8$ ?

70. Polumjeri dviju kružnica su  $1 \text{ m}$  i  $2 \text{ m}$ , a njihova je središnja daljina  $d = 5 \text{ m}$ ; koliki su kuti između njihovih zajedničkih spoljašnjih tangenata i između zajedničkih unutrašnjih tangenata?

71. Kraci trapeza jesu  $b = 3 \cdot 51 \text{ m}$ ,  $d = 7 \cdot 04 \text{ m}$ ; ako se oni produlje, to se sijeku pod pravim kutom. Koliki su kuti toga trapeza?

72. Od istokračna trapeza zadana je pljoština  $P = 3 \cdot 47715$  i obje usporedne stranice  $a = 5$ ,  $c = 3$ . Koliki su mu kutovi?

73. Neka se proračuna kut, pod kojim se presijecaju dvije kružnice, ako se zadadu njihovi polumjeri  $r$ ,  $r_1$  i dužina  $s$  zajedničke im tetive. N. pr.  $r = 527 \cdot 39$ ,  $r_1 = 474 \cdot 27$ ,  $s = 422$ .

#### D. Zadaće iz praktične geometrije:

74. Vertikalna  $5 \text{ m}$  visok stup stoji na horizontalnom tlu i baca sjenu, koja je duga  $4 \cdot 2 \text{ m}$ ; kolika je visina  $\alpha$  sunca (t. j. pod kojim kutom padaju sunčani traci na horiz. tlo)?

75. Kolika je horizontalna sjena vertikalna stupa, koji je  $v$  visok, ako je je visina sunca  $\alpha$ ?

N. pr. a)  $v = 12$ ,  $\alpha = 23^\circ 30'$ ;

b)  $v = 6 \cdot 5$ ,  $\alpha = 51^\circ 40'$ .

76. Da se odredi visina  $v$  predmeta (zvonika), izmjeri se od njegova nožišta u horizontalnoj ravnini dužina  $a$ ; zraka doglednica od njezine krajne tačke do vrha predmeta čini s horizontalnom ravninom kut  $\alpha$  (taj se kut zove kut elevacije\*). Kolika je visina  $v$ ?

N. pr. a)  $a = 80 \text{ m}$ ,  $\alpha = 25^\circ 59' 21''$ ;

b)  $a = 672 \text{ m}$ ,  $\alpha = 25^\circ 18' 27''$ .

---

\* ) ako se s nekoga stanovišta gleda (vizira) tačka, koja se nalazi nad horizontalnom ravninom položenom stanovištem, onda se kut, što ga zraka doglednica čini s horizontalnom ravninom, zove kut elevacije tačke; ako se tačka nalazi ispod te horizontalne ravnine, onda se spomenuti kut zove kut depresije.

77. Zvonik visine  $v = 105 \cdot 3$  m, koji stoji na horizontalnom tlu, vidi se s jedne tačke te horizontalne ravnine pod elevacionim kutom  $\alpha = 3^\circ 55' 22''$ ; kolika je daljina te tačke od nožišta zvonika?

78. S tačke, koja se nad morskom površinom nalazi u visini  $v$ , vidi se brod pod depresionim kutom  $\alpha$ ; kolika je horizontalna udaljenost broda (t. j. udaljenost broda od nožišta vertikale spuštene s tačke do površine mora).

N. pr.  $v = 189$  m,  $\alpha = 2^\circ 3' 20''$ .

79. Na brodu stoji uspravan predmet visine  $a$ . S tačke, kojoj je horizontalna udaljenost od tog predmeta  $b$ , vidi se njegov vrh pod elevacionim kutom  $\alpha$ . Neka se proračuna visina brda.

N. pr.  $a = 1$  m,  $b = 100$  m,  $\alpha = 61^\circ 0' 46''$ .

80. S prozora, koji je  $7 \cdot 22$  m nad horizontalnim tlom, vidi se podnožište nekog zvonika pod depresionim kutom  $\alpha = 3^\circ 15'$ , a njegov šiljka pod elevacionim kutom  $\beta = 6^\circ 32'$ . Kolika je visina zvonika?

81. S tačke, koja je 207 m nad površinom rijeke kraj jedne obale, vidi se suprotna tačka druge obale pod depresionim kutom  $\alpha = 42^\circ 44' 28''$ . Kolika je širina rijeke?

82. Kolika je strmina ceste, ako se ona u duljini od 100 m diže za  $3 \cdot 2$  m?

### E. Zadaće iz matematičnoga zemljopisa:

83. Neka se proračuna radij  $\rho$  usporednjaka na zemaljskoj kugli, ako je zadana zemljopisna širina  $\varphi$ . N. pr. a)  $\varphi = 48^\circ 12' 30''$ ; b)  $\varphi = 23^\circ 27' 13''$ ; c)  $\varphi = 66^\circ 32' 47''$ . Kolika je dužina lučnoga stupnja na svakom od tih usporednjaka? Polumjer je zemaljske kugle  $r = 6370$  km.

84. Koja je zemljopisna širina  $\varphi$  usporednjaku, ako je na njem dužina  $1^\circ$  jednaka a) 100 km; b) 50 km? Polumjer zemaljske kugle = 6370 km.

85. Kolika je površina vrućega pojasa na zemaljskoj kugli, ako je polumjer zemlje 637 Mm, a priklon ekliptike  $\varepsilon = 23^\circ 27' 13''$ ?

86. Kolika je površina pojasa između 40. i 50. stupnja zemljopisne širine?

87. Koliko metara provali u jednoj sekundi, uslijed rotacije zemlje oko svoje osi, mjesto, koje se nalazi u zemljopisnoj širini  $\varphi$ ? N. pr.  $\varphi = 48^\circ 12' 35''$ ; polumjer zemlje  $r = 6370$  km.

88. Neka se proračuna luk zemaljskog meridijana, koji se može pregledati s visine  $v$ . N. pr. a)  $v = 65$  m; b)  $v = 3160$  m.

89. Kako visok treba da bude brijev, s kojega bi obzorni krug imao polumjer  $\varrho = 30$  zemljop. miljâ? ( $1^\circ = 15$  zemlj. milj., polumjer zemlje =  $859 \cdot 5$  zemlj. milja, 1 zemlj. milja =  $7416$  m).

90. Kolik je promjer ( $2R$ ) sunca, ako njegov prividni promjer ima  $\alpha = 32'$  a njegova središnja daljina od zemlje iznosi  $d = 20\,665\,840$  zemljop. milja?

91. Horizontal-paralaksa mjeseca iznosi  $57'2''$ ; neka se proračuna geocentrična udaljenost mjeseca od zemlje, ako polumjer zemlje ima  $r = 859 \cdot 6$  zemljop. milja. (Horizontal-paralaksa mjeseca zove se vidni kut, pod kojim bi se iz njegova središta vidio zemaljski polumjer).

#### F. Zadaće iz stereometrije:

92. S tačke  $T$  potegnute su do ravnine  $\varrho$  dužine, koje su duge  $a$  te sa normalom, spuštenom iz  $T$  na ravninu  $\varrho$ , čine kut  $\alpha$ ; kolika je daljina  $d$  tačke  $T$  od ravnine  $\varrho$ ? N. pr. a)  $a = 100$  m,  $\alpha = 10^\circ$ ; b)  $a = 175 \cdot 32$  m,  $\alpha = 34^\circ 46' 40''$ .

93. U središtu  $O$  kružnice, opisane oko trokuta  $ABC$ , uzdignuta je normalna dužina  $OP = d$ . Kolik je prikloni kut  $\varphi$  pravca  $AP$  prema ravnini trokuta? N. pr.  $AB = c = 29$ ,  $BC = a = 36$ ,  $AC = b = 50$ ;  $OP = 62 \cdot 382$ .

94. Neka je  $d$  mjerni broj neke dužine,  $p$  mjerni broj njezine ortogonalne projekcije u ravnini  $\varrho$ , a  $\alpha$  prikloni kut dužine prema toj ravnini.

Izračunajte:

a)  $p$  iz  $d$  i  $\alpha$ ; n. pr.  $d = 65$ ,  $\alpha = 30^\circ 30' 35''$ ;

b)  $\alpha$  iz  $d$  i  $p$ ; n. pr.  $d = 5$ ,  $p = 4$ .

95. Neka je  $P$  pljoština trokuta,  $P_1$  pljoština njegove ortogonalne projekcije u nekoj ravnini  $\varrho$ , a  $\alpha$  prikloni kut ravnine trokuta prema ravnini projekcije. Dokažite, da je  $P_1 = P \cos \alpha$ .

N. pr.  $P = 2500$ ,  $\alpha = 73^\circ 20'$ ,  $P_1 = ?$

96. Neka se poučak naveden pod br. 95. proširi na: a) kojigod mnogokut; b) kojigod ravni lik.

97. Uspravna prizma kvadratične osnovke, kojoj je osnovni brid  $a$ , neka se presiječe tako, da bude presjek pravokutnik pljoštine  $P$ . Kolik



treba da bude prikloni kut  $\varphi$  presjeka prema osnovci? N. pr.  $a = 210$ ,  $P = 46\,641$ .

98. Uspravna prizma, kojoj je osnovka istostraničan trokut, presječena je ravninom, koja je prema osnovci priklonjena pod kutom od  $45^\circ$ . Kolik je presjek, ako je pljoština osnovke  $B = \sqrt{50}$ ?

99. Neka se proračuna prikloni kut  $\omega$  među dvjema pobočkama, koje se sastaju u istom bridu a) pravilna tetraedra; b) pravilna oktaedra.

100. Kod čuna i valjka označuje  $r$  polumjer osnovke,  $v$  visinu,  $s$  stranicu čuna,  $O$  cijelo oplošje,  $P$  površinu obline (plašta),  $V$  volumen (obujam);  $\alpha$  je kut na vrhu presjeka po osi čuna.

Neka se za uspravni čun proračuna:

a)  $V$  iz  $r$  i  $\alpha$ ;  $r = 20$ ,  $\alpha = 87^\circ 14' 20''$ ;

b)  $V$  iz  $v$  i  $\alpha$ ;  $v = 47$ ,  $\alpha = 44^\circ 22'$ ;

c)  $V$  iz  $s$  i  $\alpha$ ;  $s = 10$ ,  $\alpha = 73^\circ 44' 22''$ ;

d)  $V$  i  $P$  iz  $\alpha$  i periferije  $p$  osnovke;  $\alpha = 70^\circ 40'$ ,  $p = 84 \cdot 9$ .

101. Presjek po osi uspravna čuna ima pljoštinu  $S = 10 \text{ dm}^2$ , a kut  $\alpha$  na njegovom vrhu ima  $50^\circ$ ; kolik je obujam toga čuna?

102. Od uspravna je čuna zadan volumen  $V = 15 \text{ dm}^3$  i polumjer  $r = 2 \cdot 5 \text{ dm}$  njegove osnovke; kolik je prikloni kut  $\beta$  njegove stranice prema osnovci?

103. Od uspravna je čuna zadan volumen  $V = 45 \text{ m}^3$  i kut  $\beta = 23^\circ 8'$  između stranice i visine; kolika mu je visina i kolik je radij osnovke?

104. Od uspravne piramide, kojoj je osnovka kvadrat, zadan je volumen  $V = 58 \cdot 778$  i prikloni kut  $\varphi = 68^\circ 9' 24''$  pobočne plohe prema osnovci. Koliki su osnovni bridovi ( $a = ?$ ) i pobočni ( $b = ?$ )?

105. Neka se proračuna volumen trostrane prikraćene piramide iz stranicâ  $a$ ,  $b$ ,  $c$  donje osnovke, iz stranice  $a_1$  gornje osnovke ( $a_1 \parallel a$ ), iz dužine  $s$  pobočnog brida i njegova priklona kuta  $\varphi$  prema osnovci. N. pr.  $a = 10$ ,  $b = 4 \cdot 25$ ,  $c = 10 \cdot 25$ ,  $a_1 = 2$ ,  $s = 28$ ,  $\varphi = 63^\circ 14'$ .

106. Os  $a$  kosa valjka priklonjena je pod kutom  $\varphi$  prema osnovci, kojoj je polumjer  $r$ . Neka se proračuna volumen valjka. N. pr.

a)  $a = 16 \cdot 066$ ,  $r = 2 \cdot 09$ ,  $\varphi = 76^\circ 4' 40''$ ;

b)  $a = 27$ ,  $r = 8$ ,  $\varphi = 48^\circ 42' 24''$ .

107. Od kosa valjka zadan je volumen  $V = 116 \cdot 25$  i prikloni kut  $\varphi = 72^\circ 13'$  osi prema osnovci. Kolik je volumen  $V'$  uspravna valjka,

koji ima istu osnovku kao što zadani kosi, ako mu je visina jednaka dužini osi kosoga?

108. U kosu je valjku os  $a$  priklonjena pod kutom  $\varphi$  prema osnovci, a pljoština valjkova karakterističnoga prereza jest  $P$ ; kolik mu je volumen? N. pr.  $a = 16 \cdot 25$ ,  $\varphi = 69^\circ 18' 20''$ ,  $P = 45 \cdot 081$ .

109. Od uspravna prikraćena čuna zadani su polumjeri  $r$  i  $r_1$  obiju osnovaka i prikloni kut  $\varphi$  stranice prema donjoj osnovci; kolika mu je oblina  $P$ ? N. pr.  $r = 13$ ,  $r_1 = 5$ ,  $\varphi = 52^\circ 18' 25''$ .

110. Kolik je volumen uspravna prikraćena čuna, ako su  $r$  i  $r_1$  polumjeri njegovih osnovaka, a  $\varphi$  prikloni kut stranice prema donjoj osnovci? N. pr.  $r = 28$ ,  $r_1 = 18$ ,  $\varphi = 66^\circ 22' 49''$ .

111. Romb se vrti oko osi, koja prolazi krajem kraće dijagonale uspredno s duljom. Kolik je volumen tijela, koje nastaje tom vrtnjom, ako je stranica romba  $a = 64$ , a kut  $\varphi$  između stranice i osi jednak  $36^\circ 18' 9''$ ?

112. Iz obline (plašta)  $P$  uspravna prikraćena čuna, njegove stranice  $s$  i priklona kuta  $\alpha$  stranice prema donjoj osnovci izračunajte mu volumen  $V$ .

N. pr.  $P = 194 \cdot 35$ ,  $s = 7 \cdot 9$ ,  $\alpha = 84^\circ 28' 30''$ .

113. Kolik je središnji kut  $\alpha$  kuglina isječka, ako je njegova sferna oblina (t. j. pripadna kalota) jednaka njegovoj čunovitoj oblino (t. j. oblino pripadnoga čuna)?

114. Od uspravna prikraćena čuna zadani su polumjeri  $r$  i  $r_1$  obiju osnovaka i prikloni kut  $\alpha$  stranice prema donjoj osnovci. Kolik je polumjer kugle, kojoj je volumen jednak volumenu toga prikraćenoga čuna? N. pr.  $r = 17$ ,  $r_1 = 11$ ,  $\alpha = 37^\circ 14'$ .

115. Iz omjera  $m : n$  kalote prema cijeloj sfernoj plohi izračunajte središnji kut  $\alpha$  luka, koji izvodi kalotu, kad se on vrti oko polumjera, koji omeđuje luk; n. pr.  $m = 1$ ,  $n = 4$ .

116. Iz omjera  $m : n$  kuglina isječka prema obujmu cijele kugle izračunajte središnji kut  $\alpha$  onoga kružnoga isječka, koji rotacijom oko polumjera izvodi taj kuglin isječak; n. pr.  $m = 3$ ,  $n = 4$ .

117. Kružni odsječak, kojemu pripada središnji kut  $\alpha$ , vrti se oko promjera usporednoga prema njegovoj tetivi. Kolik je volumen prstenastoga tijela, ako je  $V$  volumen njemu pripadne kugle? N. pr.  $V = 146 \cdot 2$ ,  $\alpha = 53^\circ 40' 10''$ .

## Razrješavanje istokračnih trokuta i pravilnih poligona.

### A. Istokračni trokuti.

(Kod istokračna trokuta označuje  $a$  osnovku,  $b$  krak,  $v$  visinu na  $a$ ,  $\alpha$  kut na vrhu,  $\beta$  kut kod osnovke,  $P$  pljoštinu).

Neka se razriješi istokračan trokut, ako je zadano:

$$118. \quad a, \alpha; \text{ n. pr. } a = 240, \alpha = 59^\circ 53' 32''.$$

$$119. \quad b = 1 \cdot 2345, \beta = 42^\circ 16' 23''.$$

$$120. \quad a = 5 \cdot 684, \beta = 48^\circ 12' 10''.$$

$$121. \quad b = 505, \alpha = 83^\circ 25' 4''.$$

$$122. \quad a = 504, b = 277.$$

$$123. \quad a = 9, v = 20.$$

$$124. \quad b = 581, v = 40.$$

$$125. \quad v = 9, \alpha = 154^\circ 38' 20''.$$

$$126. \quad P = 2660, \alpha = 82^\circ 13' 28''.$$

$$127. \quad P = 1260, b = 53.$$

$$128. \quad P = 159 \cdot 6, v = 16 \cdot 8.$$

$$129. \quad a = 72, v_2 \text{ (t. j. visina okomita na kraku)} = 43 \cdot 2.$$

$$130. \quad b = 29, v_2 = 28 \cdot 96.$$

$$131. \quad b = 581, v_1 = 40.$$

$$132. \quad b = 170, r \text{ (polumjer opisanoga kruga)} = 93 \cdot 83.$$

$$133. \quad a = 18, \rho \text{ (polumjer upisanoga kruga)} = 7 \cdot 2.$$

$$134. \quad v_1 = 126, v_2 = 62 \cdot 02.$$

$$135. \quad P = 960, a : v = m : n = 5 : 6.$$

$$136. \quad a = 12, v_1 : v_2 = m : n = 5 : 6; (v_1 \perp a, v_2 \perp b).$$

### B. Zadaće o krugu.

137. U krugu, kojemu je polumjer  $r = 7$  m, potegnuta je tetiva  $s = 11$  m; kolik je pripadni središnji kut  $\alpha$  i udaljenost  $u$  tetive od središta?

**138.** Kružni svod (luk), kojemu pripada tetiva  $s = 18$  m, ima visinu  $v = 3$  m; kolik je a) pripadni središnji kut; b) polumjer kružnice; c) kolika je dužina svoda?

Ako se iz središta kruga potegne okomica na tetivu, onda se dužina omeđena na toj okomici tetivom i pripadnim lukom zove *visina luka* i pripadna odsječka.

**139.** Neka se iz polumjera  $r$  kruga i središnjega kuta  $\alpha$  proračuna pljoština  $P$  pripadnoga odsječka. N. pr.

a)  $r = 18$ ,  $\alpha = 63^\circ 17'$ ;                      b)  $r = 12.5$ ,  $\alpha = 42^\circ 13'$ ;

c)  $r = 13.47$ ,  $\alpha = 53^\circ 24'$ .

**140.** Neka se izračuna pljoština kružna odsječka iz njegova središnjega kuta  $\alpha = 66^\circ 30'$  i udaljenosti  $u = 48$  m pripadne mu tetive od središta kruga.

**141.** Pljoština kružna odsječka ima  $5.07$  m<sup>2</sup>; kolik je polumjer kruga, ako je  $\alpha = 42^\circ 13'$  pripadni središnji kut?

**142.** Neka se proračuna pljoština kružna odsječka iz pripadne tetive  $s = 30.78$  dm i njegove visine  $v = 5.97$ . (Što se razumijeva pod "visinom" odsječka, vidi pod br. 138.).

**143.** Tri kružnice, kojima su polumjeri dugi 1 m, 2 m, 3 m, dotičku se dva po dva i to izvana; kolika je pljoština lika, koji se nalazi između te tri kružnice?

**144.** Dvije se kružnice, kojima su  $r$  i  $r_1$  polumjeri, presijecaju; kolika je pljoština lika, koji je zajednički za oba kruga, ako je  $s$  njihova zajednička tetiva?

### C. Zadaće o pravilnim poligonima.

**145.** Iz stranice  $s = 3.6$  m pravilnoga peterokuta izračunajte polumjere  $r$  i  $\varrho$  opisane i upisane mu kružnice te njegovu pljoštinu  $P$ .

**146.** U krugu polumjera  $r = 14$  cm upisan je pravilan deveterokut; neka se proračuna njegova stranica i pljoština. Kolika je stranica  $S$  pravilna deveterokuta opisana oko istoga kruga?

**147.** Zadana je pljoština  $P$  pravilna dvanaesterokuta; kolika mu je stranica?

**148.** Neka se izračuna pljoština pravilna osamnaesterokuta iz polumjera  $\varrho = 4.9127$  upisanoga kruga.

**D. Stereometrijske zadaće.**

149. Neka se proračuna volumen uspravne prizme, kojoj je osnovka pravilan  $n$ -terokut, iz osnovnoga brida  $a$  i visine  $v$ ; n. pr.  $n = 13$ ,  $a = 17 \cdot 6$ ,  $v = 28 \cdot 7$ .

150. Iz volumena  $V$  i visine  $v$  uspravne prizme, kojoj je osnovka pravilan  $n$ -terokut, proračunajte osnovni brid  $a$ ; n. pr.  $n = 12$ ,  $V = 368\,667$ ,  $v = 42$ .

151. Neka se proračuna volumen uspravne piramide, kojoj je osnovka pravilan  $n$ -terokut stranice  $a$ , ako je svaka pobočka priklonjena pod  $\varphi$  prema osnovci; n. pr.  $n = 15$ ,  $a = 64$ ,  $\varphi = 28^\circ 42' 16''$ .

152. Od uspravne piramide, kojoj je osnovka pravilan osmerokut, zada se pobočni brid  $b = 42$  dm i kut  $\alpha = 41^\circ 47'$ , što ga on čini s visinom piramide; kolik joj je volumen?

153. Iz volumena  $V$  uspravne piramide, kojoj je osnovka pravilan  $n$ -terokut stranice  $a$ , proračunajte kut, pod kojim je pobočni brid priklonjen prema osnovci?

154. Neka se proračuna volumen uspravne piramide, kojoj je osnovka pravilan peterokut, ako se zadade osnovni brid  $a = 3$  i pobočni brid  $b = 10$ . Kolik je prikloni kut pobočke prema osnovci?

155. Neka se proračuna volumen uspravne prikraćene piramide, kojoj su osnovke pravilni  $n$ -terokuti, ako se zadadu polumjeri  $r$  i  $r_1$  kružnica, koje se osnovkama mogu opisati, i dužina  $s$  pobočna brida; n. pr.  $n = 5$ ,  $r = 4$ ,  $r_1 = 1$ ,  $s = 5$ .

**Goniometrijske funkcije tupih i izbočenih kutova. Funkcije negativnih kutova.**

156. U kojem se kvadrantu nalazi kut, ako njegov "sinus" i "cosinus" imaju a) jednake predznake; b) različite predznake?

157. Zašto imaju funkcije "tangens" i "cotangens" svakoga kuta jednake predznake?

158. Neka je  $\cos \alpha = +\frac{2}{3}$ ; u kojem je kvadrantu pripadni kut  $\alpha$ , ako se promatraju kuti između  $0$  i  $360^\circ$ ?