# 1.

# Definicije, temeljni pojmovi i veličine

Već su antički grčki matematičari, uz najjednostavnije geometrijske likove kao što su trokut i kružnica, proučavali i krivulje, koje zovemo **elipsa**, **hiperbola** i **parabola**. Te nazive smo od njih i naslijedili. Kako ćemo poslije vidjeti, elipsa je poopćena kružnica (ili, kružnica je posebna elipsa), a parabola je, s jedne strane graničan slučaj elipse, a s druge strane graničan slučaj hiperbole. Te krivulje imaju mnogo zanimljivih zajedničkih, a i nekih posebnih osobitosti. Držim da je dobro da se te osobitosti, iskazane, a potom i dokazane nađu na jednom mjestu. To je bio *spiritus movens*, a i ostaje glavna zadaća ove knjižice.

Najprije ćemo definirati navedene krivulje. Napomenimo odmah da postoji više tih odrednica (definicija), koje su, naravno, međusobno ekvivalentne.

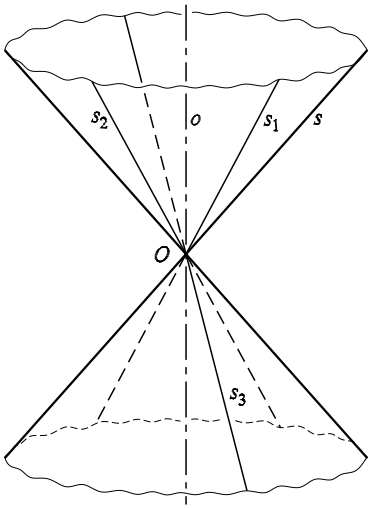
Čini se prihvatljivim najprije navesti takozvane genetičke definicije (odrednice po postanku) spomenutih krivulja. Sve te krivulje imaju zajedničku takvu definiciju, koja glasi:

**D1.** *Elipsa, parabola i hiperbola su presjek ravnine i stožaste plohe (pri čemu je svaka od tih krivulja poseban slučaj tog presjeka).*

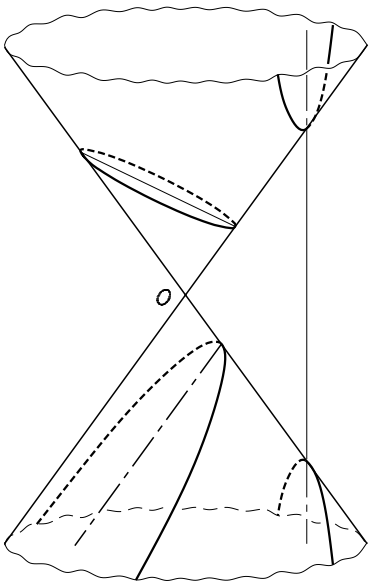
Da bi stvar bila jasnija, najprije ćemo definirati **stožastu plohu**.

Neka su $o$ i $s$ dva različita pravca sa zajedničkom točkom $O$. Skup svih točaka prostora što ga opisuje pravac $s$ kada se zavrti oko pravca $o$ za $360^\circ$, zove se stožasta ploha. Točka $O$ zove se vrh, pravac $o$ os, a pravac $s$ (u bilo kojem položaju) izvodnica stožaste plohe. Tako su na sl. 1.1 uz izvodnicu $s$ nacrtane još i izvodnice $s_1$, $s_2$ i $s_3$.

Sada možemo zasebno definirati svaku od navedenih krivulja, pri čemu će nam pomoći sl. 1.2.




*Sl. 1.1.*




*Sl. 1.2.*

**D2.** *Ako ravnina siječe sve izvodnice, a ne prolazi vrhom stožaste plohe, presjek je elipsa.*

Ako se u ovoj definiciji postavi poseban uvjet, da je ravnina okomita na osi stožaste plohe, tada je očito da je presjek kružnica. To znači da je, kako smo već naveli, kružnica posebna elipsa.

**D3.** *Ako je ravnina usporedna s jednom izvodnicom, a ne sadrži tu izvodnicu, presjek je parabola.*

**D4.** *Ako je ravnina usporedna s dvjema izvodnicama, a ne prolazi vrhom stožaste plohe, presjek je hiperbola.*

Vidimo da je elipsa zatvorena, a parabola i hiperbola otvorene (beskonačne) krivulje. Parabola se sastoji od jednog, a hiperbola od dvaju dijelova. Napomenimo da, kada promatramo hiperbolu, uvijek moramo promatrati oba ta dijela, jer oni kao cjelina čine tu krivulju. Ti dijelovi zovu se grane hiperbole.

Zbog činjenice da elipsa, hiperbola i parabola nastaju presijecanjem stožaste plohe ravninom, te su krivulje dobile i poseban zajednički naziv **čunjosječnice**. Taj naziv dolazi od, pomalo već arhaične, hrvatske riječi **čunj** (stožac). (Riječ čunj sačuvala se u kuglanju i još nekim slučajevima.) Riječ čunjosječnica nastala je po uzoru na latinski naziv *sectiones conicae* (stožasti presjeci), koji se rabio u vrijeme kada je latinski bio jezik znanosti. Zato se čunjosječnice kraće zovu i konike.

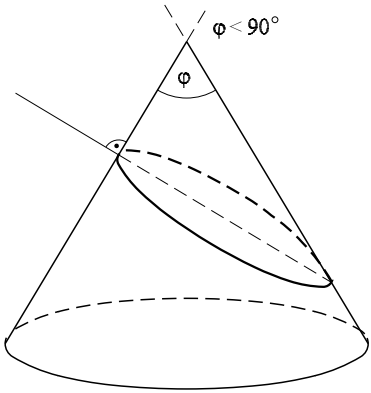
Spomenimo da je *Josip Ruđer Bošković* (1711.–1787.), zasigurno najveći hrvatski znanstvenik, napisao poznato djelo o čunjosječnicama, pod naslovom *Sectionum conicarum elementa* (Rim, 1754.).

Navedimo podatak da je grčki matematičar *Menehmo* (4. st. prije Krista) svaku čunjosječnicu definirao kao presjek ravnine okomite na izvodnicu posebnog stošca, već prema kutu osnog presjeka tog stošca. Evo tih definicija:

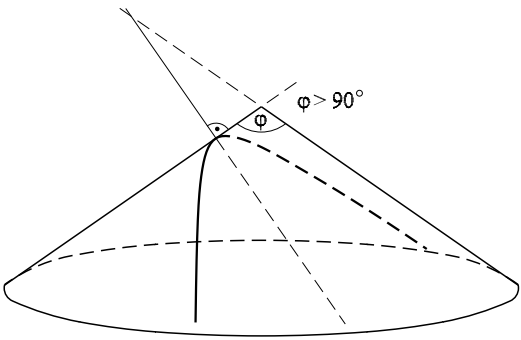
**D5.** *Ako je kut $\varphi$ osnog presjeka stošca šiljast, onda svaka ravnina okomita na izvodnicu stošca siječe stožac u elipsi* (vidi sl. 1.3.).

**D6.** *Ako za kut $\varphi$ osnog presjeka stošca vrijedi $90^\circ < \varphi < 180^\circ$, onda svaka ravnina okomita na izvodnicu stošca siječe stožac u hiperboli* (vidi sl. 1.4.).

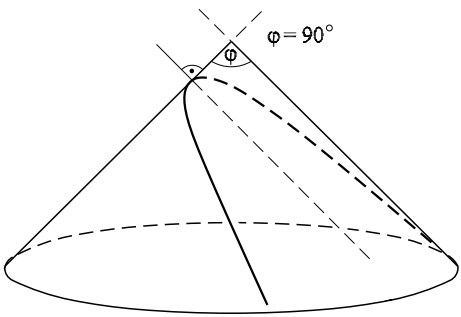
**D7.** *Ako je kut $\varphi$ osnog presjeka stošca pravi, onda svaka ravnina okomita na izvodnicu stošca siječe stožac u paraboli* (vidi sl. 1.5.).




*Sl. 1.3.*




*Sl. 1.4.*




*Sl. 1.5.*

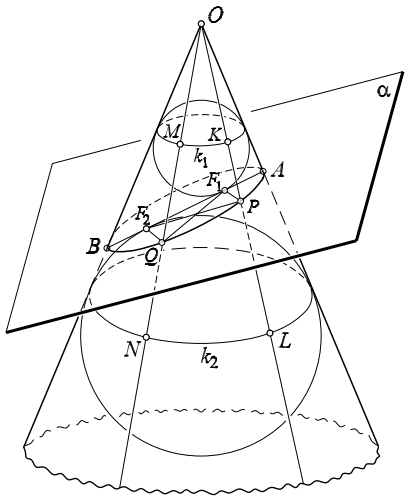
Treba kazati da Menehmo nije promatrao presjeke na stožastoj (beskonačnoj) plohi, nego na (konačnom) stošcu. Zato je kod parabole dobivao samo jedan njezin dio, a kod hiperbole jedan dio jedne njezine grane.

Prvi koji je uvidio da se sve tri krivulje mogu dobiti na istom stošcu bio je *Apolonije* iz Perge (3. do 2. st. prije Krista).

Pokažimo da ovako definirane krivulje imaju zanimljive metričke osobitosti. Dokaze tih osobitosti provest ćemo onako kako je to 1822. godine učinio belgijski matematičar *Pierre Dandelin* (1794.–1847.). Dokazi se sastoje u tome da se u dijelove na koje ravnina dijeli stožastu plohu upišu sfere. Te su sfere poslije prozvane Dandelinove sfere. Dokaze ćemo provesti za svaku čunjosječnicu posebno.

## Elipsa

Prema **D2**., ravnina siječe sve izvodnice stošca. Zato je presjek na jednom od dijelova stožaste plohe, na koje plohu dijeli njezin vrh $O$. Zato pripadni crtež izgleda kao na sl. 1.6 (bez drugog dijela stožaste plohe). Ravnina $\alpha$ dijeli uočeni dio plohe na dva dijela, od kojih je jedan plašt kosog kružnog stošca, a drugi ostatak tog dijela plohe. U svaki od tih dijelova upiše se sfera koja dodiruje stožastu plohu i ravninu.




*Sl. 1.6.*

Sfera upisana u stožac dira plohu u kružnici $k_1$, a ravninu u točki $F_1$. Druga sfera dira plohu u kružnici $k_2$, a ravninu u točki $F_2$. Neka je $P$

bilo koja točka presjeka ravnine i plohe, tj. bilo koja točka nastale elipse. Izvodnica koja prolazi točkom $P$ dira kružnice $k_1$ i $k_2$ u točkama $K$ i $L$.

Koristimo poznatu geometrijsku činjenicu. Ako se iz bilo koje točke izvan sfere polože dva pravca koja diraju tu sferu, tada su udaljenosti te točke od dirališta tih pravaca i sfere međusobno jednake.

Zato je $|PK| = |PF_1|$ i $|PL| = |PF_2|$, a odatle $|PF_1| + |PF_2| = |PK| + |PL| = |KL|$. Za neku drugu točku $Q$ iste elipse vrijedi: $|QF_1| + |QF_2| = |QM| + |QN| = |MN|$. Očito je $|MN| = |KL|$. Zaključujemo da unutar elipse postoje dvije točke, koje smo označili $F_1$ i $F_2$, takve da za svaku točku elipse $P$ vrijedi $|PF_1| + |PF_2| = \text{const}$.

Pravac $F_1F_2$ dijeli elipsu na dva dijela (dva luka elipse). Budući da upravo navedeno svojstvo vrijedi za svaku točku elipse, nije teško zaključiti da je elipsa simetrična s obzirom na pravac $F_1F_2$, a isto tako simetrična i s obzirom na simetralu dužine $\overline{F_1F_2}$.

Neka su $A$ i $B$ točke u kojima pravac $F_1F_2$ siječe elipsu. Kako je $A$ na elipsi, mora vrijediti $|PF_1| + |PF_2| = |AF_1| + |AF_2|$. Zbog simetrije vrijedi $|AF_2| = |BF_1|$, pa je $|AF_1| + |AF_2| = |AF_1| + |BF_1| = |AB|$. $|AB|$ je duljina tetive što je pravac $F_1F_2$ čini na elipsi i za svaku elipsu stalna. Tu ćemo duljinu označavati s $2a$ i zvati duljinom glavne ili velike osi elipse, a broj $a$ duljinom glavne poluosi te elipse.

Na temelju svega ovoga, možemo pisati:

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a. \tag{1}$$

Jednakost (1) vrlo je važna pri proučavanju elipse. Vrijedi i obrat: skup svih točaka ravnine za koju vrijedi jednakost (1) jest elipsa. (To ćemo dokazati na drugom mjestu.) Zato se ta jednakost vrlo često uzima za definiciju elipse. Tu definiciju iskazujemo ovako:

**D8.** *Elipsa je skup svih točaka ravnine kojih je zbroj udaljenosti od dviju čvrstih točaka $F_1$ i $F_2$ ravnine stalan i jednak $2a$, gdje je $2a$ duljina tetive što je pravac $F_1F_2$ čini na tom skupu.*

Vidimo da su točke $F_1$ i $F_2$ bitne za svaku elipsu. Te ćemo točke zvati **žarišta** ili fokusi elipse. Zašto se one zovu upravo tako, bit će objašnjeno na drugom mjestu.

Udaljenosti bilo koje točke elipse od njezinih žarišta zovu se **radij-vektori** te točke. Iako su te veličine skalari, to jest nisu vektori, taj se naziv uobičajio, pa ćemo ga i mi rabiti.

Uzmimo da se ravnina $\alpha$ vrti oko pravca te ravnine koji prolazi probodištem osi plohe i ravnine, dok ravnina ne bude okomita na os plohe. Pri toj vrtnji žarišta $F_1$ i $F_2$ sve se više međusobno približavaju,

dok u graničnom slučaju okomitosti ravnine i osi plohe ne padnu u istu točku $F$, to jest, u tom slučaju vrijedi $F_1 \equiv F_2 \equiv F$. Sada vrijedi: $|PF_1| + |PF_2| = 2a \implies |PF| + |PF| = 2a$, ili $|PF| = a$. Posljednja jednakost jest (planimetrijska) definicija kružnice sa središtem u točki $F$ i polumjerom $a$.

Možemo promatrati i obratan postupak.

Pođimo od kružnice sa središtem $F$ i polumjerom $a$. Za svaku točku $P$ kružnice vrijedi $|PF| = a$ ili $|PF| + |PF| = 2a$.

Neka se sada točka $F$ "razdvoji" u dvije točke $F_1$ i $F_2$, simetrične s obzirom na $F$, to jest neka te točke izađu iz središta u navedene položaje $F_1$ i $F_2$. Jednadžba $|PF| + |PF| = 2a$ tada prelazi u $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, što je , prema (1), jednadžba elipse. Udaljenost $|FF_1| = |FF_2| = \frac{1}{2}|F_1F_2|$ je mjera koja kazuje koliko se elipsa razlikuje od kružnice, to jest koliko su žarišta elipse odmakla iz središta kružnice. Izraz "iz središta" na latinskom doslovno glasi *ex centro*. Zato se udaljenost $\frac{1}{2}|F_1F_2|$ zove linearni ekscentricitet elipse, a označavat ćemo ga s $e$, to jest:

$$|F_1F_2| = 2e. \tag{2}$$

## Hiperbola

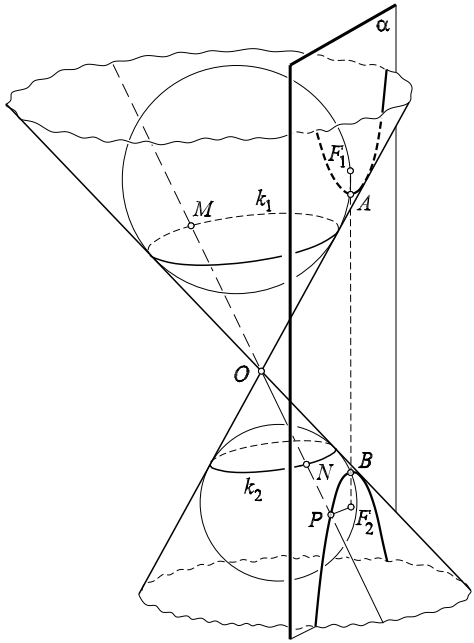
Prema **D4.**, ravnina $\alpha$ siječe oba dijela stožaste plohe. Dandelinove sfere upišimo kao na sl. 1.7. Neka je $P$ bilo koja točka nastale hiperbole, tada, uz oznake kao na slici, vrijedi $|PF_1| = |PM|$ i $|PF_2| = |PN|$, odakle je $|PF_1| - |PF_2| = |PM| - |PN| = |MN|$.

Budući da su ravnine kružnica $k_1$ i $k_2$ međusobno usporedne, tada je $|MN| = \text{const}$. za svake dvije točke $M$ i $N$ na tim kružnicama, koje pripadaju istoj izvodnici plohe. Lako se pokaže da je hiperbola simetrična s obzirom na pravac $F_1F_2$, kao i na simetralu dužine $\overline{F_1F_2}$.

Neka pravac $F_1F_2$ siječe hiperbolu točkama $A$ i $B$, pri čemu je točka $B$ na istoj grani hiperbole kao i točka $P$. Vrijedi: $|PF_1| - |PF_2| = |BF_1| - |BF_2| = |AB|$, jer je, zbog simetrije, $|AF_1| = |BF_2|$. Označimo li $|AB| = 2a$, imamo $|PF_1| = |PF_2| = 2a$.

Na našoj smo slici uzeli točku $P$ na grani hiperbole takvu da je $|PF_1| > |PF_2|$. Da je točka $P$ na drugoj grani hiperbole, bilo bi $|PF_2| > |PF_1|$ i zbog toga $|PF_2| - |PF_1| = 2a$. Zato vrijedi općenito:

$$||PF_1| - |PF_2|| = 2a. \tag{3}$$




*Sl. 1.7.*

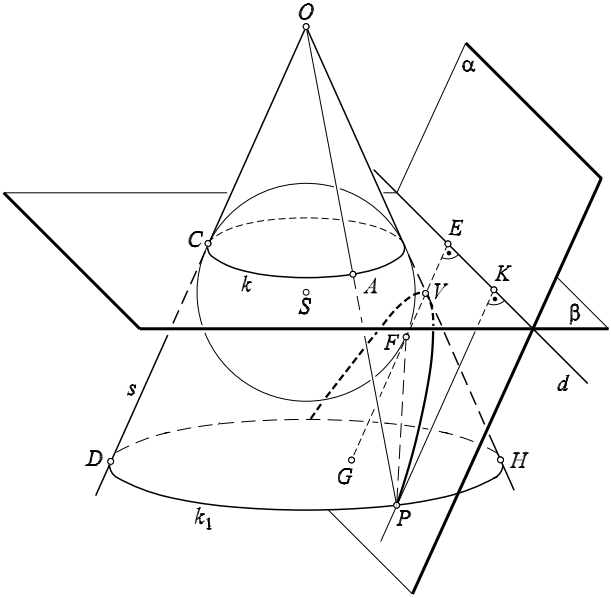
Točke $F_1$ i $F_2$ zvat ćemo, kao i kod elipse, žarišta ili fokusi, a isto tako i međusobnu udaljenost tih točaka označavati s $|F_1F_2| = 2e$, gdje je $e$ linearni ekscentricitet hiperbole. Isto tako, udaljenost bilo koje točke hiperbole od njezinih žarišta zvat ćemo radijvektorima te točke.

Vrlo važnu jednakost (3) često rabimo kao definicijsku osobitost i odatle ova odrednica.

**D9.** *Hiperbola je skup točaka ravnine kojih je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od dviju čvrstih točaka $F_1$ i $F_2$ te ravnine stalna i jednaka $2a$, gdje je $2a$ duljina tetive što je na tom skupu određuje pravac $F_1F_2$.*

## Parabola

Ako je na sl. 1.6 ravnina $\alpha$ usporedna s jednom izvodnicom stožaste plohe, tada je središte druge sfere beskonačno daleka točka. Zato promatramo samo jednu upisanu sferu, kao na sl. 1.8.




*Sl. 1.8.*

Ta sfera dira plohu u kružnici $k$, a ravninu $\alpha$ u točki $F$. Neka je ravnina $\alpha$ usporedna s izvodnicom $s$. Na presječnoj krivulji uzmimo bilo koju točku $P$. Budući da je $P$ na stožastoj plohi, tom točkom prolazi kružnica $k_1$ koja je na plohi, a ravnina te kružnice usporedna je s ravninom kružnice $k$.

Izvodnica $OP$ siječe kružnicu $k$ u točki $A$. Kako pravci $PA$ i $PF$ diraju upisanu sferu u točkama $A$ i $F$, mora biti $|PA| = |PF|$. Izvodnica $s$ siječe kružnice $k$ i $k_1$ u točkama $C$ i $D$. Očito je $|AP| = |CD|$. Uočimo da dužina $\overline{CD}$ leži u osnom presjeku određenom točkama $O$, $S$ i $F$, gdje je $S$ središte upisane sfere. Ravninu kružnice $k$ označimo s $\beta$, a presjek ravnina $\alpha$ i $\beta$ neka je pravac $d$. Pravac $SF$ okomit je na ravninu $\alpha$, jer je $F$ diralište te ravnine i upisane sfere. Zato je svaka ravnina koja sadrži pravac $SF$ okomita na ravninu $\alpha$, zbog čega je osni presjek $OSF$ okomit na ravninu $\alpha$. Ravnina kružnice $k$ okomita je na osni presjek, zbog čega je i pravac $d$ okomit na taj presjek. Kako je pravac koji je okomit na ravninu, okomit na svaki pravac te ravnine, to je $d \perp CD$.

Usporednim pomakom dužinu $\overline{CD}$ možemo dovesti u položaj $\overline{EG}$, gdje je $E$ na pravcu $d$, a $G$ na promjeru $\overline{DH}$ kružnice $k_1$. Ako je $K$ nožište okomice iz točke $P$ na pravac $d$, mora biti $\overline{PK} \perp d$ i $|PK| = |GE|$.

Zbog svega toga vrijedi $|PF| = |PA| = |DC| = |GE| = |PK|$, to jest: $|PF| = |PK|$, odnosno

$$|PF| = d(P, d). \tag{4}$$

(Oznaka $d(T, p)$ znači udaljenost točke $T$ od pravca $p$.)

Položaj pravca $d$ određen je položajem ravnine $\alpha$ prema stožastoj plohi. To znači da je za svaku parabolu u ravnini te parabole jednoznačno određen i pravac $p$.

Relacija (4) vrlo se često uzima za definiciju parabole.

**D10.** *Parabola je skup točaka ravnine koje su jednako udaljene od jedne čvrste točke ($F$) i jednog čvrstog pravca ($d$) te ravnine.*

Točka $F$ zove se žarište ili fokus, a pravac $d$ ravnalica ili direktrisa parabole. Pravac koji prolazi žarištem, a okomit je na ravnalicu zove se os parabole. Točka ($V$) u kojoj os parabole siječe parabolu jest tjeme parabole. Parabola je očito simetrična s obzirom na os. Za zadanu parabolu udaljenost $|EF|$ je stalna i označavat ćemo $|FE| = p$. Broj $2p$ je parametar parabole.

Kako je $V$ točka parabole, mora vrijediti:

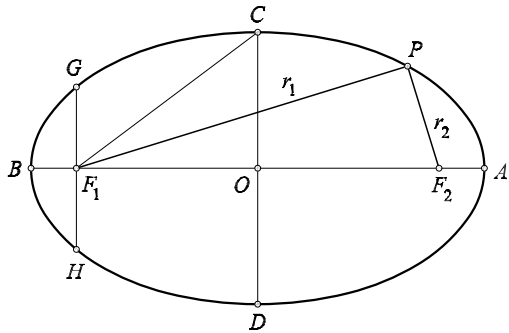
$$|VF| = |VE| = \frac{1}{2}|FE| = \frac{p}{2}. \tag{5}$$

Definicije **D8**., **D9**. i **D10**. zovu se metričke definicije pojedinih čunjosječnica.

## Temeljni pojmovi i veličine elipse

Na temelju **D1**. zaključujemo da je elipsa zatvorena krivulja i ima oblik kao na sl. 1.9. Točke $F_1$ i $F_2$ su žarišta elipse. Već je utvrđeno da za svaku točku elipse $P$ vrijedi $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, gdje je $2a = |AB|$. Točke $A$ i $B$ su glavna tjemena elipse. Radijvektore bilo koje točke $P$ elipse označavat ćemo: $|PF_1| = r_1$, $|PF_2| = r_2$.

Dužine $\overline{F_1F_2}$ i $\overline{AB}$ imaju zajedničko polovište, točku $O$, koja je središte elipse. Kako je već rečeno, vrijedi $|OF_1| = |OF_2| = e$, pri čemu se broj $e$ zove linearni ekscentricitet elipse. Dužina $\overline{AB}$ (koja je najduža tetiva elipse) jest glavna ili velika os, a $|AB| = 2a$ je duljina glavne ili velike osi elipse. Zato je $|OA| = |OB| = a$ duljina glavne ili velike poluosi elipse. Broj $\varepsilon = \dfrac{e}{a}$ zove se numerički ekscentricitet elipse i za svaku elipsu vrijedi $0 < \varepsilon < 1$.




*Sl. 1.9.*

Pravac koji je okomit na glavnu os, a prolazi središtem elipse, siječe elipsu u točkama $C$ i $D$, koje su sporedna tjemena elipse. Označavat ćemo ih $|CD| = 2b$ i zvati duljinom male ili sporedne osi elipse, ili $|OC| = |OD| = b$, gdje je $b$ duljina male ili sporedne poluosi elipse. Točka $C$ je na elipsi i vrijedi $|CF_1| + |CF_2| = 2a$. Kako je zbog simetrije $|CF_1| = |CF_2|$, tada je $|CF_1| = |CF_2| = a$. Isto vrijedi i za tjeme $D$. Iz trokuta $CF_1O$ vidimo da je $|OF_1|^2 + |OC|^2 = |CF_1|^2$, ili

$$e^2 + b^2 = a^2. \tag{6}$$

Iz (6) slijedi $a > b$, što potvrđuje opravdanost naziva velika i mala os, odnosno poluos.

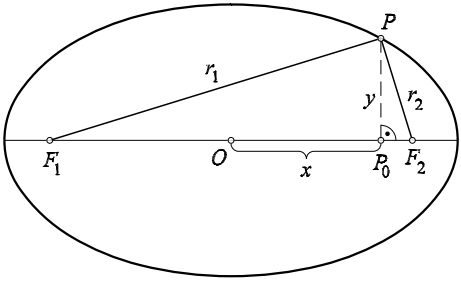
Duljina tetive elipse koja prolazi jednim žarištem, a okomita je na glavnu os, zove se parametar elipse i označuje sa $2p$. Na našoj je slici $|GH| = 2p$, odnosno $|F_1G| = |F_1H| = p$.

Vrijedi: $p = \dfrac{b^2}{a}$, što neposredno slijedi iz $p + |GF_2| = 2a$ i $p^2 + |GF_2|^2 = 4e^2$.

## Duljine radijvektora elipse

Neka je $P$ bilo koja točka elipse, a $P_0$ njezina ortogonalna projekcija na glavnu os. Označimo li $|OP_0| = x$, $|PP_0| = y$, tada vrijedi $r_1^2 = y^2 + (e+x)^2$, $r_2^2 = y^2 + (e-x)^2$, sl. 1.10. Odavde dobijemo: $r_1^2 - r_2^2 = (e+x)^2 - (e-x)^2$, $(r_1+r_2)(r_1-r_2) = 4ex$, $2a(r_1-r_2) = 4ex$, $r_1 - r_2 = 2\varepsilon x$. Iz sustava jednadžbi $r_1 + r_2 = 2a$, $r_1 - r_2 = 2\varepsilon x$, dobije se:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \qquad r_2 = a - \varepsilon x. \tag{7}$$



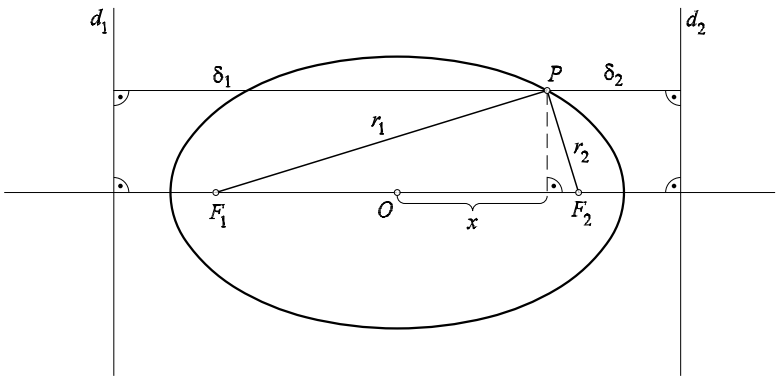

*Sl. 1.10.*

## Ravnalice elipse

**D11.** *Pravci koji su okomiti na glavnu os i udaljeni od središta elipse za* $\frac{a^2}{e}$*, zovu se ravnalice ili direktrise elipse (*$a$ *je duljina glavne poluosi,* $a$ $e$ *linearni ekscentricitet elipse).*

Ravnalice ćemo označavati sa $d_1$ i $d_2$. Kako je $\frac{a^2}{e} > a$, tada ravnalice nemaju zajedničkih točaka s elipsom.

Označimo li udaljenosti bilo koje točke $P$ elipse od ravnalica sa $\delta_1$ i $\delta_2$, tada vrijedi (vidi sl. 1.11) $\delta_1 = \frac{a^2}{e} + x \implies \varepsilon\delta_1 = \frac{a^2}{e} \cdot \frac{e}{a} + \varepsilon x = a + \varepsilon x =$ (vidi (7)) $= r_1$. Isto se tako dobije $\varepsilon\delta_2 = r_2$.




*Sl. 1.11.*

Napomenimo da ravnalica $d_i$ odgovara žarištu $F_i$, $i = 1, 2$. Zaključujemo da vrijedi tvrdnja: označimo li sa $\delta$ udaljenost bilo koje točke