1.

Općinsko natjecanje

Općinska i gradska natjecanja održana su u svim gradovima i općinama naše domovine 5. ožujka 2004. Kao što je uobičajeno, zadatke je osmislilo Državno povjerenstvo za matematička natjecanja. Učenici osnovnih škola rješavali su svoje zadatke 2 sata, a učenici srednjih 3 sata.

Osnovna škola

4. razred

4.1. Izračunaj

$$(345 - ((720 : 6) \cdot 2 - 4 + 2) : 2 + 44) : 3 - 25 : 5.$$

4.2. Koliko ima troznamenkastih brojeva čiji je umnožak znamenaka veći od 8, a manji od 12? Ispiši sve tražene brojeve.

4.3. Marta želi kupiti nekoliko flomastera. Ako bi kupila 6 flomastera, ostalo bi joj 7 kuna, a ako bi ih željela kupiti 10, nedostajalo bi joj 5 kuna. Kolika je cijena jednog flomastera? Koliko je novaca imala Marta?

4.4. Zadan je jednakokračan trokut ABC s osnovicom $\overline{AB}$ kojem je duljina kraka tri puta veća od duljine osnovice. Izračunaj duljine osnovice i kraka trokuta ako je opseg trokuta 252 mm. Nacrtaj trokut ABC.

4.5. Na slavlju je bilo 248 gostiju. Svaki je gost na kraju večere pojeo jedan od dva sladoledna kupa: sladoledni kup “More” s tri kuglice sladoleda ili sladoledni kup “Ledko” s pet kuglica sladoleda.

Koliko je gostiju pojelo kup “More”, a koliko ih je pojelo kup “Ledko” ako je potrošeno ukupno 1000 kuglica sladoleda?

5. razred

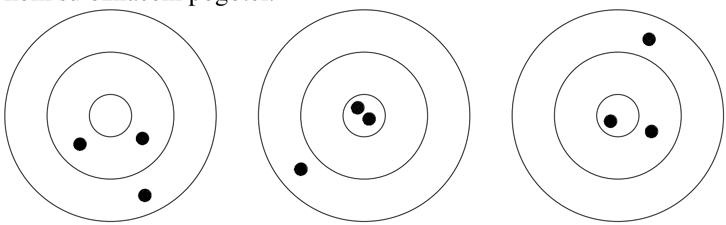
5.1. Izračunaj

$$(1437-((11\cdot 136+136\cdot 12):92\cdot 167-65-102):167):27-27.$$

5.2. Ana je krenula od kuće brojeći korake. Najprije je napravila 10 koraka naprijed, pa se vratila 2 koraka nazad. Nakon toga je opet načinila 10 koraka naprijed, pa se vratila 1 korak nazad. Taj postupak, 10 koraka naprijed i 2 nazad, pa 10 koraka naprijed i 1 korak nazad, Ana je nastavila i dalje. Koliko koraka Ana mora načiniti kako bi od kuće bila udaljena 2004 koraka?

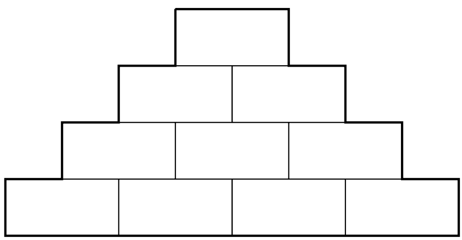
5.3. Koje se znamenke mogu staviti na mjesto slova a i b u četveroznamenkastim brojevima oblika $\overline{a55b}$ tako da ti brojevi budu djeljivi brojem 36?

5.4. Janko je u prve dvije igre pikada gađao metu sa po tri strelice, te je postigao 25 bodova u prvoj igri i 45 bodova u drugoj igri. Koliko je bodova postigao u trećoj igri? Svaki krug nosi neki broj bodova, a s točkom su označeni pogotci.



Sl. 1.1.

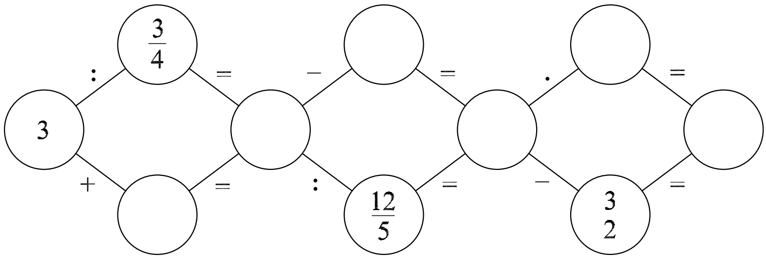
5.5. Lik na slici sastoji se od 10 jednakih pravokutnika kojima je jedna stranica dvostruko dulja od druge. Ako je opseg cijelog lika 1440 cm, kolika je površina lika?



Sl. 1.2.

6. razred

6.1. U prazne krugove upiši odgovarajuće brojeve tako da izvođenjem naznačenih operacija, a koje su zapisane iznad spojnica tih krugova dobijemo niz točnih rezultata.



Sl. 1.3.

6.2. Ako lopta slobodno pada na tlo s neke visine, ona svaki put nakon udarca o tlo odskoči do $\frac{5}{9}$ visine s koje je pala. Pustimo tu loptu da pada s visine od 108 cm.

Koliku će visinu postići lopta nakon što je 4 puta odskočila od tla?

6.3. Na školskom natjecanju iz matematike sudjelovala je $\frac{1}{3}$ učenika jednog razrednog odjeljenja. Od prisutnih natjecatelja tog razrednog odjeljenja za daljnje općinsko natjecanje plasirala se $\frac{1}{9}$ učenika cijelog razrednog odjeljenja, a 6 se učenika nije plasiralo.

Koliko učenika ima u tom razrednom odjeljenju? Koliko je učenika tog razrednog odjeljenja sudjelovalo na školskom, a koliko na općinskom natjecanju?

6.4. Odredi sve troznamenkaste brojeve koji su djeljivi s 11 i kojima je zbroj znamenaka jednak 10.

6.5. Dan je trokut ABC. Na produžetku stranice $\overline{AB}$ preko vrha A odabrana je točka M tako da je $|AM| = |AC|$, a na produžetku stranice $\overline{AB}$ preko vrha B odabrana je točka N tako da je $|BN| = |BC|$. Kut $\sphericalangle CMN = 27^\circ$, a kut $\sphericalangle CNM = 32^\circ$.

Koliki su unutarnji kutovi trokuta ABC? Koliki je opseg trokuta ABC ako je $|MN| = 47$ cm?

7. razred

7.1. Izračunaj:

$$\left\{\left(\frac{11}{2}:\frac{33}{4}+2\right):\left[\frac{9}{5}-\frac{5}{8}:\left(1-\frac{3}{8}\right)\right]\right\}\cdot(1-0.9)+(1-0.9):\frac{3}{10}.$$

7.2. Izračunaj kutove trokuta ako se oni odnose kao $6:11:7$.

7.3. U jednom našem hotelu na moru u 2002. godini ljetovalo je 1200 muškaraca i žena zajedno. U 2003. godini broj muškaraca se smanjio za 10%, a broj žena se povećao za 20% u odnosu na prethodnu godinu. Tako se u 2003. godini ukupan broj gostiju tog hotela povećao za 75 osoba.

Koliko je muškaraca, a koliko žena ljetovalo u tom hotelu u 2003. godini?

7.4. U pravokutniku $ABCD$, $|AB|>|BC|$, povučena je simetrala AN kuta $\sphericalangle BAD$, $N\in BD$. Kut te simetrale i dijagonale $\overline{AC}$ je 20°. Izračunaj veličine kutova trokuta AND.

7.5. Zadan je paralelogram $ABCD$, $|AB|>|BC|$ i povučene su simetrale svih njegovih četiriju unutarnjih kutova. Dokaži da je četverokut omeđen tim simetralama pravokutnik.

8. razred

8.1. Izračunaj

$$\frac{\sqrt{144}\cdot\sqrt{14.4}}{\sqrt{0.144}\cdot\sqrt{1.44}}.$$

8.2. Usporedi brojeve 80^5 i 2^{32}.

8.3. Odredi brojeve x i y za koje vrijedi

$$x^2+y^2+12x-4y+40=0.$$

8.4. Dvije kružnice različitih polumjera diraju se izvana u točki A. Tangenta na obje kružnice koja ne prolazi točkom A dira kružnice u točkama B i C. Odredi veličinu kuta $\sphericalangle BAC$.

8.5. Dan je trokut ABC kojemu su duljine stranica $a=15$ cm, $b=13$ cm i $c=14$ cm. Na stranici $\overline{AB}$ istaknuta je točka D tako da je $\overline{CD}$ visina trokuta ABC. Ako je točka E polovište stranice $\overline{AB}$, izračunaj duljinu dužine $\overline{DE}$.

Srednja škola

1. razred

1.1. Dana je funkcija $f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Q}$, za koju vrijedi:

$$f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}, \qquad \text{za svaki } x \in \mathbf{Z}.$$

Ako je $f(1) = 2$, odredite $f(2004)$.

1.2. U pravokutnom trokutu ABC točka D je nožište visine iz vrha C na hipotenuzu $\overline{AB}$. Na kateti $\overline{BC}$ odabrana je točka E tako da je $|CE| = \frac{1}{2}|BD|$, a na dužini $\overline{AE}$ točka F tako da je $|EF| = |CE|$. Dokažite da je $|AF| = |AD|$

1.3. Dokažite da je

$$\sqrt[3]{1 - 27\sqrt[3]{26} + 9\sqrt[3]{26^2}} + \sqrt[3]{26}$$

cijeli broj i odredite ga.

1.4. Odredite sva realna rješenja sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + \ldots + x_{2004} = 2004, \\ &x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{2004}^4 = x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{2004}^3. \end{aligned}$$

2. razred

2.1. Ako su duljine dviju visina trokuta 10 i 6, dokažite da je duljina treće manja od 15.

2.2. Dokažite da su za svaki prirodan broj n rješenja kvadratne jednadžbe

$$2nx^2 - 2(n^2+1)x - n^2 - 1 = 0,$$

iracionalni brojevi.

2.3. Odredite sva rješenja jednadžbe $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0$.

2.4. Trokut ABC je jednakokračan ($|AB| = |AC|$) a točka D je na onom luku $\overset{\frown}{BC}$ trokutu opisane kružnice koji ne sadrži vrh A. Nadalje, točka E je sjecište pravca CD i okomice iz vrha A na taj pravac. Dokažite da vrijedi:

$$|BD| + |DC| = 2|DE|.$$

3. razred

3.1. Riješite jednadžbu

$$\log_5(5^{\frac{1}{x}} + 125) = \log_5 6 + 1 + \frac{1}{2x}.$$

3.2. Dva susjedna vrha kvadrata nalaze se na kružnici polumjera 1. Kolika je maksimalna udaljenost središta kružnice od jednog od preostala dva vrha kvadrata?

3.3. Riješite jednadžbu

$$\mathrm{tg}^2(x+y) + \mathrm{ctg}^2(x+y) = 1 - 2x - x^2.$$

3.4. Ako su α, β i γ kutovi trokuta s duljinama stranicama a, b i c, dokažite nejednakost

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \geq 4\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2}\right).$$

4. razred

4.1. Ako je z rješenje jednažbe $z^2 - z + 1 = 0$ izračunajte zbroj

$$z^{2004} + \frac{1}{z^{2004}}.$$

4.2. Ako su n i k prirodni brojevi, $k \leq n$, dokažite nejednakosti

$$\frac{n^k}{k^k} \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}.$$

4.3. Kut između dva susjedna pobočna brida pravilne šesterostrane piramide jednak je kutu između pobočnog brida i baze. Odredite taj kut.

4.4. Za koje realne brojeve a postoji kompleksan broj z sa svojstvima:

$$|z + \sqrt{2}| = \sqrt{a^2 - 3a + 2} \qquad \text{i} \qquad |z + i\sqrt{2}| < a?$$

Rješenja

Osnovna škola

4.1. $(345 - ((720:6)\cdot 2 - 4 + 2):2 + 44):3 - 25:5$

$$
\begin{aligned}
&= (345 - (120\cdot 2 - 4 + 2):2 + 44):3 - 25:5\\
&= (345 - (240 - 4 + 2):2 + 44):3 - 25:5\\
&= (345 - (236 + 2):2 + 44):3 - 25:5\\
&= (345 - 238:2 + 44):3 - 25:5\\
&= (345 - 119 + 44):3 - 25:5\\
&= (226 + 44):3 - 25:5\\
&= 270:3 - 25:5 = 90 - 5 = 85.
\end{aligned}
$$

4.2. Umnožak znamenki može biti 9, 10 ili 11. Ako je umnožak znamenki 9, radi se o brojevima 911, 191, 119, 133, 313, 331. Ako je umnožak znamenki 10, radi se o brojevima 125, 152, 215, 251, 512, 521. Troznamenkasti broj čiji je umnožak znamenki 11 ne postoji.

4.3. Da je Marta imala 5 kuna više, mogla bi kupiti 10 flomastera. Budući da bi joj pri kupnji 6 flomastera ostalo 7 kuna, zaključujemo da 4 flomastera koštaju $7 + 5 = 12$ kuna. Dakle, jedan flomaster košta 3 kune. Marta je imala $6 \cdot 3 + 7 = 25$ kuna.

4.4. Ako s a označimo duljinu osnovice, tada je duljina kraka $b = 3a$. $O = a + 2 \cdot b$, $O = a + 2 \cdot 3a = 7a$, $252 = 7a$, duljina osnoviceje $a = 36$ mm. Duljina kraka je $b = 3a = 3 \cdot 36 = 108$ mm.

4.5. Ovdje ćemo primijeniti *metodu pokušaja i pogrešaka.* Ona se zorno predočuje pomoću tablice pokušaja. Napravimo tablicu u kojoj u prvom stupcu variramo broj gostiju koji jedu kup “More”, a u drugom stavljamo broj gostiju koji jedu kup “Ledko”, a zbroj ta dva broja mora biti 248. U ostalim stupcima računamo broj kuglica. Počet ćemo tako da u prvi redak stavimo da svih 248 gostiju jede kup “More”. Zatim uzmemo da svih 248 gostiju jede kup “Ledko”. U treći redak stavimo da polovina gostiju jede kup “More”, a druga polovina kup “Ledko”. Nakon toga se vidi koji broj treba smanjivati, a koji povećavati. Evo potpune tablice:

Broj gostiju koji jedu kup "More"	Broj gostiju koji jedu kup "Ledko"	Broj kuglica u kupovima "More"	Broj kuglica u kupovima "Ledko"	Ukupan broj kuglica u svim kupovima
248	0	744	0	744
0	248	0	1240	1240
124	124	372	620	992
123	125	369	625	994
122	126	366	630	996
121	127	363	635	998
120	128	360	640	1000

120 gostiju je pojelo kup "More", a 128 gostiju je pojelo kup "Ledko".

* * *

5.1.
$$\begin{aligned}(1437-((11\cdot 136+136\cdot 12):92\cdot 167-65-102):167):27-27\\ &=(1437-(23\cdot 136:92\cdot 167-65-102):167):27-27\\ &=(1437-(3128:92\cdot 167-65-102):167):27-27\\ &=(1437-(34\cdot 167-65-102):167):27-27\\ &=(1437-(5678-65-102):167):27-27\\ &=(1437-5511:167):27-27\\ &=(1437-33):27-27\\ &=1404:27-27\\ &=52-27=25\end{aligned}$$

5.2. Ana se pomakne $17=10-2+10-1$ koraka naprijed, a da pritom načini $23=10+2+10+1$ koraka. Kako bi se pomakla 2004 koraka naprijed, mora 117 puta ponoviti postupak, te se onda još pomaknuti 15 koraka naprijed (jer je $2004:17=117$ i ostatak 15). U 117 ponavljanja Ana se pomakne $117\cdot 17=1989$ koraka naprijed, a preostalih 15 koraka prelazi tako da napravi 10 koraka naprijed, 2 natrag i još 7 naprijed. Dakle, ukupan broj koraka koji će Ana načiniti je $117\cdot 23+10+2+7=2710$ koraka.

5.3. Kako je $36=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$, da bi broj bio djeljiv sa 36, mora biti djeljiv i sa 4 i sa 9. Djeljivost sa 4 povlači da je dvoznamenkasti završetak broja $\overline{a55b}$ djeljiv sa 4, odnosno $\overline{5b}$ je djeljiv sa 4. Iz prethodnog slijedi da b može biti 2 ili 6 (52 i 56 su jedini brojevi sa znamenkom desetica 5 djeljivi sa 4). Nadalje, djeljivost s 9 povlači da je zbroj znamenaka broja $\overline{a55b}$ djeljiv s 9, odnosno $a+b+10$ je djeljiv s 9. Iz prethodnog slijedi, ako je $b=2$, tada a može biti samo 6, a ako je $b=6$, tada je $a=2$. Rješenja su, dakle, brojevi 2556 i 6552.

5.4. *I. način.* Ako zbrojimo pogotke u prva dva gađanja, primjećujemo da je Janko pogodio dvaput u svaki krug i pritom osvojio 70 bodova. U trećem je gađanju jedanput pogodio svaki krug, pa je osvojio polovinu bodova, dakle 35 bodova.

II. način. Iz prva dva gađanja može se primijetiti da dva pogotka u najmanji krug nose $20=45-25$ bodova više nego dva pogotka u srednji krug. Dakle, jedan pogodak u najmanji krug nosi 10 bodova više nego jedan pogodak u srednji krug. Primijenimo li to na treće gađanje i uočimo li da se prvo gađanje razlikuje od trećeg u tome što je jedan pogodak u srednji krug u prvom gađanju zamijenjen jednim pogotkom u najmanji krug, možemo zaključiti da je u trećem gađanju Janko osvojio 10 bodova više nego u prvom, dakle 35 bodova. (Slično bismo mogli zaključiti da se drugo gađanje razlikuje od trećeg u tome što je jedan pogodak u najmanji krug u drugom gađanju zamijenjen jednim pogotkom u srednji krug, pa je Janko osvojio 10 bodova manje nego u drugom gađanju, dakle 35 bodova).

5.5. Ako je kraća stranica pravokutnika duljine a, tada je njegova dulja stranica duljine $2a$. Opseg cijelog lika je jednak $O = 14a + 5 \cdot 2a = 24a = 1440$ cm, odakle slijedi da je $a = 60$ cm. Površina jednog pravokutnika je $P_1 = a \cdot 2a = 60 \cdot 120 = 7200\ \text{cm}^2$, pa je površina lika koji se sastoji od 10 takvih pravokutnika jednaka $P = 10 \cdot P_1 = 72000\ \text{cm}^2$.

* * *

6.1.

$$3 : \frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$$
$$3 + x = 4, \quad x = 1$$
$$4 : \frac{12}{5} = 4 \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{3}$$
$$4 - x = \frac{5}{3}, \quad x = 4 - \frac{5}{3}, \quad x = \frac{7}{3}$$
$$\frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{10}{6} - \frac{9}{6} = \frac{1}{6}$$
$$\frac{5}{3} \cdot x = \frac{1}{6}, \quad x = \frac{1}{6} : \frac{5}{3}, \quad x = \frac{1}{10}.$$

Napomena. Zadatak se može riješiti i bez formalne upotrebe jednadžbi.

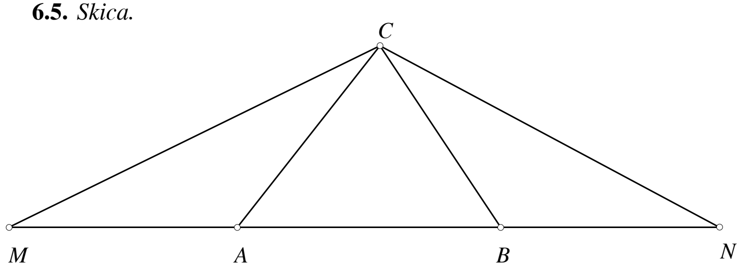
6.2. $108 \cdot \frac{5}{9} = 60$. Nakon što prvi put udari o tlo, lopta odskoči do visine od 60 cm. $60 \cdot \frac{5}{9} = \frac{100}{3}$. Nakon što drugi put udari o tlo, lopta odskoči do visine od $\frac{100}{3}$ cm. $\frac{100}{3} \cdot \frac{5}{9} = \frac{500}{27}$. Nakon što treći put udari o tlo, lopta odskoči do visine od $\frac{500}{27}$ cm. $\frac{500}{27} \cdot \frac{5}{9} = \frac{2500}{243}$. Nakon što četvrti put udari o tlo, lopta odskoči do visine od $\frac{2500}{243}$ cm.

6.3. Razliku $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{9}$ razrednog odjeljenja čini 6 učenika. Budući da je ta razlika $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$, to znači da je 6 učenika upravo $\frac{2}{9}$ broja učenika u razrednom odjeljenju. To znači da je $\frac{1}{9}$ učenika razrednog odjeljenja jednaka 3, tj. cijelo odjeljenje ima $3 \cdot 9 = 27$ učenika. Na školskom natjecanju sudjelovalo je $\frac{1}{3}$ od 27 učenika, tj. 9 učenika, a na općinskom 3 učenika.

6.4. Neka traženi troznamenkasti broj ima oblik $\overline{abc}$. Tada taj broj možemo pisati kao zbroj $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ ili $\overline{abc} = 99a + 9b + a + b + c$, a zbog $a + b + c = 10$ dobivamo da je $\overline{abc} = 99a + 9b + 10$. Budući je traženi broj $\overline{abc}$ djeljiv sa 11 i pribrojnik $99a$ djeljiv sa 11, nužno slijedi da i pribrojnik $9b + 10$

mora biti djeljiv sa 11. Zbroj $9b+10$ bit će djeljiv sa 11 samo ako pribrojnik $9b$ ima jednu od ovih mogućih vrijednosti; 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89. Lako odredimo da je jedino moguće rješenje $9b=45$, iz čega slijedi da je $b=5$. Dalje, zbog $a+b+c=10$ i $b=5$ vrijedi jednakost $a+c=5$ Za $a=1$ i $c=4$, odnosno $a=4$ i $c=1$ dobivamo ove brojeve 154 i 451. Za $a=2$ i $c=3$, odnosno $a=3$ i $c=2$ dobivamo ove brojeve 253 i 352. Konačno za $a=5$ i $c=0$ dobivamo broj 550.

6.5. *Skica.*



Sl. 1.4.

Zbog $|AM|=|AC|$ slijedi da je trokut ACM jednakokračan, a to znači da je $\sphericalangle CMN=\sphericalangle CMA=\sphericalangle MCA=27^\circ$. Budući da je kut $\sphericalangle BAC$ vanjski kut trokuta ACM slijedi da je $\sphericalangle BAC=\sphericalangle CMA+\sphericalangle MCA=27^\circ+27^\circ=54^\circ$. Na sličan način odredimo i kut $\sphericalangle ABC$. Naime, zbog $|BN|=|BC|$ trokut BCN je jednakokračan, pa je $\sphericalangle CNM=\sphericalangle CNB=\sphericalangle NCB=32^\circ$. Kut $\sphericalangle ABC$ je vanjski kut trokuta BCN, pa je $\sphericalangle ABC=32^\circ+32^\circ=64^\circ$. Sad je $\sphericalangle ACB=180^\circ-(54^\circ+64^\circ)=62^\circ$. Zbog već opisane jednakokračnosti trokuta ACM i BCN, slijedi da je $|MN|=|AM|+|AB|+|BN|=|AC|+|AB|+|BC|=o$. Dakle, opseg trokuta ABC jednak je 47 cm.

* * *

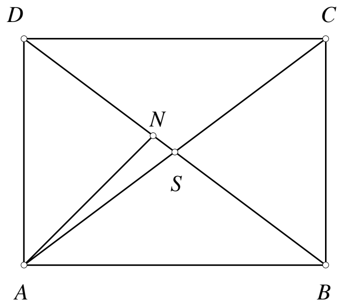
7.1. Imamo redom

$$\begin{aligned}
&\left\{\left(\frac{11}{2}:\frac{33}{4}+2\right):\left[\frac{9}{5}-\frac{5}{8}:\left(1-\frac{3}{8}\right)\right]\right\}\cdot(1-0.9)+(1-0.9):\frac{3}{10}\\
&\quad=\left\{\left(\frac{11}{2}\cdot\frac{4}{33}+2\right):\left[\frac{9}{5}-\frac{5}{8}:\frac{5}{8}\right]\right\}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{10}{3}\\
&\quad=\left\{\left(\frac{2}{3}+2\right):\left[\frac{9}{5}-1\right]\right\}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{3}\\
&\quad=\left(\frac{8}{3}:\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{3}\\
&\quad=\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{5}{4}\right)\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{3}\\
&\quad=\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

7.2. Kako se kutovi odnose kao $6 : 11 : 7$, to je $\alpha = 6k$, $\beta = 11k$, $\gamma = 7k$. Nadalje, kako je zbroj kutova u trokutu jednak 180°, imamo da je $6k + 11k + 7k = 180^\circ$, odnosno $24k = 180^\circ$, odakle je $k = 7.5^\circ = 7^\circ 30'$ Sada je $\alpha = 6k = 6 \cdot 7^\circ 30' = 45^\circ$, $\beta = 11k = 11 \cdot 7^\circ 30' = 82^\circ 30'$, i konačno $\gamma = 7k = 7 \cdot 7^\circ 30' = 52^\circ 30'$.

7.3. Neka je x broj muškaraca koji su ljetovali u 2002. godini. Tada je broj žena koje su ljetovale u istoj godini jednak $1200 - x$. Iz uvjeta zadatka slijedi da je u 2003. godini ljetovalo $0.9x$ muškaraca i $1.2(1200 - x)$ žena. Zato vrijedi $0.9x + 1.2(1200 - x) = 1200 + 75$, odnosno $-0.3x = -165$, tj. $x = 550$. Prema tome, u 2003. godini u hotelu je ljetovalo $0.9 \cdot 550 = 495$ muškaraca i $1.2(1200 - 550) = 780$ žena.

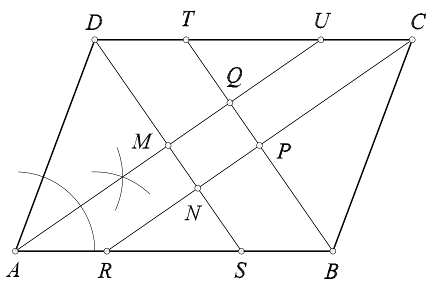
7.4. *Skica.*



Sl. 1.5.

Označimo sa S sjecište dijagonala pravokutnika. Budući da je AN simetrala pravog kuta slijedi da je $\sphericalangle DAN = 45^\circ$ i $\sphericalangle BAS = 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ$. Trokut ASB je jednakokračan, pa je $\sphericalangle SAB = \sphericalangle SBA = 25^\circ$. Uz to je i $\sphericalangle ASB = 180^\circ - 2 \cdot 25^\circ = 130^\circ$. Sada je $\sphericalangle ASN = 2 \cdot 25^\circ = 50^\circ$ jer je vanjski kut trokuta ABS. No, i kut $\sphericalangle AND$ je vanjski kut trokuta ANS, pa je $\sphericalangle AND = 20^\circ + 50^\circ = 70^\circ$. I konačno treći kut trokuta AND jednak je $\sphericalangle ADN = 180^\circ - 45^\circ - 70^\circ = 65^\circ$. Dakle, kutovi trokuta AND su 45°, 70° i 65°.

7.5. *Skica.*



Sl. 1.6.

Uz oznake kao na slici treba dokazati da je četverokut $MNPQ$ pravokutnik. Označimo šiljasti kut paralelograma s α, a tupi sa β. Kako je $\alpha+\beta = 180^\circ$, to je $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2} = 90^\circ$. U trokutu AMD vrijedi $\sphericalangle DAM + \sphericalangle ADM + \sphericalangle DMA = 180^\circ$, pa kako je $\sphericalangle DAM + \sphericalangle ADM = 90^\circ$ to je $\sphericalangle DMA = 90^\circ$. Nadalje, $\sphericalangle DMA = \sphericalangle QMN$, jer su to vršni kutovi, pa je i $\sphericalangle QMN = 90^\circ$. Na isti način iz trokuta BCP dobivamo da je $\sphericalangle QPN = 90^\circ$, iz trokuta RSN da je $\sphericalangle MNP = 90^\circ$, te iz trokuta TQU dobivamo da je $\sphericalangle MQP = 90^\circ$. Prema tome, četverokut $MNPQ$ je pravokutnik.

* * *

8.1.

$$\frac{\sqrt{144}\cdot\sqrt{14.4}}{\sqrt{0.144}\cdot\sqrt{1.44}} = \frac{12\cdot\sqrt{14.4}}{\sqrt{0.144}\cdot 1.2} = \frac{12}{1.2}\cdot\sqrt{\frac{14.4}{0.144}}$$
$$= \frac{12}{\frac{12}{10}}\cdot\sqrt{\frac{\frac{144}{10}}{\frac{144}{1000}}} = 10\cdot\sqrt{100} = 10\cdot 10 = 100.$$

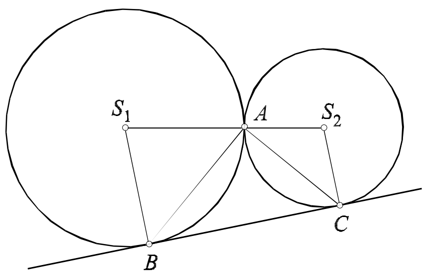
8.2. Broj 80^5 napišimo ovako $80^5 = (16\cdot 5)^5 = (2^4\cdot 5)^5 = 2^{20}\cdot 5^5$. Broj 2^{32} možemo zapisati kao $2^{32} = 2^{20}\cdot 2^{12}$. Treba usporediti brojeve 5^5 i 2^{12}. Izračunajmo ih. $5^5 = 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 3125$. $2^{12} = 4096$. Očito je $2^{12} > 5^5$, pa je $2^{32} > 80^5$.

8.3. Izvršimo dvije dopune do potpunog kvadrata:

$$(x^2+12x+36)+(y^2-4y+4)+40-36-4 = 0$$
$$(x+6)^2+(y-2)^2 = 0.$$

Suma dva nenegativna broja jednaka je nuli samo ako su oba ta broja jednaka nuli, tj. $x+6 = 0$ i $y-2 = 0$. Odatle slijedi da je $x = -6$ i $y = 2$.

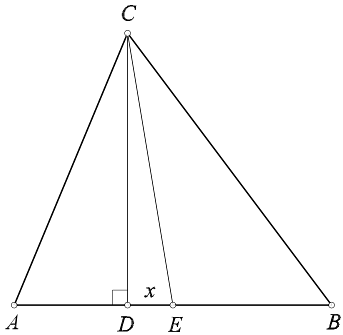
8.4. *Skica.*



Sl. 1.7.

Neka su $k_1(S_1, r_1)$ i $k_2(S_2, r_2)$ dane kružnice, točka B je dirالište tangente i kružnice k_1, a točka C je diralište tangente i kružnice k_2. Trokut AS_2C je jednakokračan jer je $|AS_2| = |S_2C| = r_2$. Stoga je $\sphericalangle S_2AC = \sphericalangle S_2CA$. Te kutove označimo s α. Trokut AS_1B je jednakokračan jer je $|AS_1| = |S_1B| = r_1$. Stoga je $\sphericalangle S_1BA = \sphericalangle S_1AB$. Te kutove označimo s β. Tangenta je okomita na polumjer koji spaja središte i točku u kojoj tangenta dira kružnicu. Zato je $\sphericalangle CBS_1 = \sphericalangle BCS_2 = 90^\circ$, pa je $\sphericalangle CBA = 90^\circ - \beta$ i $\sphericalangle BCA = 90^\circ - \alpha$. Zbroj kutova u $\triangle ABC$ jednak je 180°, pa je $\sphericalangle BAC = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \beta) = \alpha + \beta$. S druge strane, budući da se kružnice u točki A diraju izvana slijedi da je $\sphericalangle S_1AS_2 = 180^\circ$, pa je $180^\circ = \alpha + \sphericalangle BAC + \beta$, tj. $\sphericalangle BAC = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. Tada je $\sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle BAC$, tj. $2\sphericalangle BAC = 180^\circ$, $\sphericalangle BAC = 90^\circ$.

8.5. *Skica.*



Sl. 1.8.

Trokuti ADC i CDB su pravokutni pa za njih vrijedi Pitagorin poučak, tj. $b^2 = (7-x)^2 + v^2$, $a^2 = (7+x)^2 + v^2$, gdje je $x = |DE|$. Izjednačavanjem izraza za v^2 dobivamo $b^2 - (7-x)^2 = a^2 - (7+x)^2$, $13^2 - (7-x)^2 = 15^2 - (7+x)^2$, $169 - (49 - 14x + x^2) = 225 - (49 + 14x + x^2)$, $28x = 56$, $x = 2$ cm.

Srednja škola

1.1. *Prvo rješenje.* Koristeći svojstvo funkcije,

$$f(x+1) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}, \qquad \text{za } x \in \mathbf{Z}, \tag{1}$$

i početni uvjet

$$f(1) = 2, \tag{2}$$

dobivamo

$$f(2) = \frac{1 + f(1)}{1 - f(1)} = -3,$$

$$f(3) = \frac{1 + f(2)}{1 - f(2)} = -\frac{1}{2},$$

$$f(4) = \frac{1+f(3)}{1-f(3)} = \frac{1}{3},$$
$$f(5) = \frac{1+f(4)}{1-f(4)} = 2 = f(1),$$
$$f(6) = \frac{1+f(5)}{1-f(5)} = \frac{1+f(1)}{1-f(1)} = -3 = f(2),$$
$$f(7) = \frac{1+f(6)}{1-f(6)} = \frac{1+f(2)}{1-f(2)} = -\frac{1}{2} = f(3),$$
$$f(8) = \frac{1+f(7)}{1-f(7)} = \frac{1+f(3)}{1-f(3)} = \frac{1}{3} = f(4),$$

Odavde slijedi $f(n+4) = f(n)$ za $n \in \mathbf{N}$. Konačno je

$$f(2004) = f(2000) = f(1996) = \ldots = f(4) = \frac{1}{3}.$$

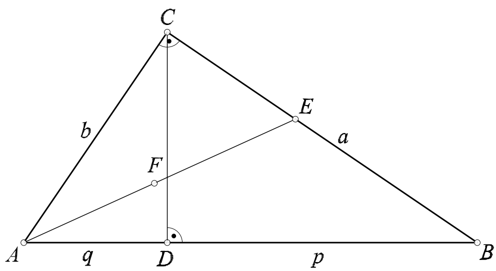
Drugo rješenje. Za prirodan broj n i danu funkciju f vrijedi:

$$f(n+1) = \frac{1+f(n)}{1-f(n)},$$
$$f(n+2) = \frac{1+f(n+1)}{1-f(n+1)} = \frac{1+\dfrac{1+f(n)}{1-f(n)}}{1-\dfrac{1+f(n)}{1-f(n)}} = -\frac{1}{f(n)},$$
$$f(n+4) = -\frac{1}{f(n+2)} = f(n).$$

Dakle, funkcija f ima svojstvo $f(n+4) = f(n)$.

Sada je $f(2004) = f(2000) = f(1996) = \ldots = f(4) = \dfrac{1}{3}$.

1.2.



Sl. 1.9.

Označimo li $|BD| = p$ i $|AD| = q$, tada je $p + q = |AB| = c$. Prema Euklidovom poučku je $|CA| = b = \sqrt{cq}$. Primijenimo li Pitagorin poučak na pravokutan trokut AEC dobit ćemo:

$$|AE|^2 = |CA|^2 + |CE|^2 \quad \text{ili} \quad (|AF| + |EF|)^2 = b^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Odavde je

$$\left(|AF| + \frac{p}{2}\right)^2 = b^2 + \frac{p^2}{4}, \quad |AF|(|AF| + p) = qc,$$

tj.

$$|AF|(|AF| + p) = q(q + p).$$

Iz posljednje jednakosti zaključujemo da je $|AF| = q$, tj. $|AF| = |AD|$.

1.3. *Prvo rješenje.* Stavimo $a = \sqrt[3]{1 - 27\sqrt[3]{26} + 9\sqrt[3]{26^2}} + \sqrt[3]{26}$. Imamo

$$\sqrt[3]{1 - 27\sqrt[3]{26} + 9\sqrt[3]{26^2}} = a - \sqrt[3]{26},$$

tj.

$$\begin{aligned} 1 - 27\sqrt[3]{26} + 9\sqrt[3]{26^2} &= (a - \sqrt[3]{26})^3 \\ &= (a^3 - 26) - 3a^2\sqrt[3]{26} + 3a\sqrt[3]{26^2}. \end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$a^3 - 26 = 1, \quad -3a^2 = -27, \quad 3a = 9.$$

Ovaj sustav jednadžbi je zadovoljen samo za $a = 3$. Prema tome, dani broj je jednak 3.

Drugo rješenje. Možemo transformirati izraz pod korijenom:

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{1 - 27\sqrt[3]{26} + 9\sqrt[3]{26^2}} + \sqrt[3]{26} \\ &\quad = \sqrt[3]{3^3 - 27\sqrt[3]{26} + 9\sqrt[3]{26^2} - \sqrt[3]{26^3}} + \sqrt[3]{26} \\ &\quad = \sqrt[3]{(3 - \sqrt[3]{26})^3} + \sqrt[3]{26} = 3 - \sqrt[3]{26} + \sqrt[3]{26} = 3. \end{aligned}$$

1.4. Iz prve i druge jednadžbe sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} &(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \ldots + (x_{2004} - 1) = 0 \\ &\quad = x_1^3(x_1 - 1) + x_2^3(x_2 - 1) + \ldots + x_{2004}^3(x_{2004} - 1), \end{aligned}$$

odnosno,

$$(x_1^3 - 1)(x_1 - 1) + \ldots + (x_{2004}^3 - 1)(x_{2004} - 1) = 0,$$
$$(x_1 - 1)^2(x_1^2 + x_1 + 1) + \ldots + (x_{2004} - 1)^2(x_{2004}^2 + x_{2004} + 1) = 0.$$

Kako je $x_i^2 + x_i + 1 = \left(x_i + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ za $i = 1, 2, \ldots, 2004$, dobivamo jedino moguće rješenje $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2004} = 1$.

* * *

2.1. Neka su a, b i c duljine stranica trokuta, a h_a, h_b i h_c njegove visine. Tada je

$$2P = ah_a = bh_b = ch_c. \tag{1}$$

Možemo uzeti $h_a = 10$ i $h_b = 6$. Treba dokazati da je $h_c < 15$. Iz (1) dobivamo $b = \dfrac{ah_a}{h_b} = \dfrac{5}{3}a$.

Iz nejednakosti trokuta slijedi

$$\begin{aligned} b - a &< c, \\ \frac{2}{3}a &< c, \\ \frac{a}{c} &< \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Iz $\dfrac{a}{c} = \dfrac{h_c}{h_a}$ slijedi $\dfrac{h_c}{10} < \dfrac{3}{2}$, odnosno $h_c < 15$.

2.2. Diskriminanta kvadratne jednadžbe je

$$\begin{aligned} D &= 4(n^2+1)^2 + 8n(n^2+1) \\ &= 4(n^2+1)(n^2+2n+1) \\ &= 4(n+1)^2(n^2+1) > 0, \end{aligned}$$

što znači da su njezina rješenja realna.

Tvrdimo da $\sqrt{D}$ nije racionalan broj. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\sqrt{D}$ racionalan broj. Tada je $\sqrt{n^2+1}$ racionalan, odnosno (zbog $n \in \mathbf{N}$) $\sqrt{n^2+1}$ mora biti prirodan broj.

Neka je $\sqrt{n^2+1} = t$ prirodan broj. Tada je

$$\begin{aligned} n^2 + 1 &= t^2, \\ t^2 - n^2 &= 1, \\ (t-n)(t+n) &= 1. \end{aligned}$$

Ovo je moguće jedino ako je $t - n = 1$ i $t + n = 1$. No tada je $n = 0$. Kako 0 nije prirodan broj, došli smo do kontradikcije.

Dakle, $\sqrt{D}$ nije racionalan broj, a kako su rješenja jednadžbe realna, ona su iracionalna.

2.3. Kako 0 nije rješenje jednadžbe, dijeljenjem s x^2 dobije se

$$x^2 - x - 10 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} = 0.$$

Uvedemo li supstituciju $t = x - \dfrac{2}{x}$, tada je $t^2 = x^2 - 4 + \dfrac{4}{x^2}$, tj. $x^2 + \dfrac{4}{x^2} = t^2 + 4$.

Jednadžba sada poprima oblik

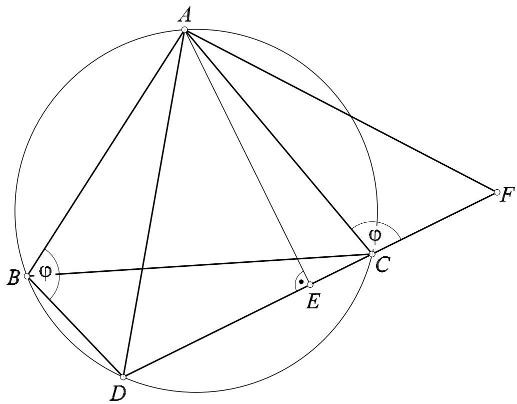
$$t^2 + 4 - t - 10 = 0 \qquad \text{tj.} \qquad t^2 - t - 6 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su $t_1 = 3$, $t_2 = -2$.

Za $t = 3$ je $x - \dfrac{2}{x} = 3$, tj. $x^2 - 3x - 2 = 0$ i rješenja su $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Za $t = -2$ je $x - \dfrac{2}{x} = -2$, tj. $x^2+2x-2 = 0$ i rješenja su $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{3}$.

2.4. Neka su ispunjeni uvjeti zadatka i $F \in DC$, $|CF| = |BD|$, $|DF| > |DC|$. Označimo još $\sphericalangle DBA = \phi$.



Sl. 1.10.

Tada je $\sphericalangle DCA = 180^\circ - \phi$, pa je $\sphericalangle FCA = \phi$. Stoga su trokuti ABD i ACF sukladni (dvije stranice i kut među njima), pa je $|AD| = |AF|$, tj. trokut ADF je jednakokračan. Zbog $AE \perp DF$ vrijedi: $|DE| = |EF| = |EC| + |CF|$. Sada je

$$\begin{aligned}|DB| + |DC| &= |CF| + |DC| = |CF| + (|DE| + |EC|)\\ &= |DE| + (|EC| + |CF|) = |DE| + |DE| = 2|DE|\end{aligned}$$

tj. $|DB| + |DC| = 2\,|DE|$, što je i trebalo dokazati.

* * *

3.1. Jednadžbu transformiramo u pogodniji oblik:

$$\begin{aligned}\log_5(5^{\frac{1}{x}} + 125) &= \log_5 6 + \log_5 5^{1+\frac{1}{2x}},\\ \log_5(5^{\frac{1}{x}} + 125) &= \log_5(6 \cdot 5^{1+\frac{1}{2x}}),\\ 5^{\frac{1}{x}} + 125 &= 6 \cdot 5^{1+\frac{1}{2x}},\\ 5^{\frac{1}{x}} + 125 &= 6 \cdot 5 \cdot 5^{\frac{1}{2x}},\\ 5^{\frac{1}{x}} - 30 \cdot 5^{\frac{1}{2x}} + 125 &= 0.\end{aligned}$$

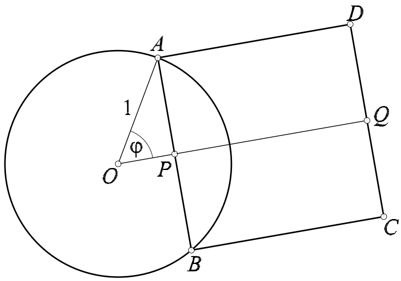
Supstitucijom $t = 5^{\frac{1}{2x}}$, jednadžba prelazi u $t^2 - 30t + 125 = 0$. Njezina rješenja su $t_1 = 5$, $t_2 = 25$.

$$1^\circ \quad t=5 \quad \Rightarrow \quad 5^{\frac{1}{2x}}=5 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2x}=1 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2};$$

$$2^\circ \quad t=25 \quad \Rightarrow \quad 5^{\frac{1}{2x}}=25 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2x}=2 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{4}.$$

Rješenja jednadžbe su $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{4}$.

3.2. Neka su točke A i B na kružnici, vrhovi kvadrata. Dovoljno je promatrati slučaj kada su središte O kružnice i točke C, D s različitih strana pravca AB.



Sl. 1.11.

Koristeći Pitagorin poučak dobivamo:

$$|OD|^2=|OQ|^2+|QD|^2=(|OP|+|PQ|)^2+|QD|^2=(|OP|+2|AP|)^2+|AP|^2.$$

Ako je $\phi=\sphericalangle AOP$, koristeći $|OP|=|OA|\cos\phi=\cos\phi$ i $|AP|=|OA|\sin\phi=\sin\phi$, dobivamo

$$\begin{aligned}|OD|^2&=(\cos\phi+2\sin\phi)^2+\sin^2\phi\\&=\cos^2\phi+\sin^2\phi+4\sin^2\phi+2\cdot2\sin\phi\cos\phi\\&=1+2\sin^2\phi+2\cos^2\phi-2\cos^2\phi+2\sin^2\phi+2\sin2\phi\\&=3+2\sin2\phi-2\cos2\phi\\&=3+2\sqrt{2}\sin\left(2\phi-\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Maksimum se postiže za $2\phi-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ i on iznosi

$$\text{maks}\,|OD|=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}=1+\sqrt{2}.$$

3.3. Vrijedi:

$$\begin{aligned}\text{tg}^2(x+y)+\text{ctg}^2(x+y)&=(\text{tg}(x+y)-\text{ctg}(x+y))^2+2\,\text{tg}(x+y)\,\text{ctg}(x+y)\\&=(\text{tg}(x+y)-\text{ctg}(x+y))^2+2.\end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da je $\mathrm{tg}^2(x+y)+\mathrm{ctg}^2(x+y)\geq 2$. Desna strana se može pisati u obliku

$$1-2x-x^2=2-(1+2x+x^2)=2-(1+x)^2\leq 2.$$

Odavde zaključujemo da će zadana jednadžba imati rješenje samo za vrijednosti x za koje je

$$\mathrm{tg}^2(x+y)+\mathrm{ctg}^2(x+y)=2 \quad \text{i} \quad 1-2x-x^2=2.$$

Prva jednadžba je zadovoljena za $\mathrm{tg}(x+y)=\mathrm{ctg}(x+y)$, tj. za $\mathrm{tg}(x+y)=\pm 1$, ili $x+y=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, \quad k\in\mathbf{Z}$.

Druga je zadovoljena ako je $(x+1)^2=0$, odakle je $x=-1$.

Dakle, rješenja jednadžbe su $x=-1$, $y=\frac{\pi}{4}+1+\frac{k\pi}{2}, \quad k\in\mathbf{Z}$.

3.4. Kosinusov poučak zapišimo u obliku

$$2bc\cos\alpha+a^2=b^2+c^2 \quad \text{ili} \quad 2\cos\alpha+\frac{a^2}{bc}=\frac{b}{c}+\frac{c}{b}.$$

Kako je $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2$, dobivamo

$$\frac{a^2}{bc}\geq 2(1-\cos\alpha)=4\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

i na sličan način

$$\frac{b^2}{ca}\geq 4\sin^2\frac{\beta}{2}, \qquad \frac{c^2}{ab}\geq 4\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

Zbrajanjem ove tri nejednakosti dobivamo nejednakost koju je trebalo dokazati.

* * *

4.1. Množenjem jednadžbe sa $z+1$ dobivamo

$$z^3+1=0 \qquad \text{tj.} \qquad z^3=-1.$$

Tada je $z^6=1$ i $z^{2004}=(z^6)^{334}=1$, pa je tražena suma jednaka 2.

4.2. Promatrat ćemo najprije lijevu, a zatim desnu nejednakost.

$$1^\circ \quad \frac{n^k}{k^k}\leq\binom{n}{k} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{n^k}{k^k}\leq\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 2\cdot 1}.$$

Dovoljno je pokazati da je $\frac{n}{k}\leq\frac{n-l}{k-l}, \quad 0\leq l\leq k-1$. Nakon sređivanja dobije se ekvivalentna nejednakost $k\leq n$, koja je istinita.

$$2^\circ \quad \binom{n}{k}\leq\frac{n^k}{k!} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\leq\frac{n^k}{k!} .$$

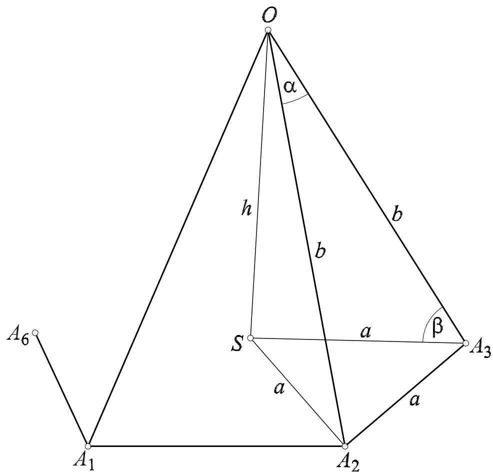
Ova nejednakost je ekvivalentna sa sljedećom

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)\leq n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n,$$

koja je očito istinita.

4.3. Prema oznakama na slici je

$$\frac{a}{b} = \cos\beta \quad \text{tj.} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \cos^2\beta. \tag{1}$$



Sl. 1.12.

Po kosinusovom poučku je

$$a^2 = 2b^2 - 2b^2\cos\alpha \qquad / : b^2$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 - 2\cos\alpha. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) dobijemo: $\cos^2\beta = 2 - 2\cos\alpha$.

Kako je $\beta = \alpha$, dobijemo kvadratnu jednadžbu

$$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 2 = 0,$$

čija su rješenja $(\cos\alpha)_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$. Zadovoljava samo rješenje $\cos\alpha = \sqrt{3} - 1$, tj. $\alpha = \arccos(\sqrt{3} - 1)$ ili $\alpha \approx 42.94^\circ$.

4.4. Da bi jednadžba imala smisla moraju biti zadovoljena ova dva uvjeta:

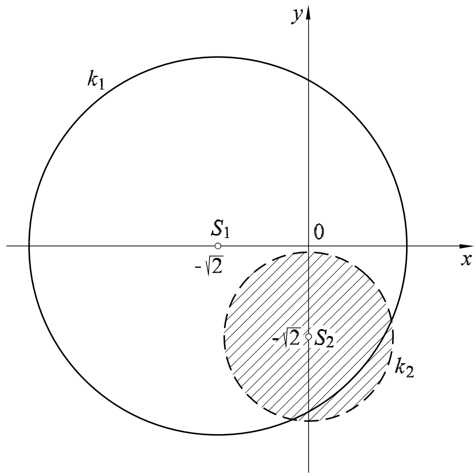
1° $a^2 - 3a + 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$,

2° $a > 0$.

Oba uvjeta su zadovoljena za $a \in (0, 1] \cup [2, \infty)$.

Definirajmo:

$$\begin{aligned} A &= \{z \in \mathbf{C} : |z + \sqrt{2}| = \sqrt{a^2 - 3a + 2}\} \\ &= \text{rub } k_1((-\sqrt{2}, 0), \sqrt{a^2 - 3a + 2}), \\ B &= \{z \in \mathbf{C} : |z + i\sqrt{2}| < a\} \\ &= \text{unutrašnjost } k_2((0, -\sqrt{2}), a). \end{aligned}$$



Sl. 1.13.

Traženi broj a će postojati ako i samo ako je udaljenost središta S_1 i S_2 kružnica k_1 i k_2, a ona iznosi $d(S_1, S_2) = 2$, manja od zbroja njihovih polumjera, $r_1 = \sqrt{a^2 - 3a + 2}$ i $r_2 = a$, i da polumjer r_1 kružnice nije tako velik da kružnica S_1 u potpunosti sadrži kružnicu S_2 tj. $r_1 + r_2 > 2$ i $r_1 < 2 + r_2$. Slijedi,

$$\sqrt{a^2 - 3a + 2} > 2 - a. \tag{1}$$

Za $a > 2$ je $2 - a < 0$ i (1) je zadovoljeno.

Za $a \le 2$ imamo

$$\sqrt{a^2 - 3a + 2} > 2 - a \ge 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 - 3a + 2 > 4 - 4a + a^2,$$

odakle je $a > 2$, što je kontradikcija. U tom slučaju ne postoji traženi a.

Drugi uvjet je zadovoljen ako i samo ako je

$$\sqrt{a^2 - 3a + 2} \le 2 + a \qquad \text{tj.} \qquad 0 \le 2 + 7a,$$

a, kako je $a > 0$, ovaj uvjet je zadovoljen.

Zaključujemo da mora biti $a > 2$.