1.

Geometrija pomaže algebri

Pri rješavanju algebarskih zadataka (jednadžbe, sustavi jednadžbi, dokazivanje nejednakosti) ponekad možemo uočiti sljedeće: ako zadatak malo transformiramo, on potpuno zadovoljava uvjete nekog geometrijskog zadatka, te možemo konstruirati geometrijski lik za koji vrijede uvjeti našeg zadatka.

Dakle, to nam omogućuje da algebarski zadatak *prevedemo* na geometrijski, da uočimo još neke odnose među veličinama i zadatak lakše riješimo.

Pokažimo to na sljedećim primjerima.

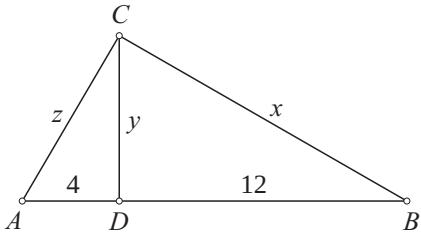
* * *

Zadatak 1.1. *Riješi sustav jednadžbi*

$$x^2 - y^2 = 144\,,$$
$$z^2 - y^2 = 16\,,$$
$$xz = 16y\,,$$

ako je $x > 0\,,\ y > 0\,,\ z > 0\,.$

Rješenje. Konstruirajmo pravokutne trokute ADC i DBC koji zadovoljavaju uvjete prve dvije jednadžbe.



Sl. 1.1.

Kako je površina trokuta ABC jednaka $\frac{16y}{2}$ i kako je $16y = xz$, zaključujemo da je trokut ABC pravokutan. Dakle,

$$x^2 + z^2 = 256$$

oduzimanjem druge jednadžbe od prve dobivamo

$$x^2 - z^2 = 128.$$

Zbrajanjem ovih jednadžbi imamo

$$2x^2 = 384, \quad \text{tj.} \quad x^2 = 192\,, \text{ ili} \quad x = 8\sqrt{3}.$$

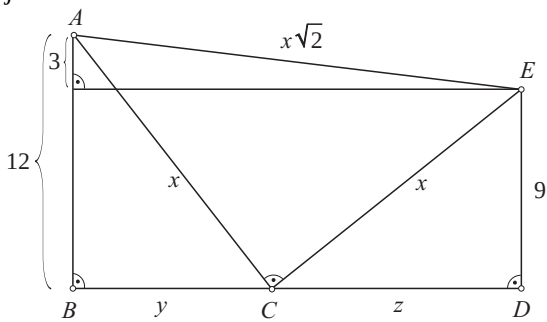
Dalje se lako izračuna $z = 8$ i $y = 4\sqrt{3}$.

Zadatak 1.2. *Riješi sustav jednadžbi*

$$x^2 - y^2 = 144\,,$$
$$x^2 - z^2 = 81\,,$$
$$2x^2 - (y+z)^2 = 9\,,$$

ako je $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Rješenje.



Sl. 1.2.

Konstruirajmo sliku koja zadovoljava uvjete sve tri jednadžbe. Kako su trokuti ABC i CDE sukladni, slijedi da je $y = 9$, $z = 12$, $x = 15$.

Zadatak 1.3. *Za koje vrijednosti* x *funkcija*

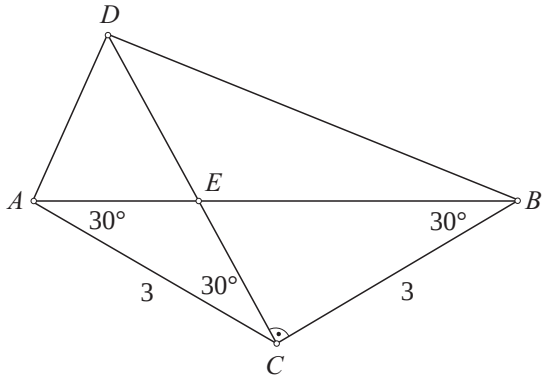
$$f(x) = \sqrt{9 + x^2} + \sqrt{9 + x^2 - 3\sqrt{3}x}$$

poprima najmanju vrijednost?

Rješenje. Ako je $x = 0$, vrijednost funkcije je $f(0) = 6$. Ako je $x < 0$, tada je očigledno $f(x) > f(0) = 6$. Promotrimo slučaj kada je $x > 0$.

Dana funkcija se može transformirati u oblik

$$f(x) = \sqrt{3^2 + x^2} + \sqrt{3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \cos 30^\circ}.$$



Sl. 1.3.

Uočimo da je prvi korijen jednak duljini hipotenuze pravokutnog trokuta čije su katete 3 i x. Po kosinusovom poučku drugi korijen jednak je stranici trokuta čije su druge dvije stranice jednake, također 3 i x, a kut među njima 30°.

Tada je $|BE| = 2 \cdot |EC| = 2\sqrt{3}$ (trokut BEC je jednak polovici jednakostraničnog trokuta) a $|AE| = |EC| = \sqrt{3}$ (trokut AEC je jednakokračan), odnosno $|AB| = 3\sqrt{3}$. Kako je $|AD| + |BD|$ vrijednost funkcije $f(x)$ za $x > 0$, i kako je $|AD| + |BD| \geqslant |AB| = 3\sqrt{3}$, zaključujemo da funkcija poprima najmanju vrijednost kada je $|AD|+|DB| = |AB|$, odnosno kada točka D leži na pravcu AB, tj. kada $D \equiv E$.
Budući da je $x = |EC| = \sqrt{3}$, funkcija $f(x) = \sqrt{9 + x^2} + \sqrt{9 + x^2 - 3\sqrt{3}x}$ poprima najmanju vrijednost za $x = \sqrt{3}$ i iznosi $3\sqrt{3}$.

Zadatak 1.4. *Dokazati nejednakost*

$$\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{b^2 - c^2} \leqslant \frac{ab}{c} \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0).$$

Rješenje. Ako je $a = c$ ili $b = c$, nejednakost je očigledna. Ostalo je da dokažemo slučaj kada je $a > c$ i $b > c$. Tada možemo konstruirati deltoid, pomoću stranica a, b i c, tako da je: $|AB| = |AD| = a$; $|CB| = |CD| = b$; $|DB| = 2c$ (slika 1.4.)

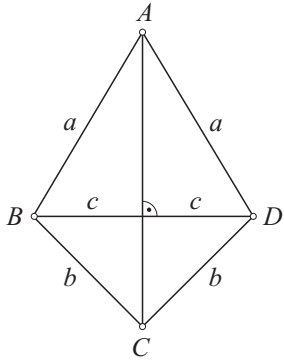
Izrazimo površinu deltoida na dva načina

$$\left.\begin{array}{l} P_{ABD} = c\sqrt{a^2-c^2} \\ P_{BCD} = c\sqrt{b^2-c^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad P_{ABCD} = c\sqrt{a^2-c^2} + c\sqrt{b^2-c^2} \qquad (1)$$

$$P_{ABCD} = a \cdot b \cdot \sin \sphericalangle(ABC) \leqslant a \cdot b, \qquad (2)$$

jer je $\sin \sphericalangle(ABC) \leqslant 1$. Tada iz (1) i (2) slijedi

$$\sqrt{a^2-c^2} + \sqrt{b^2-c^2} \leqslant \frac{ab}{c}$$



Sl. 1.4.

Zadatak 1.5. *Izračunaj* $A = xy + 2xz + yz\sqrt{3}$, *ako je* $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ *i*

$$x^2 + y^2 + xy\sqrt{3} = 169,$$
$$x^2 + z^2 = 25,$$
$$z^2 + y^2 + yz = 144.$$

Rješenje. Napišimo dane jednadžbe u sljedećem obliku

$$x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 150^\circ = 169,$$
$$x^2 + z^2 - 2xz \cdot \cos 90^\circ = 25,$$
$$y^2 + z^2 - 2yz \cdot \cos 120^\circ = 144.$$

Uočimo da, po kosinusovom poučku, svaka jednadžba predstavlja odnos među danim stranicama trokuta.

Dakle, konstruirajmo dužine $|OB| = x$, $|OA| = y$, $|OC| = z$, tako da je $\sphericalangle AOB = 150^\circ$, $\sphericalangle COB = 90^\circ$, $\sphericalangle AOC = 120^\circ$. Dalje je $|AB| = 13$, $|AC| = 12$ i $|BC| = 5$ (slika 1.5.) tj. trokut ABC je pravokutan.

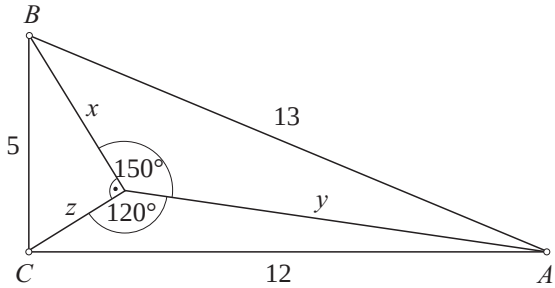
Kako je

$$P_{ABC} = P_{AOB} + P_{BOC} + P_{AOC},$$

$$\frac{5 \cdot 12}{2} = \frac{x \cdot y \cdot \sin 150^\circ}{2} + \frac{x \cdot z \cdot \sin 90^\circ}{2} + \frac{y \cdot z \cdot \sin 120^\circ}{2},$$

slijedi da je

$$xy + 2xz + yz\sqrt{3} = 120.$$

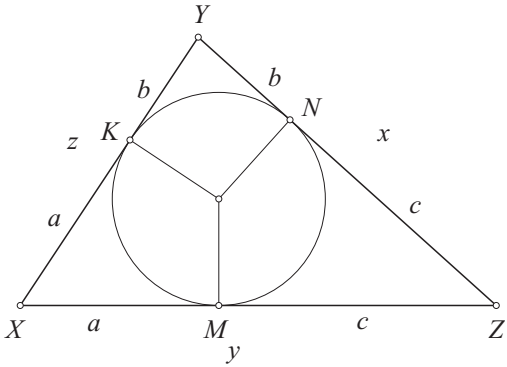


Sl. 1.5.

Zadatak 1.6. *Ako je* $abc(a+b+c) = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$, *dokaži da je*

$$(a+b) \cdot (a+c) \geqslant 2.$$

Rješenje. Ako je $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, poznato je da postoji trokut XYZ takav da je $|XY| = z = a+b$; $|XZ| = y = a+c$; $|YZ| = x = b+c$, pri čemu su K, M, N, točke dodira upisane kružnice u trokut XYZ sa stranicama x, y i z (slika 1.6.). Tada je $a+b+c = p$, gdje je p poluopseg.



Sl. 1.6.

Kako je $|XK| = |XM| = a = p - x$, $|ZM| = |ZN| = c = p - z$, $|YK| = |YN| = b = p - y$, koristeći uvjete zadatka, imamo

$$a \cdot b \cdot c \cdot (a + b + c) = p(p - x)(p - y)(p - z) = P_{XYZ}^2 = 1,$$

ili $P_{XYZ} = 1$. Izrazimo površinu trokuta XYZ i na drugi način

$$2P_{XYZ} = |XY| \cdot |XZ| \cdot \sin \sphericalangle(YXZ) = (a + b)(a + c) \sin \sphericalangle(YXZ).$$

Kako je $P_{XYZ} = 1$ i $\sin \sphericalangle(YXZ) \leqslant 1$, slijedi da je

$$(a + b)(a + c) \geqslant 2.$$

Zadatak 1.7. *Odredi realne x i y koji zadovoljavaju jednadžbu*

$$\sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{3}} + \sqrt{x^2 + y^2 - xy\sqrt{3}} + \sqrt{16 + y^2 - 4y\sqrt{3}} = 5.$$

Rješenje. Uočimo da je

$$\sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{3}} = \sqrt{\left(x - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}} \geqslant \frac{3}{2},$$

$$\sqrt{16 + y^2 - 4y\sqrt{3}} = \sqrt{(y - 2\sqrt{3})^2 + 4} \geqslant 2.$$

Ako je $x \leqslant 0$, tada prvi izraz nije manji od 3, a zbroj sva tri izraza je veći od 5.

Analogno, ako je $y \leqslant 0$, tada drugi izraz nije manji od 4, a zbroj sva tri izraza je veći od 5.

Dakle, $x > 0$, $y > 0$.

Konstruirajmo tri trokuta, tako da imaju jednu zajedničku točku, sa stranicama 3 i x, x i y, y i 4 i kutom među njima koji iznosi 30° (slika 1.7.).

Primjenom kosinusovog poučka dobivamo

$$|AK| + |KL| + |LB| = \sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{3}} + \sqrt{x^2 + y^2 - xy\sqrt{3}} + \sqrt{16 + y^2 - 4y\sqrt{3}},$$

odnosno

$$|AK| + |KL| + |LB| = 5,$$

a to je moguće ako točke K i L leže na pravcu AB. Primjenom poučka o sinusima u trokutu ACK imamo

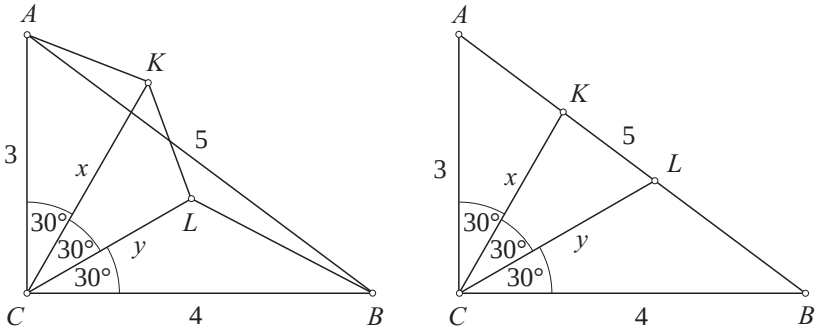
$$|AK| : x = \frac{1}{2} : \frac{4}{5}, \quad \text{ili} \quad |AK| = \frac{5x}{8},$$

odnosno u trokutu BCK

$$\left(5-\frac{5x}{8}\right):x=\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{3}{5},$$

ili nakon sređivanja

$$x=\frac{24}{3+4\sqrt{3}}.$$



Sl. 1.7.

Slično izračunamo

$$y=\frac{24}{4+3\sqrt{3}}.$$

Zadatak 1.8. *Riješi sustav jednadžbi*

$$x=\sqrt{y^2-a^2}+\sqrt{z^2-a^2},$$
$$y=\sqrt{x^2-b^2}+\sqrt{z^2-b^2},$$
$$z=\sqrt{x^2-c^2}+\sqrt{y^2-c^2}.$$

Rješenje. Konstruirajmo šiljastokutni trokut ABC. Neka je $|AB|=x$, $|AC|=y$, $|BC|=z$, $|CD|=a$, $|BE|=b$, $|AF|=c$ (slika 1.8.)

Primjenom Pitagorinog poučka dobivamo

$$|AD|+|BD|=x=\sqrt{y^2-a^2}+\sqrt{z^2-a^2},$$
$$|AE|+|CE|=y=\sqrt{x^2-b^2}+\sqrt{z^2-b^2},$$
$$|BF|+|CF|=z=\sqrt{x^2-c^2}+\sqrt{y^2-c^2}.$$

Kako je

$$2P=ax=by=cz,\quad \text{gdje je } P \text{ površina trokuta } ABC,$$

slijedi da je

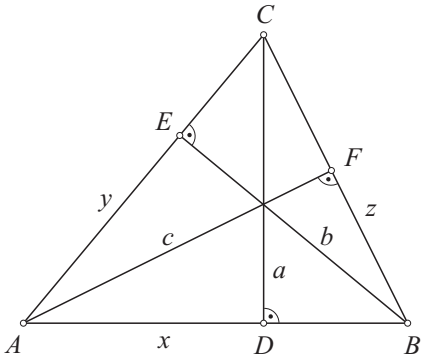
$$x = \frac{2P}{a}, \quad y = \frac{2P}{b}, \quad z = \frac{2P}{c}.$$

Izrazimo površinu trokuta ABC Heronovom formulom

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)},$$

ili nakon uvrštavanja $x = \dfrac{2P}{a}$, $y = \dfrac{2P}{b}$, $z = \dfrac{2P}{c}$:

$$P = P^2\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)}$$



Sl. 1.8.

Dakle:

$$x = \frac{2P}{a}, \quad y = \frac{2P}{b}, \quad z = \frac{2P}{c},$$

gdje je

$$P = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)}}.$$

2.

Algebra pomaže algebri

Za rješavanje jednadžbi trećeg i četvrtog stupnja postoje opće formule kojima možemo izračunati njihova rješenja. Za jednadžbe trećeg stupnja to je Cardanova formula, za jednadžbe četvrtog stupnja do takve formule dolazimo Ferrarijevom metodom. Međutim, one su neprikladne za primjenu.

U ovom poglavlju pokazat ćemo jedan neobičan način rješavanja jednadžbi drugog, trećeg i četvrtog stupnja. Naime, mi ćemo jednadžbu transformirati i rješavati je kao kvadratnu po pogodnom koeficijentu. Pokažimo to na primjerima.

* * *

Zadatak 2.1. *Riješi jednadžbu*

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0.$$

Rješenje. Napišimo danu jednadžbu u obliku

$$2^2 - 2x^2 + x^3 - x^2 = 0.$$

Riješimo sada ovu jednadžbu kao kvadratnu po koeficijentu 2.

$$2 = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^4 - 4x^3 + 4x^2}}{2},$$

odakle je

$$2 = \frac{x^2 + (x^2 - 2x)}{2} \quad \text{ili} \quad 2 = \frac{x^2 - (x^2 - 2x)}{2},$$

tj.

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad \text{ili} \quad 2x = 4.$$

Rješavanjem ove dvije jednadžbe dobivamo

$$\begin{aligned} x_1 &= 2, \\ x_{2/3} &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}, \text{ tj.} \\ x_2 &= 2, \\ x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Dakle, naša jednadžba ima tri korijena $x_1 = x_2 = 2$ i $x_3 = -1$.

Zadatak 2.2. *Riješi jednadžbu*

$$x^4 - 4x^2 + x + 2 = 0.$$

Rješenje. Danu jednadžbu napišimo u obliku

$$2^2 - (2x^2 + 1) \cdot 2 + x^4 + x = 0.$$

Riješimo ovu jednadžbu kao kvadratnu po koeficijentu 2

$$2 = \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^4 - 4x}}{2},$$

ili

$$2 = \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{(2x-1)^2}}{2},$$

tj.

$$2 = \frac{2x^2 + 1 + 2x - 1}{2} \quad \text{ili} \quad 2 = \frac{2x^2 + 1 - 2x + 1}{2},$$

odakle je

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad \text{ili} \quad x^2 - x - 1 = 0.$$

Rješavanjem ove dvije jednadžbe dobivamo

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}, \\ x_1 &= 1\,, \\ x_2 &= -2\,. \\ x_{3/4} &= \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}\,, \\ x_3 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\,, \\ x_4 &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\,. \end{aligned}$$

Zadatak 2.3. *Riješi jednadžbu*

$$\sqrt{5-x} = x^2 - 5.$$

Rješenje. Dana jednadžba je ekvivalentna sustavu

$$5 - x = (x^2 - 5)^2\,,$$
$$x^2 \geqslant 5\,,\ x \leqslant 5\,.$$

Napišimo gornju jednadžbu u obliku

$$5^2 - (1 + 2x^2) \cdot 5 + x^4 + x = 0.$$

Riješimo sada ovu jednadžbu kao kvadratnu po koeficijentu 5.

$$5 = \frac{1 + 2x^2 \pm \sqrt{(1-2x)^2}}{2},$$

odakle je

$$5 = \frac{1 + 2x^2 + 1 - 2x}{2} \quad \text{ili} \quad 5 = \frac{1 + 2x^2 - 1 + 2x}{2},$$

tj.

$$x^2 - x - 4 = 0\,,$$
$$x^2 + x - 5 = 0\,.$$

Rješavanjem ovih jednadžbi dobivamo

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}\,,$$
$$x_{3/4} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}\,.$$

Kako je $x^2 \geqslant 5$ i $x \leqslant 5$, polaznu jednadžbu zadovoljavaju $x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ i $x = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

Zadatak 2.4. *Riješi jednadžbu*

$$x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0.$$

Rješenje. Napišimo danu jednadžbu u obliku

$$a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 + x = 0.$$

Riješimo ovu jednadžbu kao kvadratnu po parametru a. Imamo

$$a = \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{(2x-1)^2}}{2},$$

odnosno

$$x^2 + x - a = 0\,,$$
$$x^2 - x + 1 - a = 0.$$

Rješavanjem ovih jednadžbi dobivamo:

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2},$$
$$x_{3/4} = \frac{1 \pm \sqrt{4a-3}}{2},$$

kao rješenja dane jednadžbe.

Zadatak 2.5. *Jednadžba*

$$2x^2 + 5y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$$

ima jedinstveno rješenje u skupu $\mathbf{R}^2$. *Odredi to rješenje.*

Rješenje. Napišimo danu jednadžbu u obliku

$$5y^2 - 2(x+1)y + 2x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Riješimo sada danu jednadžbu kao kvadratnu po y

$$y_{1/2} = \frac{2x + 2 \pm \sqrt{-36x^2 + 48x - 16}}{10},$$
$$y_{1/2} = \frac{x + 1 \pm \sqrt{-(3x-2)^2}}{5}.$$

Da bi jednadžba imala realne korijene mora biti

$$3x - 2 = 0, \quad \text{tj.} \quad x = \frac{2}{3}.$$

Uvrštavanjem ove vrijednosti u polaznu jednadžbu lako dobivamo

$$y = \frac{1}{3}.$$

Dakle, $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ je jedino realno rješenje jednadžbe.

Zadatak 2.6. *Riješi sustav jednadžbi*

$$x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 8y + 10 = 0\,,$$
$$2x^2 - 7xy + 3y^2 + 13x - 4y - 7 = 0\,,$$

u skupu $\mathbf{R}^2$.

Rješenje. Napišimo prvu jednadžbu u obliku

$$x^2 - 2(y-1)x + 2y^2 - 8y + 10 = 0,$$

i riješimo je kao kvadratnu po x. Da bi ova jednadžba imala realne korijene mora biti $D \geqslant 0$ (gde je D diskriminanta). Kako je

$$\frac{D}{4} = -(y-3)^2,$$

slijedi da je

$$y = 3.$$

Uvrštavanjem ove vrijednosti u obje jednadžbe dobivamo

$$x^2 - 4x + 4 = 0, \quad \text{tj.} \quad x = 2.$$

Dakle, $(2,3)$ je jedino realno rješenje danog sustava.

Zadatak 2.7. *Dokaži nejednakost*

$$6a + 4b + 5c \geqslant 5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc},$$

ako je $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

Rješenje. Napišimo danu nejednakost u obliku

$$6\sqrt{a}^2 - (5\sqrt{b} + 7\sqrt{c})\sqrt{a} + 4b + 5c - 3\sqrt{bc} \geqslant 0,$$

i riješimo je kao kvadratnu nejednadžbu po $\sqrt{a}$. Kako za svaki x vrijedi

$$Ax^2 + Bx + C \geqslant 0 \Leftrightarrow D \leqslant 0 \wedge A > 0 \quad \text{(gdje je } D \text{ diskriminanta)},$$

slijedi da za našu nejednadžbu imamo

$$D = (5\sqrt{b} + 7\sqrt{c})^2 - 24(4b + 3c - 3\sqrt{bc}) = -71(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2.$$

Vidimo da je $D < 0$ za svaki $b \neq c$, $b, c \geqslant 0$, i $D = 0$ za svaki $b = c$, $b, c \geqslant 0$, pa je

$$6\sqrt{a}^2 - (5\sqrt{b} + 7\sqrt{c})\sqrt{a} + 4b + 5c - 3\sqrt{bc} \geqslant 0,$$

odnosno njoj ekvivalentna nejednakost

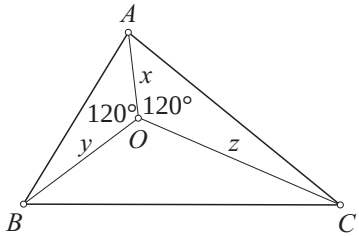
$$6a + 4b + 5c \geqslant 5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc},$$

za svaki $a, b, c \geqslant 0$. Jednakost vrijedi ako je $a = b = c$.

Rješenja

R1. Konstruirajte deltoid $ABCD$ ako je $|AB| = |AD| = \sqrt{b}$, $|BC| = |BD| = \sqrt{a}$, $|BD| = 2\sqrt{c}$. Ako se površina deltoida izrazi na dva načina, lako se dokaže tražena nejednakost. Jednakost vrijedi, ako je $c = \dfrac{ab}{a+b}$.

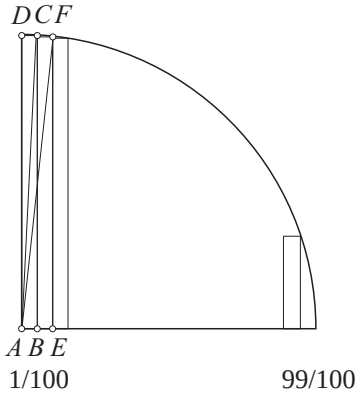
R2. Uočimo trokut ABC: $|OA| = x$, $|OB| = y$, $|OC| = z$, $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COA = 120°$ (slika 11.1).



Sl. 11.1.

Primjenom kosinusovog poučka lako se dobije da je $|AB| = 2$, $|AC| = 3$, $|BC| = 6$. Takav trokut ne postoji, pa naš sustav nema rješenje u skupu pozitivnih brojeva.

R3. Promatrajmo četvrtinu kruga polumjera 1.



Sl. 11.2.

Upišimo u njega stepenastu figuru, sastavljenu od 99 pravokutnika s donjom osnovicom $\dfrac{1}{100}$ (slika 11.2). Tada su površine tih pravokutnika redom:

$$P_1 = P_{\square ABCD} = AB \cdot BC = AB \cdot \sqrt{AC^2 - AB^2}$$
$$= \frac{1}{100} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{100^2}} = \frac{\sqrt{99 \cdot 101}}{100^2};$$

$$P_2 = P_{\square BEFC} = BE \cdot EF = BE \cdot \sqrt{AF^2 - AE^2}$$
$$= \frac{1}{100} \cdot \sqrt{1 - \frac{2^2}{100^2}} = \frac{\sqrt{98 \cdot 102}}{100^2};$$

itd...

$$P_{99} = \frac{1}{100}\sqrt{1 - \frac{99^2}{100^2}} = \frac{\sqrt{1 \cdot 199}}{100^2}.$$

Površina 99 pravokutnika stepenaste figure (slika 11.2) manja je od površine četvrtine kruga, tj. $P_1 + P_2 + ... + P_{99} < \frac{\pi}{4}$, odakle slijedi dana nejednakost.

R4. Dvostrukim kvadriranjem dobijemo jednažbu

$$6a^2 - a(5x^2 - x) + x^4 - 2x^3 - 15x^2 = 0.$$

Riješimo li ovu jednadžbu kao kvadratnu po a, dobijemo dvije kvadratne jednadžbe čija su rješenja

$$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 8a}}{2}, \quad x_{3/4} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 12a}}{2},$$

R5. Riješimo li drugu jednadžbu kao kvadratnu po y, dobije se $0 \leqslant z \leqslant 2$. Riješimo li treću jednadžbu kao kvadratnu po x, dobivamo $z = 0$ i $z \geqslant 2$. Dakle, $z = 0$ ili $z = 2$. Rješenja sustava su $(-4, 2, 0)$ i $(-2, 1, 2)$.

R6. Riješimo danu jednadžbu kao kvadratnu po $\sqrt{3}$. Dobivamo dvije kvadratne jednadžbe:

$$x^2 + x - \sqrt{3} = 0,$$
$$x^2 - x + 1 - \sqrt{3} = 0,$$

čija su rješenja

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2},$$
$$x_{3/4} = \frac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{2}.$$

R7. Uvrstimo li x iz druge jednadžbe u prvu dobivamo

$$y^2 + (z - \sqrt{3})y - \sqrt{3}z + 1 = 0.$$

Riješimo li ovu jednadžbu kao kvadratnu po y, uz uvjet $D \geqslant 0$, dobit ćemo

$$x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

R8. Uvedimo supstitucije $x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $y = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ i $z = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, a onda rješavamo kao 3.11. zadatak u poglavlju *Trigonometrija pomaže algebri*.

R9. Uvedimo supstituciju $x = \cos\alpha$, $\alpha \in (0, \pi)$. Rješenja jednadžbe su

$$\pm\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

R10. Ako dani sustav napišemo u obliku $2x = y(1-x^2)$, $2y = z(1-y^2)$, $2z = z(1-z^2)$, i uvedemo supstituciju $x = \operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, dobivamo $y = \operatorname{tg} 2\alpha$, $z = \operatorname{tg} 4\alpha$, $x = \operatorname{tg} 8\alpha$ i imamo jednadžbu

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 8\alpha,$$

a iz toga $\alpha = \frac{k\pi}{7}$, ($k = \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$).

R11. Uvedimo supstituciju $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0, \pi]$. Dobije se

$$\sqrt{2}\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \cos 2\alpha + 2\cos\alpha\,|\sin\alpha|.$$

Zbog $\sin\frac{\alpha}{2} \geqslant 0$, $\sin\alpha \geqslant 0$ i $\alpha \in [0, \pi]$ dobije se rješenje $x = \cos\frac{3\pi}{16}$ odakle $x = \frac{\sqrt{20 - 2\sqrt{5}}}{4}$.

R12. Uvedimo supstituciju $\frac{b}{a} = \sin\alpha$, $\alpha \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

R13. Danu nejednakost napišemo u obliku

$$\sqrt{\frac{a}{d}\left(1-\frac{b}{d}\right)\left(1-\frac{c}{d}\right)} + \sqrt{\frac{b}{d}\left(1-\frac{a}{d}\right)\left(1-\frac{c}{d}\right)} + \sqrt{\frac{c}{d}\left(1-\frac{a}{d}\right)\left(1-\frac{b}{d}\right)} \leqslant 1 + \sqrt{\frac{abc}{d^3}}.$$

Nakon supstitucije

$$\frac{a}{d} = \sin^2\alpha, \quad \frac{b}{d} = \sin^2\beta, \quad \frac{c}{d} = \sin^2\gamma, \quad \alpha,\beta,\gamma \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle,$$

dobivamo nejednakost $\sin(\alpha+\beta+\gamma) \leqslant 1$, koja je uvijek točna.

R14. Podijelimo nejednakost s $\sqrt{ab}$ i uvedimo supstituciju

$$\frac{d}{a} = \operatorname{tg}^2\alpha, \quad \frac{c}{b} = \operatorname{tg}^2\beta, \quad \alpha,\beta \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle.$$

Konačno se dobije $(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)^2 \geqslant 0$, što je uvijek točno.

R15. Uvedimo supstituciju $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$. Ima šest rješenja

$$(\cos 25^\circ, \sin 25^\circ), (-\cos 35^\circ, \sin 35^\circ), (-\sin 5^\circ, -\cos 5^\circ),$$
$$(\cos 5^\circ, \sin 5^\circ), (-\sin 35^\circ, \cos 35^\circ), (-\sin 25^\circ, -\cos 25^\circ).$$

R16. Konstruirajmo trokut ABC, tako da je: $|CA| = 1$, $|CB| = 3$, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB = x$, i riješimo ga slično kao 1. zadatak u poglavlju *Planimetrija pomaže trigonometriji*. Dobiva se da je $3\cos\alpha = 2$, tj. $x = \arccos\frac{2}{3}$.

R17. Neka je ABC pravokutni trokut kod kojeg je $|AB| = 1$, $\sphericalangle BAC = 15^\circ$, $x = |BC| = \sin 15^\circ$, $y = |AC| = \cos 15^\circ$. Na kateti AC i njenom produžetku konstruirajmo točke M i N tako da je $|CM| = |CN| = x$. Tada je $|AN| = x + y$, $|AM| = y - x$. Primijenimo li poučak o sinusima na trokute ABM i ABN, lako dokažemo danu jednakost.

R18. Kroz vrh A pravokutnog jednakokračnog trokut ABC ($\sphericalangle BCA = 90^\circ$) povucimo dužinu AD tako da je $\sphericalangle DAC = 30^\circ$, zatim simetralu AE kuta DAB. Tada je $\sphericalangle CAE = 37^\circ 30'$. Ako je $|AC| = |BC| = 1$, slijedi da je $\operatorname{tg} 37^\circ 30' = |EC|$. Dalje je $|CD| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $|AD| = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Primjenom teorema o simetrali kuta lako se dobije:

$$\operatorname{tg} 37^\circ 30' = \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2.$$

R19. Konstruirajmo trokut ABC i točku O u njegovoj unutrašnjosti tako da je $|OA| = x$, $|OB| = y$, $|OC| = z$, $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COA = 120^\circ$. Kako je zbroj dviju stranica u trokutu veći od treće, primjenom kosinusovog poučka, lako se dokaže nejednakost.

R20. Konstruirajmo jednakokračni trokut ABC tako da je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = \frac{2\pi}{5}$, $\sphericalangle CAB = \frac{\pi}{5}$, $|BC| = 1$. Tada je $|BC| = |BD| = |AD| =$

1 . Iz trokuta ABD i BCD dobivamo $|AB| = 2\cos\frac{\pi}{5}$, $|CD| = 2\cos\frac{2\pi}{5}$. Kako je $|AD| = |AB| - |CD|$, supstitucijom dobivamo traženu jednakost.

R21. Neka su u koordinatnom sustavu dane točke $O(0,0)$, $A(a+c,b)$, $B(2a,2b)$. Kako svaki izraz predstavlja duljinu jedne stranice trokuta, dana nejednakost glasi $|OA|+|AB| \geqslant |OB|$, što je uvijek točno. Jednakost vrijedi ako točka B leži na pravcu OA, odnosno ako je $c = 0$.

R22. Uočimo pravilni $(2n+1)$–terokut i zadatak rješavamo analogno 4. zadatku u poglavlju *Planimetrija pomaže trigonometriji*.

R23. Konstruirajmo jediničnu kružnicu čije je središte ishodište pravokutnog koordinatnog sustava i u nju upišimo pravilan deveterokut $A_1A_2...A_9$, tako da pravac OA_1 s osi zatvara x kut od 9°. Neka je $\vec{e_i} = \overrightarrow{OA_i}$ ($i = 1,2,...,9$). Tada je $\vec{e_1} + \vec{e_2} + ... + \vec{e_9} = 0$ (dokaži). Kako je $\vec{e_1}+\vec{e_2}+...+\vec{e_9} = 0$ i $\vec{e_i} = (\cos(9^\circ+(\mathrm{i}-1)\cdot 40^\circ), \sin(9^\circ+(\mathrm{i}-1)\cdot 40^\circ))$, slijedi da je $\sin 9^\circ + \sin 49^\circ + ... + \sin 329^\circ = 0$.

R24. Rješavamo kao 4.3. zadatak u poglavlju *Vektori pomažu algebri*.

R25. Rješavamo kao 4.4. zadatak u poglavlju *Vektori pomažu algebri*.

LITERATURA

[1] Н. Б. Васильев, А. А. Егоров, *Задачи всесоюзных математических олимпиад*, Наука, Москва, 1988.

[2] В. А. Вышенский, Н. В. Карташов, В. И. Михайловский, *Сборник задач киевских математических олимпиад*, Вища щкола, Киев, 1984.

[3] Й. Киршак, Д. Нейкомм, Д. Хаийош, Я. Щурани, *Венгерские математические олимпиады*, Мир, Москва, 1976.

[4] В. С. Кущенко, *Сборник конкурсных задач по математике с решениями*, Судостроение, Ленинград, 1967.

[5] А. Г. Мерзляк, В. Г. Полонский, М. С. Якир, *Неожиданный щаг или сто тринадцаты красивых задач*, Агрофирма, Александрия, Киев, 1993.

[6] Г. Паскалов, П. Пенчев, *Задачи за подготовки за математически олимпиади*, Народна просвета, София, 1983.

[7] Tournament of the towns, *Questions and solutions by P. J. Taylor*, Australian Mathematics Trust, 1993.

[8] Квант, Москва, 2/ 95.

[9] Математика в школе, Москва.