1.

Općinsko natjecanje

Općinska i gradska natjecanja održana su u svim gradovima i općinama Hrvatske 7. ožujka 2005. g. Zadatke je osmislilo državno povjerenstvo za matematička natjecanja. Učenici osnovnih škola rješavali su svoje zadatke dva sata, a učenici srednjih škola tri sata.

Osnovna škola

4. razred

4.1. Izračunaj

a) $67 \cdot (645 + 119) + 67 \cdot (321 - 47)$

b) $2005 \cdot 999 - 999 \cdot 1993$.

4.2. Jednakostranični trokut ABC ima opseg 21 cm.

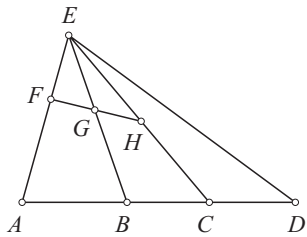
a) Izračunaj duljinu stranice trokuta ABC.

b) Nacrtaj trokut ABC.

c) Izračunaj duljinu osnovice jednakokračnog trokuta kojemu krak ima duljinu 8 cm, a opseg mu je jednak opsegu trokuta ABC.

4.3. Ivica, Josip i Vlado su tri učitelja matematike. Ivica i Vlado zajedno imaju 117 godina, Vlado i Josip imaju 96 godina, a Ivica i Josip zajedno imaju 105 godina. Koliko godina ima svaki od njih?

4.4. Ispiši sve trokute koje vidiš na slici. Koliko ih ima?



Sl. 1.1.

4.5. Duljine stranica trokuta izražene u milimetrima su tri uzastopna broja. Ako je opseg trokuta 183 mm, izračunaj duljine stranica tog trokuta.

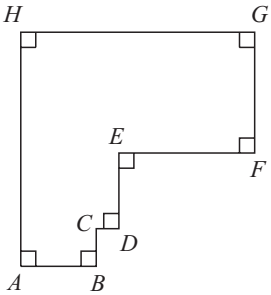
5. razred

5.1. Mislav je zamislio jedan broj. Kad ga je pomnožio s 8 i tom umnošku dodao 8, dobio je broj koji je za 11 veći od 701. Koji je broj zamislio Mislav?

5.2. U broju $\overline{198a8b}$ odredi znamenke a i b tako da broj bude djeljiv s 18. Ispiši sve te šesteroznamenkaste brojeve.

5.3. U mljekari "Zlatni pašnjaci" mlijeko se sprema u dva spremnika. U većem spremniku punom mlijeka nalazi se tri puta više mlijeka nego u manjem spremniku, isto punom mlijeka. Nakon što se iz većeg spremnika istoči 783 litre mlijeka i pošalje u preradu, a iz manjeg spremnika istoči 87 litara mlijeka, u svakom od njih preostala je jednaka količina mlijeka. Koliko mlijeka sadrže svaki od spremnika posebno, kad su potpuno napunjeni?

5.4. Liku $ABCDEFGH$ danom na slici opseg je 124 mm, pri čemu su duljine stranica $\overline{AH}$ i $\overline{GH}$ jednake.



Sl. 1.2.

a) Nacrtaj osnosimetričnu sliku lika $ABCDEFGH$ s obzirom na pravac AG.

b) Izračunaj duljinu stranice $\overline{AH}$.

5.5. Odredi zbroj

$$5 + 10 + 15 + \ldots + 2000 + 2005.$$

6. razred

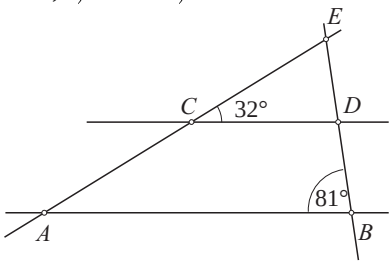
6.1. Usporedi razlomke

$$\left[\left(\frac{11}{2} : 8.25 + 2\right) : \left(\frac{9}{5} - \frac{5}{8} : (1 - 0.375)\right)\right] \cdot (1 - \frac{9}{10}) + (1 - \frac{9}{10}) : 0.3$$

i

$$\frac{1336}{2005}.$$

6.2. Na slici su dana dva usporedna pravca AB i CD, te dva pravca koja ih presjecaju. Ako je $\sphericalangle DCE = 32^\circ$ i $\sphericalangle ABD = 81^\circ$, izračunaj veličinu kutova $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle CDB$ i $\sphericalangle CED$.



Sl. 1.3.

6.3. Obitelj Poslić krenula je automobilom na ljetovanje. Kad su prešli četvrtinu puta, odlučili su se odmoriti. Do ljetovališta im je ostala još osmina puta i još 250 km.

a) Koliko je kilometara dug cijeli put?

b) Kad su prešli $\frac{11}{25}$ puta skrenuli su na benzinsku postaju. Koliko im je kilometara još preostalo do cilja?

6.4. Krešimir radi u trgovini i za svoj rad dobiva 66.60 kuna dnevno, a onaj dan kad radi prekovremeno dobije još trećinu novca više. Za 30 dana rada dobio je 2175.60 kuna. Koliko je dana Krešimir radio prekovremeno?

6.5. U pravokutnom trokutu ABC s pravim kutom pri vrhu C, na stranici $\overline{AB}$ dana je točka M, a na stranici $\overline{AC}$ točka N tako da je

$$|BC| = |CM| = |MN| = |AN|.$$

Odredi kutove trokuta ABC.

7. razred

7.1. Riješi jednadžbu

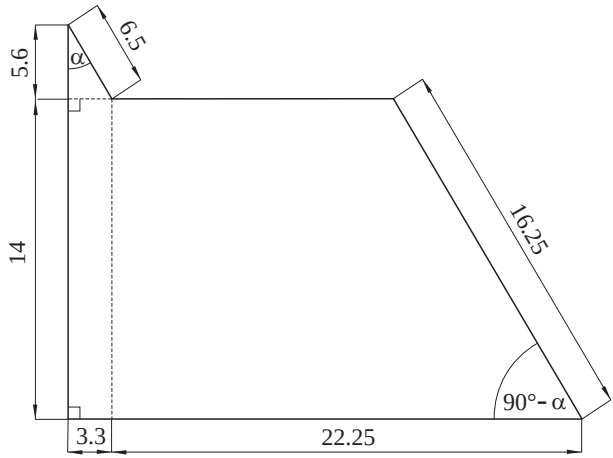
$$\frac{5}{3}x + 3.1 - \left(\frac{x-3}{2} + x + \frac{5}{6}\right) = 4x - 0.7.$$

7.2. Dana dva broja odnose se kao $19:8$. Ako podijelimo zbroj tih brojeva s njihovom razlikom količnik je 2 i ostatak 20. Koji su to brojevi?

7.3. Sanduk napunjen jabukama ima masu 20 kg. Ako izvadimo 20% jabuka, masa sanduka s jabukama smanji se na 82% prvobitne mase. Kolika je masa praznog sanduka?

7.4. Koliko stranica ima konveksni nepravilni mnogokut kojem je zbroj svih unutarnjih kutova i jednog vanjskog jednak 2005°?

7.5. Izračunaj površinu lika na slici, ako su duljine dane u milimetrima.



Sl. 1.4.

8. razred

8.1. Izračunaj

$$\left(\frac{1}{\sqrt{30}-\sqrt{28}} - \frac{1}{\sqrt{28}-\sqrt{26}} - \frac{1}{\sqrt{30}+\sqrt{26}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{30}-\sqrt{26}}.$$

8.2. Jelena i Ana obavile bi neki posao za 48 minuta radeći zajedno. Kad bi umjesto Ane radila Dragica koja je dva puta brža, tada bi Jelena i Dragica taj posao završile za 36 minuta. Koliko bi vremena bilo potrebno svakoj od djevojčica za obavljanje tog istog posla kad bi ga radile samostalno?

8.3. Dan je jednakokračan trokut ABC, pri čemu je $|AC| = |BC| = 4$ cm. Na stranici $\overline{AB}$ dana je točka D tako da je $\sphericalangle BDC = 90^\circ + \sphericalangle DBC$. Odredi duljinu visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$ ako je $|CD| = 3$ cm.

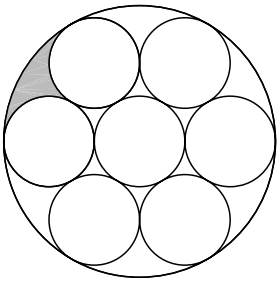
8.4. U pravokutnom je trokutu ABC ($\sphericalangle BCA = 90^\circ$) odabrana je točka D na kateti $\overline{AC}$ tako da je $|DC| = 22$ dm. Izračunaj udaljenost točke D do pravca AB ako je $|AC| = 72$ dm i $|BC| = 21$ dm.

8.5. Autobus je krenuo u 17 sati i 55 minuta iz mjesta A prema mjestu B. Početnih 40 km puta prešao je za 25 minuta. Zbog problema na cesti narednih 30 km puta vozač je morao smanjiti brzinu autobusa za $\frac{1}{4}$ dotadašnje brzine. Kojom bi se brzinom trebao kretati autobus na preostalih $\frac{13}{20}$ puta ako bi vozač htio doći u mjesto B po redu vožnje u 20 sati?

Srednja škola

1. razred

1.1. Sedam kružnica jednakih polumjera smješteno je unutar veće kružnice kao na slici. Ako je polumjer manje kružnice 1, kolika je površina označenog dijela?



Sl. 1.5.

1.2. Dokažite da je za svaki prirodan broj n, broj $n^5 - n$ djeljiv s 30.

1.3. Dokažite da je $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$ za svaki realan broj x.

1.4. U kvadratu površine P nalazi se 2005 figura čiji je zbroj površina veći od $2004P$. Dokažite da postoji barem jedna točka zajednička svim figurama.

2. razred

2.1. Dani su kompleksni brojevi $z = \dfrac{2t - i}{t + i}$ za $t \in \mathbf{R}$.

a) Koje sve vrijednosti može poprimiti $|z|$?

b) Odredite skup parametara t za koje vrijedi

$$|3\,\mathrm{Re}\,z + \mathrm{Im}\,z| < 3.$$

2.2. Nađite sve realne brojeve x, y koji zadovoljavaju jednadžbu

$$(x^2 + y^2 - 4)^2(xy - 1)^2 + \sqrt{y^2 - x^2} = 0.$$

2.3. U jednakokračnom trokutu jedakn kut iznosi 108°. Dokažite da je omjer duljinâ osnovice i kraka tog trokuta jednak $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

2.4. Nađite koeficijente a i b takve da polinom $ax^5 + bx^4 + 1$ bude djeljiv s $x^2 - x - 1$.

3. razred

3.1. Ako je $\log_a b = 10$, izračunajte $\dfrac{\log_a x \cdot \log_x \dfrac{b}{a}}{\log_x b \cdot \log_{ab} x}$.

3.2. Za koje vrijednosti parametra α je nejednakost

$$\sin^6 x + \cos^6 x + \alpha \sin x \cdot \cos x \geq 0$$

zadovoljena za sve realne brojeve x ?

3.3. U trokutu ABC poznati su kutovi $\sphericalangle ABC = 75^\circ$ i $\sphericalangle BCA = 45^\circ$. Ako je P točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $|BP| = 2|PC|$, izračunajte kut $\sphericalangle APB$.

3.4. U raznostraničnom šiljastokutnom trokutu ABC povučene su težišnica $\overline{CT}$ i visina $\overline{CH}$ na stranicu $\overline{AB}$ (točke T i H leže na stranici $\overline{AB}$). Ako su kutovi $\sphericalangle ACT$ i $\sphericalangle HCB$ jednaki, dokažite da je trokut pravokutan.

4. razred

4.1. Na elipsi sa središtem O nalaze se točke A i B takve da je $\sphericalangle AOB = 90^\circ$. Dokažite da udaljenost točke O od pravca AB ovisi samo o duljinama poluosi elipse.

4.2. Ako su u trokutu duljine stranica a, b, c tri uzastopna člana aritmetičkog niza (u tom poretku), dokažite da za njegove kutove (α je kut nasuprot stranice a, γ nasuprot stranice c) vrijedi:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{3}.$$

4.3. Zadan je rastav skupa prirodnih brojeva:

$$\mathbf{N}=\{1\}\cup\{2,3\}\cup\{4,5,6\}\cup\{7,8,9,10\}\cup\{11,12,13,14,15\}\cup\ldots$$

Ako je S_k zbroj svih k brojeva u k-tom skupu iz gornjeg rastava, dokažite da vrijedi

$$S_1+S_3+S_5+\ldots+S_{2n-1}=n^4$$

za svaki prirodni broj n.

4.4. Na krivulji s jednadžbom $y=x^4-2x^2$ nalaze se 4 različite točke $T_k=(x_k,y_k)$, $k=1,2,3,4$. Ako točke T_1, T_2, T_3, T_4 leže na jednom pravcu, dokažite da je $x_1+x_2+x_3+x_4=0$.

Rješenja

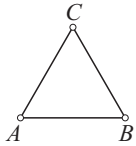
Osnovna škola

4.1. a) $67\cdot(645+119)+67\cdot(321-47)=67\cdot(764+274)=67\cdot 1038=69546$.

b) $2005\cdot 999-999\cdot 1993=999\cdot(2005-1993)=999\cdot 12=11988$.

4.2. a) $O=3\cdot a$, $21=3\cdot a$, $a=21:3$, $a=7$ cm.

b)



Sl. 1.6.

c) $O=a+2b$, $21=a+2\cdot 8$, $21=a+16$, $a=5$ cm.

4.3. Kako Ivica i Vlado imaju 117 godina i Vlado i Josip imaju 96 godina, to znači da Ivica ima 21 godinu više od Josipa.

Budući da Ivica i Josip imaju zajedno 105 godina, a Ivica ima 21 godinu više od Josipa, slijedi da Josip ima $(105-21):2=42$ godine.

Ivica ima $42+21=63$ godine.

Vlado ima $117 - 63 = 54$ godine.

4.4. Trokuti su ABE, ACE, ADE, BCE, BDE, CDE, FGE, FHE, GHE. Trokuta ima 9.

4.5. Ako duljinu najmanje stranice označimo s a, tada su duljine ostalih stranica $a+1$ i $a+2$.

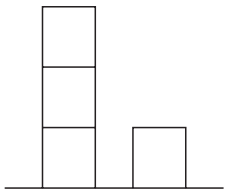
Njihov je zbroj $3 \cdot a + 3$, tj. $O = 3 \cdot a + 3$. $183 = 3 \cdot a + 3$, $3 \cdot a = 180$, $a = 60$ mm.
Duljine stranica su 60 mm, 61 mm, 62 mm.

* * *

5.1. Broj koji je za 11 veći od 701 je 712.
Ako njemu oduzmemo 8 dobit ćemo umnožak. Dakle, umnožak je 704.
Kad ga podijelimo s 8, dobit ćemo traženi broj, tj. 704:8=88. Traženi broj je 88.

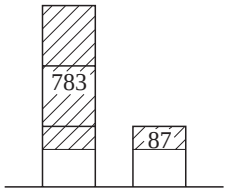
5.2. Ako je broj djeljiv s 18, tada je djeljiv s 2 i s 9.
Iz djeljivosti s 2 slijedi da je b jedna od znamenaka 0, 2, 4, 6 ili 8.
Ako je $b = 0$, tada iz djeljivosti broja s 9 slijedi da je zbroj znamenaka tog broja, a to je $1 + 9 + 8 + a + 8 + 0 = 26 + a$ djeljiv s 9. Dakle, $a = 1$.
Slično se i za ostale mogućnosti za znamenku b zaključi kolika je znamenka a.
Ako je $b = 2$, tada je $a = 8$.
Ako je $b = 4$, tada je $a = 6$.
Ako je $b = 6$, tada je $a = 4$.
Ako je $b = 8$, tada je $a = 2$.
Traženi brojevi su: 198180, 198882, 198684, 198486, 198288.

5.3.



Sl. 1.7.

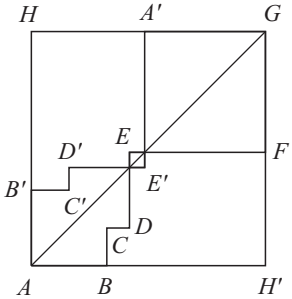
Ako količini mlijeka u manjem spremniku odgovara stupac s jednim pravokutnikom, tada količini mlijeka u većem odgovara stupac s tri takva pravokutnika (slika 1.7).



Sl. 1.8.

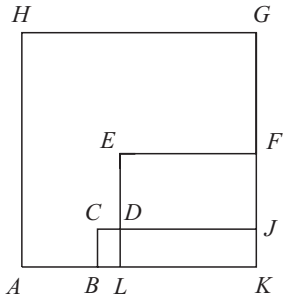
Smanjenjem za 87 litara u manjem spremniku i smanjenjem za 783 litre u većem spremniku dobivamo jednake stupce, tj. 783 odgovara zbroju dvaju pravokutnika i broja 87. Dakle, jednom pravokutniku odgovara količina od $(783 - 87) : 2 = 348$ litara mlijeka (slika 1.8).
U manjem spremniku je bilo 348 litara mlijeka, a u većem 1044 litre mlijeka.

5.4. a) *Slika*



Sl. 1.9.

b) Dopunimo lik $ABCDEFGH$ do kvadrata.



Sl. 1.10.

Tada je $|ED| = |FJ|$, $|BC| = |JK|$, $|EF| = |LK|$, $|CD| = |BL|$.
Dakle, zbroj duljina svih vodoravnih dužina (osim dužine $\overline{HG}$) jednak je duljini dužine $\overline{HG}$. Slično tome, zbroj duljina svih okomitih dužina (osim dužine $\overline{AH}$) jednak je duljini dužine $\overline{AH}$. Tada je $124 = O(ABCDEFGH) = 2|HG| + 2|AH| = 4|AH|$. Dakle, $|AH| = 124 : 4 = 31$ mm.

5.5. Zbroj napišimo ovako: $5 + 10 + 15 + \ldots + 2000 + 2005 = 5(1 + 2 + 3 + \ldots + 400) + 2005 = 5 \cdot 401 \cdot 200 + 2005 = 403005$.

Naravno da se ovaj zbroj može napisati i na neki drugi način koji će također dovesti do točnog rješenja.

* * *

6.1. Vrijednost prvog razlomka je $\frac{2}{3}$.

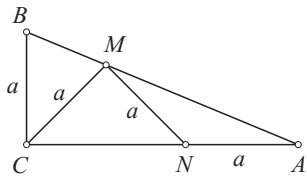
Vrijedi $\frac{2}{3} > \frac{1336}{2005}$.

6.2. Pravac AC je presječnica pravaca AB i CD pa je prema poučku o presječnicama $\sphericalangle CAB = 32^\circ$.
Pravac DB je presječnica pravaca AB i CD pa je prema poučku o presječnicama $\sphericalangle CDE = 81^\circ$. No tada je $\sphericalangle CDB = 180^\circ - 81^\circ = 99^\circ$.
U trokutu CDE zbroj kutova je 180°, pa je $\sphericalangle CED = 180^\circ - \sphericalangle ECD - \sphericalangle CDE = 67^\circ$.

6.3. a) Četvrtina i osmina puta iznosi $\frac{3}{8}$ puta. Znači $\frac{5}{8}$ puta je 250 km, tj. $\frac{1}{8}$ puta je 50 km, a cijeli put iznosi 400 km. (Naravno da se do istog zaključka može doći i postavljanjem odgovarajuće jednadžbe)
b) $\frac{11}{25}$ od 400 km je $\frac{11}{25} \cdot 400 = 176$ km. Do cilja je ostalo $400 - 176 = 224$ km.

6.4. Za dan kad radi prekovremeno, Krešimir dobije $66.60 + \frac{1}{3} \cdot 66.60 = 88.80$ kuna.
Neka je x broj dana kad je radio prekovremeno. Tada je $88.8 \cdot x + 66.6(30 - x) = 2175.6$.
Rješenje te jednadžbe je $x = 8$. Krešimir je radio 8 dana prekovremeno.

6.5. Trokuti ANM, NMC i BCM su jednakokračni, pa je $\alpha = \sphericalangle CAM = \sphericalangle NMA$. $\beta = \sphericalangle CBM = \sphericalangle CMB$, $\sphericalangle MCN = \sphericalangle CNM$.



Sl. 1.11.

Kut $\sphericalangle MNC$ je vanjski kut trokuta AMN, pa je $\sphericalangle MNC = 2\alpha$. Tada je $\sphericalangle MCN = 2\alpha$ i $\sphericalangle CMN = 180^\circ - 4\alpha$.
Tada je $\sphericalangle BMC = 180^\circ - (180^\circ - 4\alpha) - \alpha = 3\alpha$, tj. $\sphericalangle CBM = 3\alpha$.
No, $\sphericalangle CBM = \beta$, pa je $\alpha + 3\alpha = 90^\circ$, odakle je $\alpha = 22.5^\circ$
$\beta = 3\alpha = 67.5^\circ$.

* * *

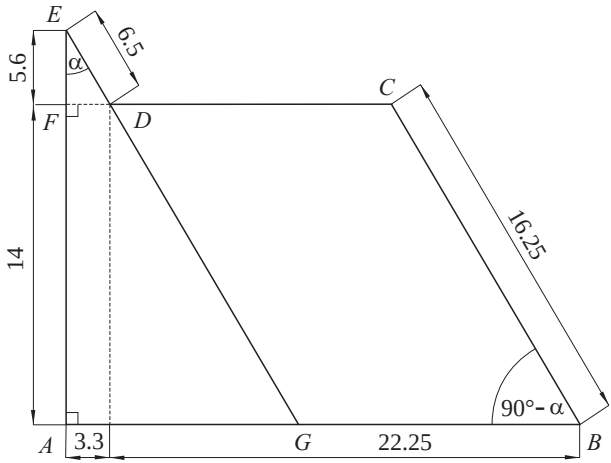
7.1. $\frac{5}{3}x + 3.1 - \left(\frac{x-3}{2} + x + \frac{5}{6}\right) = 4x - 0.7$
$\frac{5}{3}x + \frac{31}{10} - \frac{x-3}{2} - x - \frac{5}{6} = 4x - \frac{7}{10}$
Pomnožimo li sa zajedničkim nazivnikom 30 dobivamo
$50x + 93 - 15x + 45 - 30x - 25 = 120x - 21$.
Rješenje je $x = \frac{134}{115}$.

7.2. Označimo te brojeve s a i b. Tada je $a = 19k$ i $b = 8k$, $a + b = 27k$, $a - b = 11k$.
Vrijedi $27k = 11k \cdot 2 + 20$, pa je $k = 4$.
Tada je $a = 19 \cdot 4 = 76$, $b = 8 \cdot 4 = 32$. To su brojevi 76 i 32.

7.3. 18% od 20 kg je 3.6 kg. Masa sanduka s jabukama smanjila se za 3.6 kg.
Sada vrijedi $20\% \cdot x = 3.6$, pa je $x = 18$ kg. Masa jabuka prije vađenja bila je 18 kg.
Sanduk ima $20 - 18 = 2$ kg.

7.4. Označimo s n broj stranica mnogokuta, te sa x vanjski kut.
Tada vrijedi $(n-2)180^\circ + x = 2005^\circ$.
Tada je $2365 = 180n + x$. Vanjski kut x manji je od 180°. Budući da je n prirodni broj, slijedi da je i x prirodni broj. Tada prethodnu jednakost čitamo ovako: pri dijeljenju broja 2365 s brojem 180 količnik je n, a ostatak je x.
Prema tome, $n = 13$ i $x = 25$. Mnogokut ima 13 stranica.

7.5. Uvedimo oznake kao na slici i produljimo stranicu $\overline{ED}$ do stranice $\overline{AB}$.
Prema poučku o presječnici vrijedi $\sphericalangle EGA = \sphericalangle FDE$, pa je četverokut $GBCD$ paralelogram.



Sl. 1.12.

Trokuti EFD i EAG su slični pa je $\frac{|FD|}{|AG|} = \frac{|EF|}{|EA|}$, odakle dobivamo da je $|AG| = 11.55$ mm.
Površina trokuta EAG je $P = \frac{|AG| \cdot |AE|}{2} = 113.19$ mm^2.
Površina paralelograma $GBCD$ je $P = |GB| \cdot v = (25.55 - 11.55) \cdot 14 = 196$ mm^2.
Površina lika je $113.19 + 196 = 309.19$ mm^2.