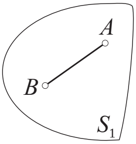
1.

Uvod

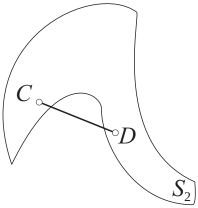
Promatrajmo skupove točaka S_1 i S_2 na sl. 1.1 i sl. 1.2. Ako uzmemo bilo koje dvije točke A i B skupa S_1, vidimo da se i dužina $\overline{AB}$ nalazi u skupu S_1. Naprotiv, u skupu S_2 postoje točke C i D, takve da dužina $\overline{CD}$ ne pripada tom skupu. Zato definiramo:

Ako se za bilo koje dvije točke A i B skupa S i dužina $\overline{AB}$ nalazi unutar skupa S, kažemo da je skup S **konveksan**. Inače je **konkavan**.

Matematičkim simbolima to možemo zapisati ovako: skup S je konveksan ako: $(\forall A)(\forall B)(A,\ B \in S \longrightarrow \overline{AB} \subset S)$.



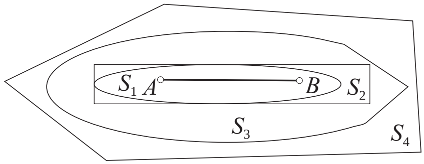
Sl. 1.1.



Sl. 1.2.

Tako su na primjer, trokut, pravokutnik, krug i pravilni šesterokut ravninski, a piramida, kocka i kugla prostorni konveksni skupovi. Pažnja! Krug i kugla jesu, a kružnica i sfera nisu konveksni skupovi. Pravac, ravnina i prostor su također konveksni skupovi.

Očito postoji beskonačno mnogo konveksnih skupova koji sadrže dvije zadane točke A i B. Neka je S_1 konveksan skup koji sadrži točke A i B, a S_2, S_3, $S_4, \ldots$ konveksni skupovi takvi da je $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset S_4 \subset \ldots$, tada se dužina $\overline{AB}$ nalazi u svakom od tih skupova.



Sl. 1.3.

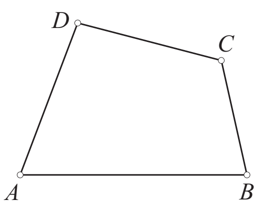
Vidimo da ne postoji najveći konveksan skup koji sadrži dvije zadane točke, ili bolje rečeno: najveći konveksan skup koji sadrži dvije zadane točke jest (cijeli) prostor.

Sada možemo postaviti pitanje: postoji li najmanji konveksan skup koji sadrži dvije zadane točke? Jasno je da je to sama dužina određena tim točkama. Idemo s novim upitom: što je najmanji konveksan skup koji sadrži tri zadane nekolinearne točke A, B i C (to jest točke koje ne pripadaju istom pravcu)?

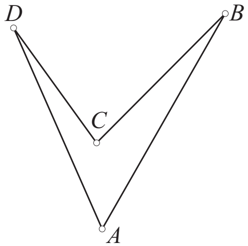
Nije teško zaključiti da je to trokut kojemu su te točke vrhovi, to jest trokut ABC. Zato se trokut može definirati i ovako:

Trokut ABC, to jest trokut kojeg omeđuju dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ je najmanji konveksan skup koji sadrži tri nekolinearne točke A, B i C. Zapamtimo da je svaki trokut konveksan skup.

Promatrajmo u ravnini četiri točke A, B, C i D, od kojih nikoje tri nisu kolinearne i dio ravnine kojeg omeđuju dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$. Taj dio ravnine zovemo **četverokut**.



Sl. 1.4.

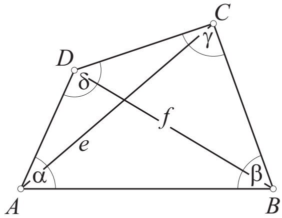


Sl. 1.5.

Četverokut $ABCD$ na sl. 1.4 je konveksan, a onaj na sl. 1.5 je konkavan.

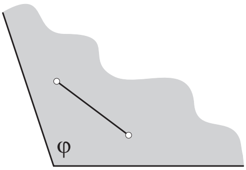
Mi ćemo se ovdje, baviti samo s konveksnim četverokutima. Najprije definirajmo veličine četverokuta. Promatrajmo četverokut $ABCD$ na sl. 1.6. Točke A, B, C i D su vrhovi, a dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ stranice četverokuta. Duljine stranica označavat ćemo: $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$. Kutovi $\sphericalangle DAB=\alpha$, $\sphericalangle ABC=\beta$, $\sphericalangle BCD=\gamma$, $\sphericalangle CDA=\delta$

su unutarnji kutovi četverokuta. Duljine dijagonala označavat ćemo $e = |AC|$, $f = |BD|$. Zbroj duljina stranica četverokuta jest njegov opseg, kojeg ćemo označavati $2p$, tj. $a+b+c+d = 2p$. Do pojma konveksnog četverokuta mogli smo doći i pomoću unutarnjih kutova četverokuta.

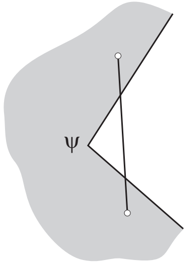


Sl. 1.6.

Neka su (sl. 1.7 i 1.8) kutovi φ i ψ takvi da je $\varphi \leqslant 180^\circ$, $\psi > 180^\circ$. Promatramo li te kutove kao skupove točaka, vidimo da je φ konveksan, a ψ konkavan skup.
Vrijedi: ako je $0 \leqslant \varphi \geqslant 180^\circ$, $180 < \psi < 360^\circ$, tada je φ konveksan, a ψ konkavan skup. Zato možemo kazati da je četverokut konveksan ako su mu svi unutarnji kutovi konveksni. Ili, što je isto, četverokut je konveksan ako mu je mjera svakog unutarnjeg kuta manja od 180°. (Unutarnji kut četverokuta ne može biti jednak 180°, jer bi tada četverokut degenerirao u trokut.)



Sl. 1.7.



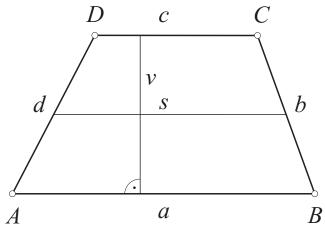
Sl. 1.8.

2.

Podjela četverokuta

Trapez

Četverokut kojemu su dvije stranice usporedne zove se trapez. Na sl. 2.1 nacrtan je četverokut $ABCD$ u kojemu je $\overline{AB} \| \overline{CD}$, pa je taj četverokut trapez. Usporedne stranice su osnovice, a druge dvije su krakovi trapeza. U našem slučaju duljine osnovica su a i c, duljine krakova su b i d. To su najuobičajenije oznake stranica trapeza. Ako su duljine krakova jednake, to jest ako je $b = d$, trapez je jednakokračan. Visina trapeza definira se kao udaljenost njegovih osnovica. Duljinu visine trapeza označavat ćemo v. Spojnica polovišta krakova trapeza je srednjica trapeza, čiju ćemo duljinu označavati S.

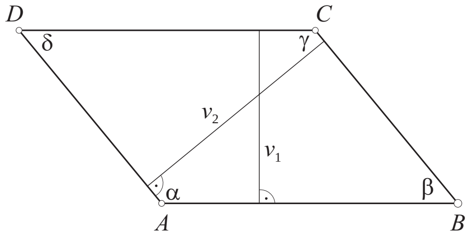


Sl. 2.1.

Paralelogram

Četverokut kojemu su nasuprotne stranice usporedne jest paralelogram. Paralelogram možemo definirati i ovako:
Trapez kojemu su krakovi usporedni jest paralelogram. (Dobro je zapamtiti da je svaki paralelogram trapez. Obratno naravno ne vrijedi.)

Iz definicije paralelograma neposredno slijedi da su duljine nasuprotnih stranica paralelograma jednake, te ih označavamo kao na sl. 2.2.



Sl. 2.2.

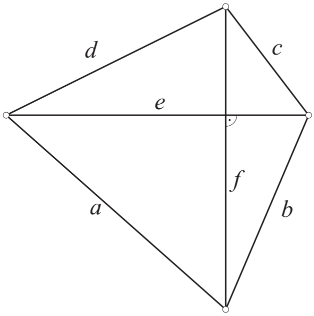
Iz definicije visine trapeza zaključujemo da paralelogram ima dvije visine. To su na sl. 2.2 v_1 i v_2. Također neposredno iz definicije paralelograma slijedi da su nasuprotni kutovi paralelograma jednaki, a susjedni kutovi suplementni. To znači da, uz oznake kao na sl. 2.2, vrijedi:

$$\alpha = \gamma,\ \beta = \delta \ \text{i} \cdot \alpha + \beta = 180^\circ.$$

Paralelogram u kojem je jedan kut pravi (tada je svaki od preostala tri kuta također pravi) zove se **pravokutnik**.
Paralelogram u kojem su duljine dviju susjednih stranica jednake (tada su duljine svih stranica jednake) zove se **romb**.
Paralelogram koji je i pravokutnik i romb je **kvadrat**.

Ortoid

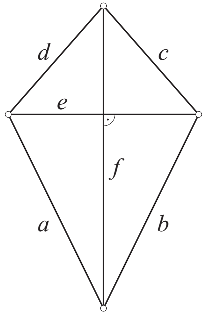
Četverokut čije su dijagonale međusobno okomite zove se ortoid (sl. 2.3).



Sl. 2.3.

Deltoid

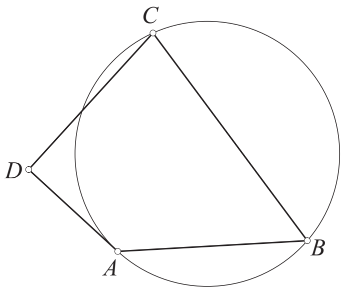
Ortoid kojemu su duljine dviju susjednih stranica jednake (što povlači jednakost duljina i drugih dviju stranica) zove se deltoid.



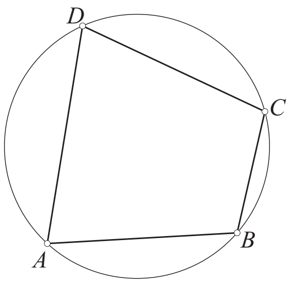
Sl. 2.4.

Tetivan četverokut

Poznato je da se svakom trokutu može opisati kružnica. Odavde odmah zaključujemo da se svakom četverokutu **ne može** opisati kružnica. Promatrajmo bilo koji četverokut $ABCD$ i kružnicu k opisanu trokutu ABC (sl. 2.5). Očito je da vrh D ne mora biti na kružnici k, što znači da se svakom četverokutu ne može opisati kružnica. Na primjer, rombu koji nije kvadrat, ne može se opisati kružnica.



Sl. 2.5.

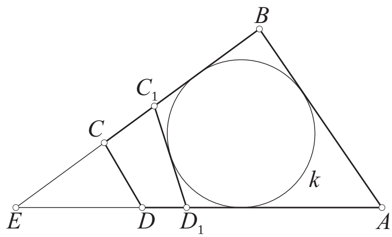


Sl. 2.6.

Može se ipak dogoditi da točka D bude na kružnici opisanoj trokutu ABC, tada se četverokutu $ABCD$ može opisati kružnica. Na primjer, ako je četverokut pravokutnik. Četverokut kojemu se može opisati kružnica zove se **tetivan četverokut** (sl. 2.6). Naziv je uzet stoga što su tada stranice četverokuta **tetive** iste kružnice.

Tangencijalan četverokut

Kao što se svakom četverokutu ne može opisati kružnica, isto se tako svakom četverokutu ne može upisati kružnica.
Promatrajmo četverokut $ABCD$. Neka se pravci BC i AD sijeku u točki E i neka je k kružnica upisana trokutu ABE (sl. 2.7). Stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{DA}$ diraju kružnicu k, dok je stranica $\overline{CD}$ ne mora dirati (dakle općenito ne dira) kružnicu k. Zaključujemo da se svakom četverokutu ne može upisati kružnica. Na primjer, pravokutniku koji nije kvadrat ne može se upisati kružnica.



Sl. 2.7.

Isto tako (sl. 2.7) vidimo da postoji četverokut ABC_1D_1 kojemu se može upisati kružnica. Na primjer, rombu se može upisati kružnica. Takav četverokut se zove tangencijalan, jer su pravci stranica toga četverokuta tangente iste kružnice.

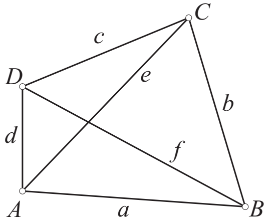
3.

Poučci, formule i primjeri

3.1. Odnos stranica i kutova četverokuta

P1. *Poučak o odnosu stranica četverokuta:*
Duljina jedne stranice četverokuta je manja od zbroja duljina ostalih triju stranica četverokuta. Razlika duljina dviju stranica četverokuta je manja od zbroja duljina dviju inih stranica.

Dokaz. Primjenom nejednakosti trokuta, uz oznake kao na sl. 3.1, vrijedi: $a < b + e$, $e < c + d$, a odatle $a < b + c + d$. Iz posljednje nejednakosti neposredno slijedi: $a - b < c + d$. Na isti se način mogu dokazati i druge permutacije dokazane nejednakosti.



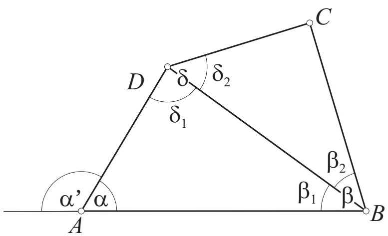
Sl. 3.1.

P2. *Poučak o zbroju unutarnjih kutova četverokuta:*
Zbroj unutarnjih kutova četverokuta je $360°$ *.*

Dokaz. Dijagonala $\overline{BD}$ četverokuta $ABCD$ dijeli kutove $\measuredangle ABC$ i $\measuredangle CDA$ na dva dijela, tako da je, uz oznake na sl. 3.2, $\beta = \beta_1 + \beta_2$ i $\delta = \delta_1 + \delta_2$. Za zbrojeve unutarnjih kutova trokuta ABC i BCD vrijedi: $\alpha + \beta_1 + \delta_1 = 180°$, $\gamma + \beta_2 + \delta_2 = 180°$.

Zbroj unutarnjih kutova četverokuta $ABCD$ je

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma+\delta &= \alpha+\beta_1+\beta_2+\gamma+\delta_1+\delta_2\\ &= (\alpha+\beta_1+\delta_1)+(\gamma+\beta_2+\delta_2)\\ &= 180^\circ+180^\circ = 360^\circ.\end{aligned}$$



Sl. 3.2.

P3. *Poučak o zbroju vanjskih kutova četverokuta:*
Zbroj vanjskih kutova četverokuta je 360° *.*

Dokaz. Vanjski kut određena vrha četverokuta definiramo kao kut što ga određuje jedna stranica, kojoj je to jedan vrh, s produžetkom druge stranice preko toga vrha. Na sl. 3.2 vanjski kut četverokuta $ABCD$ pri vrhu A je označen oznakom α'. Očito vrijedi $\alpha'+\alpha=180^\circ$. Isto je tako za ostale kutove: $\beta+\beta'=\gamma+\gamma'=\delta+\delta'=180^\circ$. Zato je zbroj vanjskih kutova četverokuta

$$\begin{aligned}\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta' &= 180^\circ-\alpha+180^\circ-\beta+180^\circ-\gamma+180^\circ-\delta\\ &= 4\cdot180^\circ-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=720^\circ-360^\circ=360^\circ,\end{aligned}$$

čime je tvrdnja poučka dokazana.
Podsjetimo se da je zbroj vanjskih kutova trokuta također jednak 360°. Zanimljivo je da je zbroj vanjskih kutova bilo kojega konveksnog višekuta jednak 360°, što se može dokazati slično kao i za četverokut.

P4. *Poučak o odnosu duljine dijagonale i opsega četverokuta:*
Duljina jedne dijagonale četverokuta manja je od poluopsega četverokuta.

Dokaz. Iz trokuta ABC (sl. 3.1) imamo $e<a+b$, a iz trokuta ACD $e<c+d$. Zbrajanjem ovih nejednakosti, dobijemo: $2e<a+b+c+d=2p$, tj. $e<p$. Na isti se način dobije $f<p$, odakle dobijemo $e+f<2p$, što je tvrdnja poučka.