1.

Problemi s brojevima, jednadžbama i nejednadžbama

1. Vježbanje tablice množenja

Zadan je niz brojeva na sljedeći način:
prvi član niza je 2, drugi član je 3;

$$2 \cdot 3 = 6,$$

pa je treći član niza 6;

$$3 \cdot 6 = 18,$$

odakle slijedi da je četvrti član 1, a peti 8;

$$6 \cdot 1 = 6, \qquad 1 \cdot 8 = 8,$$

odakle je šesti član 6, pa slijedi 8, itd.
Evo niza kojeg smo dobili:

$$2 \smile 3 \smile 6 \smile 1 \smile 8 \quad 6 \quad 8 \ldots$$

Lukovi ispod brojeva naznačuju izvedeno množenje, čiji se rezultat zapisuje na kraju niza. Tako u nastavku treba pomnožiti 8 i 6, a rezultat množenja, odnosno znamenke 4 i 8, zapisati kao sljedeće u nizu. Brojeva za množenje nikada neće nedostajati jer se svakim množenjem broj lukova poveća za jedan, a rezultat će dati najmanje jednu, a najčešće dvije nove znamenke.

Dokaži da se znamenke 5, 7 i 9 nikada ne pojavljuju u zadanom nizu.

2. Zanimljivo svojstvo brojeva

Zapišimo proizvoljan prirodni broj (na primjer 2583), a zatim zbrojimo kvadrate njegovih znamenaka ($2^2+5^2+8^2+3^2 = 102$). Isti postupak primijenimo na znamenke dobivenog zbroja ($1^2+0^2+2^2 = 5$), te nastavimo na isti način ($5^2 = 25$, $2^2+5^2 = 29$, $2^2+9^2 = 85$,...). Dokaži da postupak, ukoliko ne dovede do broja 1 (u tom slučaju se broj 1 ponavlja u nedogled), mora doći do broja 145, a tada se stalno ponavlja sljedeći niz:

$$145,\ 42,\ 20,\ 4,\ 16,\ 37,\ 58,\ 89.$$

3. Dijeljenje s 11

Dokaži da je broj

$$5^{5k+1} + 4^{5k+2} + 3^{5k}$$

djeljiv s 11 za svaki prirodni broj k.

4. Djeljivost brojeva

Broj

$$3^{105} + 4^{105}$$

djeljiv je s 13, 49, 181 i 379, a nije djeljiv ni s 5 niti s 11.
Kako se taj rezultat može provjeriti?

5. Pojednostavljeni oblik Fermatova teorema

Ako su x, y, z i n prirodni brojevi i $n \geqslant z$, onda relacija $x^n+y^n = z^n$ ne vrijedi.

6. Raspodjela brojeva

Pronađi deset brojeva x_1, x_2,... x_{10} takvih da vrijedi:

(i) broj x_1 nalazi se u zatvorenom intervalu $[0,1]$;
(ii) brojevi x_1 i x_2 leže u različitim polovinama intervala $[0,1]$;
(iii) brojevi x_1, x_2 i x_3 leže u različitim trećinama intervala $[0,1]$;
(iv) brojevi x_1, x_2, x_3 i x_4 leže u različitim četvrtinama intervala $[0,1]$, itd. i konačno,
(v) brojevi x_1, x_2,..., x_{10} leže u različitim desetinama zatvorenog intervala $[0,1]$.

7. Poopćenje

Je li prethodni problem rješiv ako treba umjesto 10 brojeva s 10 uvjeta pronaći n brojeva s n uvjeta, gdje je n bilo koji prirodan broj?

8. Razmjeri

Neka su A, B, C, p, q i r brojevi međusobno povezani sljedećim relacijama:

$$A : B = p, \qquad B : C = q, \qquad C : A = r.$$

Napiši razmjer

$$A : B : C = \square : \square : \square$$

tako da u praznim kvadratićima stoje izrazi s p, q i r koji se mogu dobiti jedni iz drugih cikličkom permutacijom brojeva p, q i r. (Pod tim se misli sljedeće: ako umjesto p napišemo q, umjesto q napišemo r i umjesto r napišemo p, onda će izraz u prvom kvadratiću postati drugi, drugi će postati treći, a treći izraz će postati prvi.)

9. Iracionalnost korijena

Dokaži da je pozitivno rješenje jednadžbe

$$x^5 + x = 10$$

iracionalan broj.

10. Nejednakost

Dokaži nejednakost

$$\frac{A+a+B+b}{A+a+B+b+C+r} + \frac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+r} > \frac{C+c+A+a}{C+c+A+b+r},$$

u kojoj sva slova označavaju pozitivne brojeve.

11. Niz brojeva

Pronađi niz a_0, a_1, $a_2, \ldots$ pozitivnih brojeva takvih da je $a_0 = 1$ i $a_n - a_{n+1} = a_{n+2}$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$. Dokaži da postoji samo jedan takav niz.

2.

Problemi s točkama, poligonima, kružnicama i elipsama

12. Točke u ravnini

Promatraj nekoliko točaka koje leže u ravnini. Svaku točku ravnom crtom spoji s najbližom točkom. Pretpostavimo da su sve udaljenosti međusobno različite, pa se točno zna koja je točka najbliža. Dokaži da na dobivenom crtežu nema zatvorenih poligona, niti se dužine sijeku.

13. Ispitivanje kuta

Neka su x_1, x_2,... x_n pozitivni brojevi. Izaberimo u ravnini zraku OX i na nju ucrtamo dužinu $\overline{OP_1}$ duljine x_1. Zatim nacrtamo dužinu $\overline{P_1P_2}$ okomitu na pravac OP_1 i duljine x_2, pa dužinu $\overline{P_2P_3}$ okomitu na pravac OP_2 i duljine x_3. Nastavimo na taj način sve do dužine $\overline{P_{n-1}P_n}$, $|P_{n-1}P_n| = x_n$. Pravi kutovi su okrenuti tako da njihov lijevi krak prolazi kroz O. Možemo reći da zraka OX rotira oko točke O od početnog položaja, kroz točke P_1, $P_2, \ldots$ sve do krajnje pozicije OP_n i pritom opiše određeni kut.

Dokaži da je za zadane brojeve x_i taj kut najmanji ako brojevi x_i redom padaju (tj. $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$), a najveći ako brojevi redom rastu (tj. $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$).

14. Površina trokuta

Bez pomoći trigonometrije dokaži da je površina trokuta kojemu je kut $\alpha = 60^\circ$ dana formulom

$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}[a^2 - (b-c)^2], \tag{1}$$

a ako je $\alpha = 120^\circ$, tada je

$$P = \frac{\sqrt{3}}{12}[a^2 - (b-c)^2]. \tag{2}$$

15. Trostruko raspolavljanje opsega trokuta

Promotrimo proizvoljan trokut. Taj trokut možemo presjeći pravcem tako da raspolovimo njegov opseg. Možemo čak zadati smjer tog pravca. Ponovimo li tu operaciju dvaput, koristeći dva različita smjera, pravci će se sjeći u određenoj točki Q. Dakle, dva pravca koja raspolavljaju opseg trokuta prolaze točkom Q.
Postoji li točka kroz koju prolaze tri takva pravca? Ako postoji, kako je možemo pronaći?

16. Dijeljenje trokuta

Podijeli trokut na 19 trokuta tako da se u svakom vrhu novog trokuta (i u vrhovima polaznog trokuta) uvijek sastaje isti broj stranica.
U ovom problemu se broj 19 ne može zamijeniti većim brojem, ali se može zamijeniti nekim manjima. Kojima?

17. Trokuti

U ovom problemu n označava prirodan broj. U ravnini imamo $3n$ točaka, od kojih nikoje tri ne leže na istom pravcu. Možemo li od tih točaka — uzevši ih kao vrhove — načiniti n trokuta koji se ne preklapaju niti sadrže jedni druge?
Sličan problem može se postaviti s $4n$ točaka za četverokute i s $5n$ točaka za peterokute, itd. Jesu li svi sigurno rješivi?

18. Trokutasta mreža (1)

Dobro je poznato kako cijelu ravninu možemo prekriti mrežom jednakostraničnih trokuta.

Je li moguće uz svaki čvor mreže upisati jednu od oznaka plus ili minus tako da za svaki trokut bude ispunjen sljedeći uvjet: ako dva vrha trokuta imaju istu oznaku, onda treći vrh ima oznaku plus, a ako su dvije oznake različite, onda je treća minus?
Očito je da se svuda mogu staviti oznake plus, ali to trivijalno rješenje isključujemo.

19. Trokutasta mreža (2)

Dokaži da je nemoguće cijelu ravninu prekriti mrežom trokuta tako da se u svakom čvoru mreže sastaje pet trokuta.

20. Što je ostalo od pravokutnika?

Zlatni pravokutnik je pravokutnik čije duljine stranica zadovoljavaju zlatni omjer, tj. za koje vrijedi:

$$a : b = b : (a - b).$$

Zamislimo da je pravokutnik izrezan iz lista papira i položen na stol s duljom stranicom okrenutom prema nama. S lijeve strane pravokutnika izrežemo najveći mogući kvadrat — preostaje nam pravokutnik koji je opet zlatni pravokutnik. Stanemo s lijeve strane stola tako da ponovo ispred nas bude dulja stranica pravokutnika i učinimo isto s tim novim pravokutnikom. Ponavljamo postupak obilazeći oko stola u smjeru kazaljke na satu i izrezujemo redom kvadrate. Prije ili kasnije bit će izrezana svaka točka pravokutnika osim jedne. Pronađi gdje se nalazi ta točka.

21. Dijeljenje kvadrata

Podijelimo kvadrat površine $1\ \mathrm{km}^2$ na tri dijela, A, B i C. Kakva god ta podjela bila, uvijek postoji barem jedan par točaka P i Q takav da obje točke pripadaju istom dijelu, i da je njihova udaljenost $d(P, Q)$ veća od $1.00778\ \mathrm{km}$.
Kako to možemo dokazati?

22. Kvadratna mreža

Cijelu ravninu možemo prekriti mrežom sukladnih kvadrata. Čvorove te mreže matematičari nazivaju *rešetkom cijelih brojeva*. Je li moguće te čvorove označiti slovima a, b, c i d tako da svaki kvadrat ima sva četiri slova kao vrhove te da se sva četiri slova nalaze u svakom retku i stupcu rešetke?

23. Čvorovi rešetke

Pogledajte definiciju rešetke u problemu 22. Dokažite da kružnica sa središtem u čvoru $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, uz odgovarajući izbor polumjera može prolaziti kroz svaki čvor rešetke, ali ne postoji kružnica s istim središtem koja bi prolazila istovremeno kroz dva ili više čvorova rešetke.

24. Čvorovi rešetke unutar kružnice

U ovom problemu pozabavit ćemo se čvorovima rešetke unutar kružnice K, tj. čvorovima ograđenim kružnicom K. Ne uključujemo čvorove rešetke koji leže na samoj kružnici.
Dokaži da postoje krugovi koji zatvaraju nula čvorova rešetke, jedan čvor rešetke, dva čvora rešetke, itd. Svakom broju n (prirodnom ili nuli) može se pridružiti kružnica koja zatvara točno n čvorova rešetke.

25. 14 = 15

Za vrijeme susreta sudionika Matematičke olimpijade u Wrocławu 1952. godine, dr. J. Mikusiński prikazao je podjelu ravnine na sedmerokute na način da se u svakom vrhu sastaju točno tri sedmerokuta. Na osnovi toga dokazat ćemo da je $14 = 15$.
Označimo s P kut od 180°. Zbroj kutova u sedmerokutu iznosi $5P$; slijedi da veličina svakog kuta u sedmerokutu u prosjeku iznosi $\frac{5P}{7}$. Kako je cijela ravnina prekrivena sedmerokutima, znači da je prosječna veličina svakog kuta u tom mozaiku jednaka $\frac{5P}{7}$. No, u svakom vrhu sastaju se tri takva kuta, pa proizlazi da je veličina kuta u svakom vrhu u prosjeku jednaka $\frac{2P}{3}$. Iz toga slijedi da je prosječna veličina svakog kuta u mozaiku jednaka $\frac{2P}{3}$, jer svaki kut pripada određenom vrhu. Tako je $\frac{2P}{3} = \frac{5P}{7}$, $\frac{2}{3} = \frac{5}{7}$, $14 = 15$, što je i trebalo dokazati.
Pronađi grešku u gornjem dokazu.

26. Poligon

U ravnini leži n točaka od kojih nikoje tri ne leže na istome pravcu. Je li uvijek moguće odrediti zatvoreni poligon kojemu se stranice ne sijeku i kojemu su vrhovi n zadanih točaka?

27. Točke i kružnica

U ravnini se nalaze 4 točke koje ne leže na istoj kružnici niti na istom pravcu. Je li uvijek moguće označiti zadane točke s A, B, C i D tako da točke A, B i C leže na kružnici, a da se točka D nalazi unutar nje.

28. Geometrijski problem

Dana je elipsa s glavnom osi duljine $2a$ i sporednom duljine $2b$. Nacrtaj zatvorenu krivulju jednake duljine, tako da ona zatvara površinu veću od površine elipse za $(a-b)^2$.

3.

Problemi s prostorom, poliedrima i sferama

29. Podjela prostora

Kroz zadanu točku u prostoru povlačimo ravnine tako da ga one dijele na najveći mogući broj dijelova. Jedna ravnina dijeli prostor na dva dijela, dvije ukrštene ravnine dijele ga na četiri dijela, a tri ravnine koje se sijeku u zadanoj točki i nemaju drugih zajedničkih točaka, dijele ga na osam dijelova. Na koliko dijelova prostor dijele četiri ravnine? Koliko dijelova se dobije za n ravnina?

30. Dvije projekcije

Zamislimo ravninu Π_1 koja dodiruje zemaljsku kuglu u Sjevernom polu N, i ravninu Π_2 koja dodiruje zemaljsku kuglu u Južnom polu S. U ravnini Π_2 možemo nacrtati kartu tako da svaku točku na površini zemaljske kugle projiciramo centralnom projekcijom iz točke N na ravninu Π_2. Također, možemo nacrtati drugu kartu projekcijom svake točke na površini iz točke S na ravninu Π_1. Ovo su tzv. *stereografske projekcije*. Sada dvije ravnine možemo položiti jednu na drugu tako da se meridijani poklapaju. Svaki grad s prve karte pojavljuje se i na drugoj karti. Na ovaj smo način definirali određenu transformaciju, preslikavanje ravnine u samu sebe. Kako to preslikavanje možemo izravno definirati?

31. Kocka

Držite li u ruci model kocke tako da može rotirati oko najdulje osi (tj. oko pravca koji spaja dva međusobno najudaljenija vrha), možete oko nje pažljivo namotati crni konac. Konac će prekriti samo polovinu površine kocke (zašto?). Isto se može napraviti i oko ostalih osi; ima ih ukupno četiri, a svaki put uzmite konac drukčije boje (crni, crveni, plavi i žuti). Cijela će kocka biti prekrivena bojama koje se preklapaju te time stvaraju miješane nijanse (recimo da je model kocke bijele boje, koju ne razmatramo). Koliko ćemo različitih nijansa dobiti i koje?

32. Najkraći put po površini

Ovaj problem ne traži puno matematike. Nategnimo elastičnu gumicu (onakvu kakva se koristi u kućanstvu) preko glatke nesavitljive kocke tako da čvrsto stoji na kocki i da se ne presijeca. Liniju koju čini gumica oko kocke zovemo najkraći put po površini kocke. Iscrtajmo na modelu sve takve linije.

1. Koliko će puta te linije prekriti površinu kocke (tj. koliko najkraćih putova prolazi svakom točkom plašta)?
2. Koliko različitih familija najkraćih putova ima svojstvo da prekrivaju cijeli plašt kocke?

33. Gibanje čestice

Unutar kutije oblika kocke kreće se čestica tvari oslobođena utjecaja vanjskih sila; odbija se od stijenki kutije prema klasičnim zakonima (kut refleksije jednak je kutu upada, i okomica na stijenku u točki refleksije simetrala je kuta koji zatvara put čestice). Je li moguće da se takva čestica neprekidno kreće oko zatvorenog šesterokuta, udarajući na tom putu sve stijenke kutije naizmjenično? Odredite točke refleksije i utvrdite je li ovaj šesterokut zapetljan.

34. Mreže kocke

Modeli poliedara napravljeni su od plošnih mreža nacrtanih na kartonu. Na tim su mrežama stranice modela obično jedna do druge, a model se sastavlja svijanjem kartona po stranicama mreže. Pravilan tetraedar može imati dvije različite mreže. Koliko ih može imati kocka?

35. Kocke

Poznato je da cijeli prostor možemo ispuniti kockama, slažući jednu do druge. U svakom se vrhu spaja točno osam kocki. Odrežemo li krajeve tih kocki na odgovarajući način i slijepimo li osam odrezanih dijelova u jedan tako da dobijemo pravilan oktaedar, možemo reći da smo prostor ispunili pravilnim oktaedrima i geometrijskim tijelima – ostacima originalnih kocki nakon rezanja. Kakvog će oblika biti ta tijela?
Povećamo li oktaedre najviše što možemo, koliki će dio prostora oni zauzeti? Kolika će biti veličina preostalih geometrijskih tijela? I koliko će se tijela spajati u svakom vrhu?

36. Heksaedar

Postoji li heksaedar kojeg zatvaraju sukladni rombovi ali nije kocka u uobičajenom smislu riječi?

37. Tetraedar

Imamo šest štapova različitih duljina, koji su takvi da u bilo kojoj permutaciji mogu tvoriti bridove tetraedra. Koliko tetraedara možemo sastaviti tim štapovima?

38. Tetraedar sa sukladnim stranama

Je li moguće konstruirati tetraedar čije su strane međusobno sukladni trokuti sa stranicama proizvoljnih duljina a, b i c? Ako je to moguće, izračunajte obujam takvog tetraedra.

39. Oktaedar

Je li moguće konstruirati oktaedar čije su strane sukladni četverokuti?
Je li moguće konstruirati dekaedar, i općenito, konstruirati $2n$-edar ($n > 3$) s istim svojstvom?