

# 1.

## Općinsko natjecanje

Općinska i gradska natjecanja održana su u svim gradovima i općinama naše domovine 31. siječnja 2007. Kao što je uobičajeno, zadatke je osmislio Državno povjerenstvo za matematička natjecanja. Učenici osnovnih škola rješavali su svoje zadatke dva sata, a učenici srednjih tri sata.

### Osnovna škola

#### 4. razred

**4.1.** U brojevnom izrazu  $5 \cdot 6 + 12 : 3 - 2$  stavi zagrade tako da vrijednost izraza bude

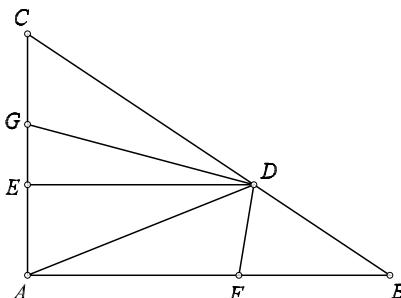
- a) 12,
- b) 28.

**4.2.** S obje strane ceste zasađen je drvoređ breza u jednakim razmacima od 6 m. Kolika je duljina tog drvoređa ako je ukupno posađeno 176 stabala breze?

**4.3.** Tri ribara su zajedno ulovila 176 kg ribe. Kada je prvi prodao 23 kg, drugi 19 kg, a treći 32 kg ostala im je jednaka količina ribe. Koliko je svaki od njih ulovio?

**4.4.** Ivana je za rođendan od svojih prijatelja dobila 24 ruže. Ruže su bile bijele, žute i crvene boje. Bijelih je bilo dva puta manje od žutih, a crvenih koliko bijelih i žutih zajedno. Koliko je bilo bijelih, koliko žutih, a koliko crvenih ruža?

**4.5.** Napiši sve trokute sa slike:



Sl. 1.1.

## 5. razred

**5.1.** Izračunaj:

$$73 + 2 \cdot [11147 - 27 \cdot (45 + 3105 : 9)] - 125 + 25 \cdot (48 - 45 : 3).$$

**5.2.** Napišimo jednog iza drugog, bez razmaka, prirodne brojeve:

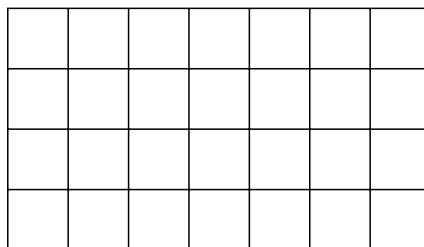
12345678910111213141516171819202122232425 ...

Koja se znamenka nalazi na 2007. mjestu?

**5.3.** Odredi sve četveroznamenkaste brojeve koji pri dijeljenju s 13 daju ostatak 4, pri dijeljenju s 15 daju ostatak 6 i pri dijeljenju s 18 daju ostatak 9.

**5.4.** Vino u boci стоји 40 kuna. Vino je 7 puta skuplje od boce. Koliko стоји boca, a koliko vino?

**5.5.** Koliko je ukupno pravokutnika na slici?



Sl. 1.2.

## 6. razred

**6.1.** Izračunaj:

$$\left[ \frac{7.5 \cdot 0.028}{\frac{3}{4} - 0.36 : 0.6} - \left( \frac{1}{15} + \frac{3}{8} + 0.725 \right) : 1\frac{1}{6} \right] : \left( 4.5 - 3\frac{4}{7} \right) : \frac{28}{65}$$

**6.2.** Ivan je planirao pročitati knjigu za lektiru za 3 dana. Prvog je dana pročitao  $\frac{1}{3}$  knjige, drugog  $\frac{2}{5}$  knjige i zadovoljno ustvrdio da mu je za treći dan preostalo pročitati 28 stranica manje nego što je pročitao drugog dana. Koliko knjiga ima stranica?

**6.3.** Koliki kut zatvaraju mala i velika kazaljka na satu u 5 sati i 12 minuta?

**6.4.** Neka točke  $A$  i  $B$  pripadaju kružnici  $k$  sa središtem  $S$  i polujmerom  $r$ , te neka je  $|AB| < 2r$ . Simetrala dužine  $\overline{AB}$  siječe ju u točki  $P$ , a kružnicu  $k$  u točkama  $C$  i  $D$ , pri čemu su točke  $C$  i  $S$  s iste strane pravca  $AB$ . Dokaži da je  $|PD| < |PB|$ .

**6.5.** Odredi šiljaste kutove pravokutnog trokuta s pravim kutom pri vrhu  $C$ , ako je kut između visine i simetrale kuta iz vrha  $C$  jednak  $\frac{1}{9}$  tupog kuta kojeg čine simetrale šiljastih kutova.

## 7. razred

**7.1.** Izračunaj

$$\left( \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{4} - 1} \right) : \left( \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} + 2 - \frac{2}{\frac{1}{8} + \frac{1}{4}} \right).$$

**7.2.** Ante i Ivan mogu završiti neki posao, radeći zajedno, za 8 dana. Nakon 2 dana zajedničkog rada razbolio se Ante, a Ivan je dovršio ostatak posla za 9 dana. Za koliko bi dana Ante završio taj posao, a za koliko Ivan, ako bi radili svaki za sebe?

**7.3.** Neposredno nakon žetve, vlažnost pšeničnog zrna iznosila je 16%, a nakon sušenja 12.5%. Kolika je masa suhog pšeničnog zrna ako je prinos žetve iznosio 4.5 tona?

**7.4.** Zadan je trokut  $ABC$ , pri čemu je  $|AC| > |AB|$ . Unutar trokuta je dana točka  $N$  takva da dužina  $\overline{AN}$  raspolavlja kut  $\angle BAC$  i  $\overline{AN} \perp \overline{BN}$ . Ako je  $M$  polovište stranice  $\overline{BC}$ , dokaži da je

$$|MN| = \frac{|AC| - |AB|}{2}.$$

**7.5.** Zadan je paralelogram  $ABCD$  takav da je  $|AB| = 2|BC|$ . Na stranici  $\overline{AB}$  je dana točka  $E$  takva da je  $DE$  simetrala kuta  $\angle CDA$  i  $BD$  je simetrala kuta  $\angle CDE$ . Odredi veličine kutova paralelograma.

### 8. razred

**8.1.** Riješi jednadžbu

$$\left(5x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(4x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(3x - \frac{1}{3}\right)^2.$$

**8.2.** Izračunaj

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}.$$

**8.3.** Na kružnici s polujmom 8 cm istaknuta je tetiva  $\overline{AB}$  takva da je  $|AB| = 12$  cm. U točki  $A$  povučena je tangenta  $t$  na kružnicu, a iz točke  $B$  povučena je tetiva  $\overline{BC}$ , paralelna tangentni  $t$ . Odredi udaljenost između tangente  $t$  i tietive  $\overline{BC}$ .

**8.4.** Dokaži da okomica na dužinu koja spaja nožišta dviju visina šiljastokutnog trokuta, povučena iz polovišta te dužine, dijeli treću stranicu trokuta na dva jednakata dijela.

**8.5.** Odredi površinu trapeza ako je  $|AB| = 11$  cm,  $|BC| = 5$  cm,  $|CD| = 7$  cm i  $|AD| = 3$  cm.

### Srednja škola — A varijanta

#### 1. razred

**1.1.** Skraćivanjem svedi razlomak na najjednostavniji oblik:

$$\frac{bc(c^2 - b^2) + ac(a^2 - c^2) + ab(b^2 - a^2)}{b^2c^2(c - b) + a^2c^2(a - c) + a^2b^2(b - a)}.$$

**1.2.** U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu

$$|x + 2| - 2x = \frac{x + 3}{2}.$$

**1.3.** Neka je  $p$  prost broj veći od 3. Dokaži da njegov kvadrat pri dijeljenju brojem 24 daje ostatak 1.

**1.4.** Postoji li pravokutan trokut kojemu su duljine kateta cijeli brojevi, a duljina hipotenuze  $\sqrt{2006}$ ?

**1.5.** U trokutu  $ABC$  duljine stranica su  $|BC| = 7$ ,  $|AC| = 3$ , a kut pri vrhu  $A$  iznosi  $\alpha = 30^\circ$ . Izračunaj duljinu stranice  $\overline{AB}$ .

## 2. razred

**2.1.** U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu:

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+3} = 3 + \sqrt{x+7}.$$

**2.2.** Ako je  $z + \frac{1}{z} = 1$ , koliko je  $z^{2007} + \frac{1}{z^{2007}}$ ?

**2.3.** Ako su oba rješenja jednadžbe  $2x^2 + mx + 2 - n = 0$  cijeli brojevi različiti od 0, dokaži da je  $\frac{m^2 + n^2}{4}$  složen cijeli broj!

**2.4.** Odredi sve realne parametre  $m$  za koje funkcija

$$f(x) = x^2 + (m+3)x + (m+2)$$

zadovoljava sljedeća dva uvjeta:

a)  $f(x) < 0$  za sve  $x \in (-1, 3)$ ;

b) zbroj recipročnih vrijednosti nultočaka manji je od  $\frac{1}{3}$ .

**2.5.** Neka je  $ABCD$  pravokutnik sa stranicama duljina 20 i 15. Kroz točku  $C$  prolazi kružnica sa središtem u vrhu  $A$  zadanog pravokutnika. Odredi duljinu one tetine kružnice koja sadrži dijagonalu  $\overline{BD}$ .

## 3. razred

**3.1.** Riješi jednadžbu

$$15^{\log_5 x} \cdot x^{\log_5 45x} = 1.$$

**3.2.** Za kutove  $\alpha, \beta, \gamma$  trokuta  $ABC$  vrijedi

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Dokaži da je trokut pravokutan.

**3.3.** Duljine dviju stranica trokuta su  $a$  i  $b$ , njima nasuprotni kutovi su  $\alpha$  i  $\beta$ , a visina na treću stranicu ima duljinu  $v$ .

a) Ako za kutove vrijedi  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  ili  $|\alpha - \beta| = \frac{\pi}{2}$ , dokaži da je

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{v^2}.$$

b) Ako ova jednakost vrijedi za neki trokut, dokaži da za njegove kutove vrijedi  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  ili  $|\alpha - \beta| = \frac{\pi}{2}$ .

**3.4.** Dana je kocka  $ABCDEFGH$  duljine brida  $a$ . Izračunaj oplošje i obujam poliedra  $ABDFGH$ .

**3.5.** Obojana drvena kocka prepiljena je na  $n^3$  ( $n > 2$ ) jednakih kockica. Ako je poznato da je broj kockica, kojima je točno jedna strana obojana, jednak broju kockica kojima niti jedna strana nije obojana, odredi broj  $n$ .

#### 4. razred

**4.1.** Kružnica je upisana u jednakostrostraničan trokut kojem je duljina stranice 6. Pokaži da za svaku točku  $T$  na toj kružnici vrijedi jednakost:

$$|TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2 = 45.$$

**4.2.** Odredi za koju je vrijednost od  $x$  četvrti član razvoja binoma

$$\left( \sqrt{2^{x-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^x}} \right)^m$$

20 puta veći od eksponenta binoma ako je binomni koeficijent četvrtog člana pet puta veći od binomnog koeficijenta drugog člana.

**4.3.** Neka je  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  niz realnih brojeva različitih od nule takav da vrijedi

$$x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1} = 1, \quad \forall n \geq 2.$$

Dokaži da izraz  $\frac{x_{n+1} + x_{n-1}}{x_n}$  poprima istu vrijednost za svaki  $n \geq 2$ .

**4.4.** Dokaži da za svaki prirodni broj  $n$  i nenegativan realan broj  $a$  vrijedi nejednakost

$$n(n+1)a + 2n \geq 4\sqrt{a}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}).$$

**4.5.** Svi sedmeroznamenkasti brojevi sastavljeni od znamenki 1 do 7 (u svakom broju pojavljuje se svaka od tih znamenki) poredani su po veličini počevši od najmanjeg. Na kojem se mjestu nalazi broj 3 654 217?

## Srednja škola — B varijanta

### 1. razred

**1.1.** Dokaži da za međusobno različite realne brojeve  $a$ ,  $b$  i  $c$  vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{2(c-a)(c-b)} + \frac{b-c}{2(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{2(b-a)(b-c)} \\ = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}. \end{aligned}$$

**1.2.** Učenik mora pomnožiti 78 s dvoznamenkastim brojem u kojemu je znamenka desetica tri puta veća od znamenke jedinica. Greškom je zamijenio znamenke jedinice i desetice tog broja i dobio umnožak za 2808 manji od pravog. Koliki je stvarni umnožak?

**1.3.** Brojevi 5777 i 8924 podijeljeni istim prirodnim brojem  $n$  daju redom ostatke 20 i 36. Koji je to broj  $n$ ?

**1.4.** Vidi zadatak 1.2 A varijante.

**1.5.** Vidi zadatak 1.5 A varijante.

### 2. razred

**2.1.** Vidi zadatak 2.1 A varijante.

**2.2.** Ako je  $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$  rješenje jednadžbe  $x^3 - 1 = 0$ , koliko je  $(1 - z + z^2) \cdot (1 + z - z^2)$ ?

**2.3.** U pravokutnom trokutu zbroj kvadrata duljina svih triju stranica iznosi 1682, a opseg trokuta je 70. Izračunaj duljine stranica trokuta.

**2.4.** Za koje vrijednosti realnog parametra  $a$  funkcija

$$f(x) = a^2x^2 + 2(a+3)x + 1$$

ima dvije različite realne nultočke? Za najmanju cijelobrojnu vrijednost takvog parametra  $a$  izračunaj

$$x_1^{-3} - x_1^{-2} + x_2^{-3} - x_2^{-2}$$

( $x_1$  i  $x_2$  su nultočke funkcije  $f$ ).

**2.5.** Duljine stranica trokuta  $ABC$  su  $|AB| = 14$ ,  $|BC| = 15$ ,  $|CA| = 13$ . Na stranici  $\overline{AB}$  uočimo točku  $K$  za koju je  $|AK| = x$ . Izračunaj površinu paralelograma  $AKLM$ , gdje je  $L$  točka na stranici  $\overline{BC}$ , a  $M$  točka na stranici  $\overline{CA}$ . Za koji će  $x$  ta površina biti najveća?

**3. razred**

**3.1.** Vidi zadatak 3.1 A varijante.

**3.2.** Duljine dviju stranica trokuta su  $a$  i  $b$ , njima nasuprotni kutovi su  $\alpha$  i  $\beta$ , a visina na treću stranicu ima duljinu  $v$ . Ako za kute vrijedi  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  ili  $|\alpha - \beta| = \frac{\pi}{2}$ , dokaži da je

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{v^2}.$$

**3.3.** Riješi jednadžbu

$$\log \operatorname{tg} 1^\circ + \log \operatorname{tg} 2^\circ + \log \operatorname{tg} 3^\circ + \dots + \log \operatorname{tg} 89^\circ = \cos 2x.$$

**3.4.** Oko kugle polujmjera  $r$  opisan je stožac polujmjera baze  $R$ . Koliki je njegov obujam?

**3.5.** Postoje li prirodni broj  $n \in \mathbb{N}$  i neparan prirodni broj  $m \in \mathbb{N}$  takvi da vrijedi

$$1 + m + m^2 + \dots + m^{2007} = 3^n?$$

**4. razred**

**4.1.** Zadani su pravci  $y = 0.75x + 6$ ,  $y = 0.75x + 3$  i točka  $T(7, 24)$ . Nađi jednadžbu pravca koji sadrži zadalu točku, a između zadanih pravaca čini odsječak duljine 4.

**4.2.** Dokaži da je za svaki prirodan broj  $n$  broj  $\operatorname{Re}\left((1 + i\sqrt{3})^n\right)$  cijeli broj djeljiv s  $2^{n-1}$ .

**4.3.** Vidi zadatak 4.2 A varijante.

**4.4.** Vidi zadatak 4.4 A varijante.

**4.5.** Nađi sva cjelobrojna rješenja sljedećeg sustava jednadžbi:

$$ab + 5 = c,$$

$$bc + 1 = a,$$

$$ca + 1 = b.$$

## RJEŠENJA

### Osnovna škola

**4.1.** a)  $(5 \cdot 6 + 12) : 3 - 2 = 12$ , b)  $5 \cdot (6 + 12) : 3 - 2 = 28$ .

**4.2.** Sa svake strane ceste posadeno je  $176 : 2 = 88$  stabala. Broj razmaka između susjednih stabala istog reda manji je za 1 od broja stabala tog reda. Dakle, na svakoj strani ceste je  $88 - 1 = 87$  razmaka.

Duljina tog drvoreda jednak je zbroju duljina svih razmaka s jedne strane ceste, odnosno umnošku broja razmaka i duljine razmaka s jedne strane ceste.

Konačno, duljina drvoreda breza je  $87 \cdot 6 = 522$  m.

**4.3.** Ribari su prodali  $23 + 19 + 32 = 74$  kg ribe. Nakon što su prodali taj dio ribe ostalo im je  $146 - 74 = 72$  kg ribe. Kako su nakon te prodaje imali iste količine ribe, svima im je ostalo po  $72 : 3 = 24$  kg ribe. Dakle, prvi ribar je ulovio  $24 + 19 = 43$  kg ribe. Drugi ribar je ulovio  $24 + 23 = 47$  kg ribe. Konačno, treći ribar je ulovio  $24 + 32 = 56$  kg ribe.

**4.4.** Zadatak rješavamo grafički:

Bijele ruže: — Žute ruže: — — Crvene ruže: — — —

Imamo 6 dužina pa jedna dužina iznosi  $24 : 6 = 4$ . Prema tome, bijelih je ruža bilo 4, žutih  $2 \cdot 4 = 8$ , a crvenih  $4 + 8 = 12$ .

**4.5.** Trokuti koji se sastoje od jednog komada su *CGD*, *GED*, *EAD*, *AFD* i *DFB*. Trokuti koji se sastoje od dva komada su *DAB*, *GAD* i *CED*. Trokut koji se sastoji od tri komada je *CAD*. Konačno imamo još trokut *ABC*, dakle 10 trokuta.

\* \* \*

**5.1.** Imamo redom:

$$\begin{aligned} 73 + 2 \cdot [11147 - 27 \cdot (45 + 3105 : 9)] - 125 + 25 \cdot (48 - 45 : 3) \\ = 73 + 2 \cdot [11147 - 27 \cdot (45 + 345)] - 125 + 25 \cdot (48 - 15) \\ = 73 + 2 \cdot [11147 - 27 \cdot 390] - 125 + 25 \cdot 33 \\ = 73 + 2 \cdot 617 - 125 + 825 = 73 + 1234 - 125 + 825 = 2007. \end{aligned}$$

**5.2.** Da bi se napisali svi jednoznamenkasti brojevi potrebno je  $9 \cdot 1 = 9$  znamenki. Da bi se napisali svi dvoznamenkasti brojevi potrebno je  $90 \cdot 2 = 180$  znamenki. Da bi se napisali svi troznamenkasti brojevi potrebno je  $900 \cdot 3 = 2700$  znamenki. Broj u kojem se nalazi tražena znamenka je troznamenkasti jer je  $189 < 2007 < 189 + 2700$ . Za troznamenkaste brojeve, zaključno sa 2007. znamenkom, ostaje  $2007 - 189 = 1818$  znamenki od kojih se može napisati

$1818 : 3 = 606$  troznamenkastih brojeva. Prema tome, tražena znamenka je posljednja znamenka u 606. troznamenkastom broju. Taj 606. troznamenkasti broj je  $9 + 90 + 606 = 705$ , pa je na 2007. mjestu znamenka 5.

**5.3.** Nekaje  $n$  broj s traženim svojstvom. Lako se odredi da je  $V(13, 15, 18) = 1170$ . Kako je  $13 - 4 = 9$ ,  $15 - 6 = 9$  i  $18 - 9 = 9$ , onda je  $n = 1170 \cdot k - 9$ , pri čemu je  $k \in \mathbb{N}$ . Kako je  $n$  četveročlanenkasti broj, slijedi da su traženi brojevi 1161, 2331, 3501, 4671, 5841, 7011, 8181 i 9351.

**5.4.** Zadatak rješavamo grafički:

Boca: \_\_\_\_\_ Vino: \_\_\_\_\_

Imamo 8 dužina pa jedna dužina iznosi  $40 : 8 = 5$  kn. Prema tome, boca stoji 5 kn, a vino  $7 \cdot 5 = 35$  kn.

**5.5.** Pravokutnik je jednoznačno određen dužinom i širinom. Da bismo odredili dužinu pravokutnika, treba odrediti početak i kraj te dužine. Kako horizontalno imamo 8 točaka, dvije možemo odabratи на  $\frac{8-7}{2} = 28$  načina. Rezultat smo dijelili s dva jer su na takav način sve dužine uračunate dvaput.

Analogno, da bismo odredili širinu pravokutnika potrebno je odrediti početak i kraj te dužine. Vertikalno imamo 5 točaka, pa širinu pravokutnika možemo odabratи на  $\frac{5-4}{2} = 10$  načina.

Konačno, svaku dužinu možemo kombinirati sa svakom širinom, pa je ukupan broj pravokutnika jednak  $28 \cdot 10 = 280$ .

\* \* \*

**6.1.** Imamo redom:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{7.5 \cdot 0.028}{\frac{3}{4} - 0.36 : 0.6} - \left( \frac{1}{15} + \frac{3}{8} + 0.725 \right) : 1\frac{1}{6} \right] : \left( 4.5 - 3\frac{4}{7} \right) : \frac{28}{65} \\ &= \left[ \frac{0.21}{0.75 - 0.6} - \left( \frac{53}{120} + \frac{29}{40} \right) : \frac{7}{6} \right] : \left( \frac{9}{2} - \frac{25}{7} \right) : \frac{28}{65} \\ &= \left[ \frac{0.21}{0.15} - \frac{140}{120} : \frac{7}{6} \right] : \frac{13}{14} : \frac{28}{65} = \left[ \frac{7}{5} - 1 \right] : \frac{13}{14} : \frac{28}{65} = \frac{2}{5} \cdot \frac{14}{13} \cdot \frac{65}{28} = 1. \end{aligned}$$

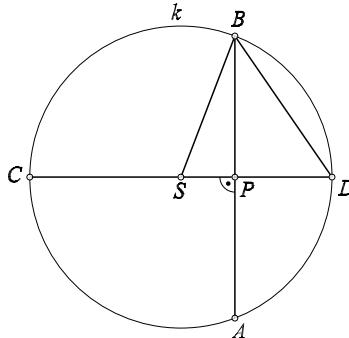
**6.2.** Neka knjiga ima  $x$  stranica. Tada je Ivan prvog dana pročitao  $\frac{1}{3}x$  stranica, drugog  $\frac{2}{5}x$ , a trećeg  $\frac{2}{5}x - 28$  stranica. Prema tome, vrijedi jednadžba  $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}x - 28 = x$ . Odатле je  $\frac{17}{15}x = x + 28$ , tj.  $\frac{2}{15}x = 28$ , odakle je  $x = 210$ .

**6.3.** Velika kazaljka za 60 minuta prijeđe kut od  $360^\circ$ , a za 1 minutu kut od  $360^\circ : 60 = 6^\circ$ . Mala kazaljka za 60 minuta prijeđe kut od  $30^\circ$ , a za jednu minutu  $30^\circ : 60 = 0.5^\circ$ . U 5 sati mala i velika kazaljka zatvaraju kut od  $5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$ . Za 12 minuta velika kazaljka prijeđe kut od  $12 \cdot 6^\circ = 72^\circ$ , a mala  $12 \cdot 0.5^\circ = 6^\circ$ .

Prema tome, u 5 sati i 12 minuta kazaljke će zatvarati kut od  $150^\circ - 72^\circ + 6^\circ = 84^\circ$ .

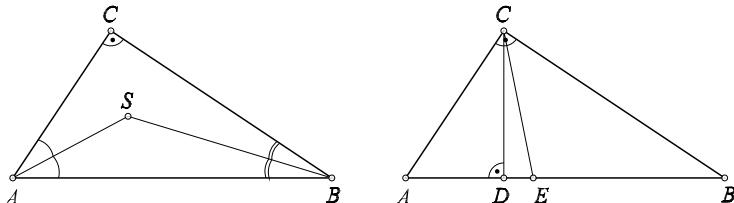
**6.4.** Budući da točke  $B$  i  $D$  pripadaju kružnici  $k$ , slijedi da je  $|BS| = |DS|$ , odnosno trokut  $BSD$  je jednakokračan. To znači da je  $\measuredangle SDB = \measuredangle DBS$ . Kako je

$\hat{A}DBP = \hat{A}DBS - \hat{A}PBS$ , slijedi da je  $\hat{A}DBP < \hat{A}DBS$  odnosno  $\hat{A}DBP < \hat{A}SDB$  pa je  $\hat{A}DBP < \hat{A}PDB$ . Promotrimo sada trokut  $PDB$ . Kako u trokutu nasuprot većeg kuta leži dulja stranica, vrijedi  $|PD| < |PB|$ , čime je tvrdnja dokazana.



Sl. 1.3.

**6.5.** Neka je  $S$  sjecište simetrala šiljastih kutova pravokutnog trokuta. Označimo  $\hat{A}BAC = \alpha$ . Tada je  $\hat{A}SAB = \frac{\alpha}{2}$  i  $\hat{A}ABS = \frac{90^\circ - \alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$ . Kako je zbroj kutova u trokutu jednak  $180^\circ$ , slijedi da je  $\frac{\alpha}{2} + 45^\circ - \frac{\alpha}{2} + \hat{A}ASB = 180^\circ$ , odakle je  $\hat{A}ASB = 135^\circ$ . Neka je  $D$  nožiste visine povučene iz pravog kuta, a  $E$  sjecište simetrale pravog kuta s nasuprotnom stranicom.



Sl. 1.4.

Prema uvjetu zadatka je  $\hat{A}DCE = \frac{135^\circ}{9} = 15^\circ$ . Kako je  $CE$  simetrala pravog kuta slijedi da je  $\hat{A}ACD = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$ . Iz pravokutnog trokuta  $ADC$  slijedi  $\hat{A}BAC = \hat{A}DAC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ , i konačno,  $\hat{A}ABC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .

\* \* \*

**7.1.** Imamo redom:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{4} - 1} \right) : \left( \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} + 2 - \frac{2}{\frac{1}{8} + \frac{1}{4}} \right) \\ &= \left( \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{3}{4}} \right) : \left( \frac{1}{\frac{1}{4}} + 2 - \frac{2}{\frac{3}{8}} \right) \\ &= \left( 3 - \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \right) : \left( 6 - \frac{16}{3} \right) = \left( 3 - \frac{5}{3} \right) : \frac{2}{3} = \frac{4}{3} : \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2. \end{aligned}$$