1.

Općinsko natjecanje

Općinska i gradska natjecanja održana su u gradovima i općinama Hrvatske 29. siječnja 2009. Kao što je uobičajeno, zadatke je osmislilo Državno povjerenstvo za matematička natjecanja. Učenici osnovnih škola rješavali su svoje zadatke dva, a učenici srednjih tri sata.

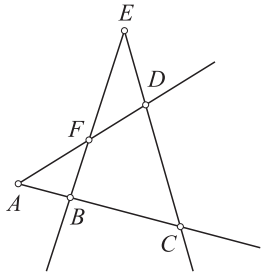
Osnovna škola

4. razred

4.1. Izračunaj $287 \cdot 70 + 2009 - 10 \cdot (2205 - 2025 : 15 - 61)$.

4.2. Četiri ribara, Frane, Ante, Mate i Jure ulovili su zajedno 382 kg ribe. Kada je Frane prodao 8 kg ribe, Ante 25 kg ribe, Mate 36 kg ribe i Jure 45 kg ribe, ostala im je jednaka količina ribe. Koliko je kilograma ribe ulovio svaki ribar?

4.3. Koliko dužina ima na slici? Ispiši ih!



Sl. 1.1.

4.4. Josip je razbio svoju kasicu–prasicu i u njoj su bile 62 kovanice. Od toga su 32 kovanice imale vrijednost od 50 lipa, a ostale su bile u vrijednosti od 2 kune i 5 kuna. Ukupna vrijednost svih kovanica bila je 100 kuna. Koliko je bilo kovanica od 2 kune, a koliko od 5 kuna?

4.5. Ispiši sve četveroznamenkaste brojeve kojima je umnožak znamenki veći od 12 i manji od 16. Koliko ima takvih brojeva?

5. razred

5.1. Izračunaj:

$$48\,536 - 536 : 4 - (473 \cdot 117 - 117 \cdot 73) + 11 \cdot (37 - 0).$$

5.2. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 1000 koji nisu djeljivi ni sa 7 ni s 11?

5.3. Zbroj četiri broja je 2009. Treći broj je dva puta manji od prvog broja, za 6 manji od četvrtog broja i za 2 veći od drugog broja. Koji su to brojevi?

5.4. Zadan je pravokutnik $ABCD$. Duljina $|AB|$ pravokutnika, dva puta je veća od širine $|BC|$. Ako je točka P polovište od $\overline{AB}$, onda dužina $\overline{PC}$ dijeli pravokutnik na četverokut i trokut čiji se opsezi razlikuju za 20 cm. Kolika je površina pravokutnika $ABCD$?

5.5. Izračunaj zbroj svih umnožaka upisanih u tablicu:

$2004 \cdot 2006$	$2004 \cdot 2007$	$2004 \cdot 2008$	$2004 \cdot 2009$
$2005 \cdot 2006$	$2005 \cdot 2007$	$2005 \cdot 2008$	$2005 \cdot 2009$
$2006 \cdot 2006$	$2006 \cdot 2007$	$2006 \cdot 2008$	$2006 \cdot 2009$
$2007 \cdot 2006$	$2007 \cdot 2007$	$2007 \cdot 2008$	$2007 \cdot 2009$
$2008 \cdot 2006$	$2008 \cdot 2007$	$2008 \cdot 2008$	$2008 \cdot 2009$
$2009 \cdot 2006$	$2009 \cdot 2007$	$2009 \cdot 2008$	$2009 \cdot 2009$

6. razred

6.1. Koliko puta je broj a veći od broja b ako je

$$a = \frac{7}{4} : 0.5 + \frac{10}{9} \cdot \left(3\frac{1}{4} + \frac{4}{5}\right) \quad \text{i} \quad b = \frac{2}{5} : \left(1.1 - \frac{3}{4} - 0.5 : 2\right)?$$

6.2. Otac ima pet sinova, pri čemu su svi sinovi različite starosti. Otac ima određenu količinu novca koju želi podijeliti petorici svojih sinova. Najmlađem će dati najmanje novca, a svakom sljedećem starijem po 45 kuna više. Najstariji sin će dobiti 13 puta više kuna nego najmlađi. Koliko će novaca dobiti sin koji je treći po starosti?

6.3. Marija često posjećuje baku. Ponekad ide pješice, a ponekad biciklom. Ako u jednom smjeru ide pješice, a vraća se biciklom, treba joj ukupno $\frac{3}{4}$ sata. Ako u oba smjera ide biciklom treba joj ukupno $\frac{1}{4}$ sata. Koliko će joj ukupno minuta trebati ako u oba smjera ide pješice?

6.4. Simetrala unutarnjeg kuta na osnovici $\overline{BC}$ jednakokračnog trokuta ABC i simetrala kuta među krakovima sijeku se i određuju kut od $125°30'$. Koliko iznose unutarnji kutovi tog trokuta?

6.5. Površina trokuta ABC je $18\ \text{cm}^2$. Na stranici $\overline{AC}$ dana je točka D takva da je $|DC| = 2 \cdot |AD|$. Izračunaj površine trokutova ABD i DBC.

7. razred

7.1. Ako je $a = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} : \left(\frac{4}{5} - 1\right)$ i $b = \frac{2}{\frac{1}{3} - 2} : 2\frac{2}{5} + 2.5$, koliko je $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$?

7.2. Brodić za isto vrijeme prijeđe 34 km ploveći rijekom nizvodno, kao i 26 km ploveći uzvodno. Ako je brzina brodića po mirnoj vodi 15 km/ h, kojom brzinom teče rijeka?

7.3. Frane i Duje brodovima prevoze turiste na cjelodnevni izlet do obližnjeg otoka. Frane je cijenu izleta po osobi naplaćivao za 80 kn više od Duje. Kada su to uočili, Frane je smanjio cijenu izleta za 10%, a Duje povećao za 15%. Nakon promjene cijena, izlet Dujinim brodom je za 8 kn po osobi skuplji od izleta Franinim brodom. Kolike su nove cijene izleta?

7.4. Zadan je pravokutnik $ABCD$. Nad kraćom stranicom $\overline{BC}$ konstruiran je jednakostraničan trokut BCE tako da točka E leži unutar pravokutnika. Nad stranicom $\overline{AB}$ konstruiran je jednakostraničan trokut AFB tako da je točka F izvan pravokutnika. Dokaži da je $|EF| = |BD|$.

7.5. Površina trokuta ABC jednaka je $12\ \text{cm}^2$. Na stranici $\overline{AB}$ dana je točka M takva da je $|AM| : |MB| = 1 : 2$. Nadalje, na stranici $\overline{AC}$ dana je točka N takva da je $|AN| : |NC| = 1 : 3$. Kolika je površina trokuta AMN?

8. razred

8.1. Usporedi brojeve x i y ako je

$$x = 1\frac{4}{5} - 0.2 : \left(1 - \sqrt{2\frac{1}{4}}\right)^2 \quad \text{i} \quad y = \sqrt{2} + 2.5 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)^2.$$

8.2. U nekom razredu je 12 dječaka i 18 djevojčica. Na ispitu znanja prosjek razreda bio je 90 bodova. Ako su dječaci postigli prosjek 87 bodova, koliki je prosjek djevojčica?

8.3. Zadan je pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu C. Neka su P i Q redom polovišta kateta $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Izračunaj duljinu hipotenuze $\overline{AB}$ ako je $|AP| = 5$ cm i $|BQ| = \sqrt{40}$ cm.

8.4. Unutar jednakostraničnog trokuta odabrana je točka T koja je od stranica trokuta udaljena redom za 1 cm, 2 cm i 3 cm. Kolika je površina tog trokuta?

8.5. Odredi najmanju moguću vrijednost izraza $4x^2 + 4xy + 4y^2 + 12x + 8$. Za koji x i y će taj izraz imati najmanju vrijednost?

Srednja škola — A varijanta

1. razred

1.1. Skrati razlomak $\dfrac{a^4 - 2a^3 - 2a^2 + 2a + 1}{(a+1)(a+2)}$.

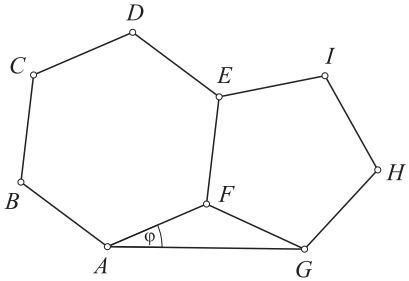
1.2. Ako dvoznamenkastom broju s lijeve strane dopišemo znamenku 3, dobit ćemo broj čiji je dvokratnik 27 puta veći od zadanog dvoznamenkastog broja. Odredi taj dvoznamenkasti broj.

1.3. Odredi najveći cijeli broj n za koji vrijedi nejednakost

$$3\left(n - \frac{5}{3}\right) - 2(4n+1) > 6n + 5.$$

1.4. Koliko djelitelja ima broj 288?

1.5. Na slici su pravilni šesterokut $ABCDEF$ i pravilni peterokut $EFGHI$. Odredi kut $\sphericalangle FAG$.



Sl. 1.2.

1.6. Trapez $ABCD$ ima pravi kut pri vrhu B, a dijagonala $\overline{BD}$ je okomita na krak AD. Duljina kraka $\overline{BC}$ je $5\ \mathrm{cm}$, a duljina dijagonale $\overline{BD}$ je $13\ \mathrm{cm}$. Izračunaj površinu trapeza $ABCD$.

1.7. Na proslavi Aninog rođendana, nakon prvog oglašavanja zvona na ulazna vrata došao je jedan gost. Nakon drugog, i svakog sljedećeg zvonjenja, došla su dva gosta više nego prethodni put. Ako se zvono oglasilo n puta, koliko je ukupno bilo gostiju na proslavi?

1.8. Odredi sve prirodne brojeve n za koje je $n^2 - 440$ potpuni kvadrat.

2. razred

2.1. Skrati razlomak

$$\frac{(2^{n-1}+1)^2 - 4^{n-1}}{4^n + 2^{n+1} + 1}.$$

2.2. U pravokutnom trokutu duljina visine na hipotenuzu je $4\ \mathrm{cm}$, a duljina težišnice iz vrha pravog kuta $5\ \mathrm{cm}$. Odredi zbroj duljina kateta tog trokuta.

2.3. U trokutu ABC poznati su kutovi $\sphericalangle CAB = 35^\circ$ i $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Ako je t tangenta na kružnicu opisanu tom trokutu s diralištem u vrhu C, a p paralela s pravcem AB kroz vrh C, odredi kut između pravaca p i t.

2.4. Dani su kompleksni brojevi $z = 7 - i$, $w = -3 + 4i$. Odredi $\left|\dfrac{z^{20}}{\overline{w}^{10}}\right|$.

2.5. Neka su x_1, x_2 različita rješenja jednadžbe $2x^2 - 3x + 4 = 0$. Izračunaj $\dfrac{1}{x_1^3} + \dfrac{1}{x_2^3}$.

2.6. Žicu duljine $1\ \mathrm{m}$ treba razrezati i od dobivenih dijelova napraviti jedan jednakostranični trokut i jedan kvadrat. Cijelu žicu treba iskoristiti. Odredi duljinu stranice trokuta i duljinu stranice kvadrata tako da zbroj površina trokuta i kvadrata bude što manji.

2.7. Odredi prirodne brojeve a, b i c tako da vrijedi jednakost $(a+bi)^3 - 107i = c$. (i je imaginarna jedinica.)

2.8. Odredi $a > 0$ tako da površina lika omeđenog grafovima funkcija

$$y = |ax-3| + |ax+3| \qquad \text{i} \qquad y = 10$$

bude jednaka 8.

3. razred

3.1. Riješi jednadžbu $4^{\log x} - 32 + x^{\log 4} = 0$.

3.2. Riješi nejednadžbu

$$\log_2(1 - 2\cos x) + \log_{\frac{1}{2}}(1 + 2\cos x) \leq 0$$

u intervalu $[0, 2\pi]$.

3.3. Zadan je kompleksan broj $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$, gdje je $\alpha \in \mathbf{R}$. Odredi $|z|$. Rješenje zapiši bez znaka korijena.

3.4. Ako za duljine a, b, c stranica trokuta vrijedi $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$, odredi kut nasuprot stranice c.

3.5. Polumjer osnovke kružnog stošca je r. Jedan osni presjek tog stošca je raznostraničan trokut s kutovima α i β ($\alpha \neq \beta$) uz promjer osnovke. Izrazi obujam tog stošca pomoću r, α i β.

3.6. Neka su α, β i γ kutovi takvi da vrijedi $\beta = 60^\circ + \alpha$ i $\gamma = 60^\circ + \beta$. Dokaži da je vrijednost izraza

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha$$

cijeli broj kad god je izraz definiran.

3.7. Pokaži da za svaki trokut s kutovima α, β i γ te polumjerima r i R upisane i opisane kružnice redom, vrijedi jednakost

$$\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{4R\sin^2\frac{\gamma}{2}}{r}.$$

3.8. Odredi sve cijele brojeve x za koje je $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ cijeli broj.

4. razred

4.1. U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu $\sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}}$.

4.2. Treći član u razvoju binoma $\left(2 \cdot \sqrt[n]{2^{-1}} + \frac{4}{\sqrt[4-n]{4}}\right)^6$ je 240. Odredi n.

4.3. Izračunaj $\left(1 + \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}\right)^{14}$.

4.4. Tri različita realna broja, različita od nule, čine aritmetički niz, a njihovi kvadrati u istom poretku čine geometrijski niz. Odredi sve moguće vrijednosti kvocijenta tog geometrijskog niza.

4.5. Koliki je zbroj svih prirodnih brojeva n za koje je broj $\dfrac{2009-n}{99}$ prirodan?

4.6. Jedno od žarišta (fokusa) elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ je žarište parabole $y^2=2px$, a pravac $3x-5y+25=0$ je njihova zajednička tangenta. Dokaži da je trokut kojeg određuju zajedničko žarište i dva dirališta tangente pravokutan.

4.7. Kut pri vrhu osnog presjeka uspravnog stošca je 2α, a polumjer osnovke r. U taj stožac je upisana pravilna šesterostrana prizma čiji su svi bridovi jednake duljine (jedna osnovka prizme leži u ravnini osnovke stošca, a preostali vrhovi na plaštu stošca). Izračunaj oplošje prizme pomoću α i r.

4.8. Niz (a_n) zadan je rekurzivno:

$$a_1=1,\quad a_2=3,\qquad a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\ \text{ za }\ n\geq 3.$$

Dokaži da vrijedi nejednakost $a_n<\left(\dfrac{7}{4}\right)^n$ za sve $n\in\mathbf{N}$.

Srednja škola — B varijanta

1. razred

1.1. Riješi nejednadžbu $\dfrac{x+2}{x-3}\leq 1$ u skupu prirodnih brojeva.

1.2. Odredi sve parove prirodnih brojeva (a,b) takve da je $a+b=378$ i $D(a,b)=63$ ($D(a,b)$ je najveći zajednički djelitelj).

1.3. Za koje realne brojeve m jednadžba $3x+9=m(m-x)$ ima jedinstveno rješenje?

1.4. U kvadratu $ABCD$ stranice duljine 6 cm na dijagonali $\overline{AC}$ dana je točka T tako da je $|TC|=\dfrac{1}{4}|AC|$. Pravac kroz točke B i T siječe stranicu $\overline{CD}$ u točki P.

Odredi udaljenost $|PC|$.

1.5. Paralelogram $ABCD$ se može podijeliti na četiri jednakostranična trokuta stranice duljine 2 cm. Kolika je duljina dulje dijagonale paralelograma?

1.6. Ako je $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$, koliko je $(a+2b-3c)^{2009}$?

1.7. Pas trči za zecom koji je za 90 svojih skokova ispred njega. Dok zec skoči 6 puta, pas skoči samo 5 puta, a dva pseća skoka jednako su dugačka kao tri zečja. Koliko će skokova napraviti zec do trenutka kada ga pas uhvati?

1.8. Poredaj po veličini vrijednosti izraza A, B i C, ako je $a \geq 1$, $b \geq 1$, $a < b$, $x \neq y$:

$$A = \left[\left(a + \frac{z - xy}{x - y}\right) \cdot \left(a - \frac{z - xy}{x - y}\right) + \left(\frac{z - xy}{x - y}\right)^2\right] : b^2,$$

$$B = \left(\frac{a+1}{a+2} + \frac{1}{a}\right) : \left(\frac{a+1}{a} - \frac{1}{a+2}\right) \cdot (a + b),$$

$$C = \frac{a}{a + \dfrac{1}{a + \dfrac{1}{a}}} \cdot \frac{a + \dfrac{2}{a}}{a + \dfrac{1}{a}}.$$

2. razred

2.1. Racionaliziraj razlomak $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$.

2.2. Polinom $f(x) = x^2 + px + q$ pri dijeljenju s polinomom $g_1(x) = x - 1$ daje ostatak 6, a pri dijeljenju s $g_2(x) = x - 2$ ostatak 12. Odredi polinom $f(x)$.

2.3. Odredi kvadratnu jednadžbu s realnim koeficijentima kojoj je $\left(\dfrac{i^{2009} + 1}{i^{2009} - 1}\right)^{2009}$ jedno rješenje.

2.4. Riješi nejednadžbu $\dfrac{x^2 + 3x - 5}{x^2 + 3x + 5} < 1$.

2.5. Nađi sva rješenja jednadžbe $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$ u skupu kompleksnih brojeva.

2.6. Dva pravokutna trokuta imaju zajedničku hipotenuzu. Razlika duljina kateta jednog od njih je 9 cm, a drugog 13 cm. Zbroj površina ta dva trokuta je 90 cm^2. Izračunaj duljine njihovih kateta.

2.7. Za koje cijele brojeve k kvadratna jednadžba $kx^2 + (2k - 1)x + k - 2 = 0$ ima racionalna rješenja.

2.8. Dan je jednakokračan trokut ABC takav da je $|AC| = |BC| = 12$ cm. Paralela s krakom prolazi polovištem visine na osnovicu trokuta i siječe osnovicu u točki M a drugi krak u točki N. Kolika je duljina dužine $\overline{MN}$?

3. razred

3.1. Izračunaj vrijednost izraza $\log^2 5 + \log 2 \cdot \log 50$.

3.2. Odredi zbroj svih rješenja jednadžbe $\log_8(\sin 2x) = -\frac{1}{3}$ na intervalu $[0, 2\pi]$.

3.3. Duljina stranice pravilnog šesterokuta $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ jednaka je 3 cm. Njegove stranice $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$, $\overline{A_5A_6}$, $\overline{A_6A_1}$ su preko vrhova A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_1 produžene za 5 cm do vrhova B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 novog pravilnog šesterokuta. Kolika je duljina njegove stranice?

3.4. S iste strane središta kugle položene su dvije paralelne ravnine čija su presjecišta s kuglom krugovi s površinama 4π cm^2 i 49π cm^2. Ako je udaljenost tih ravnina jednaka 3 cm, koliki je polumjer kugle?

3.5. Dokaži da za sve realne brojeve x vrijedi $\sin^4 x + \cos^4 x \geq \frac{1}{2}$.

3.6. Koliki su šiljasti kutovi pravokutnog trokuta ako za njegove katete a, b i hipotenuzu c vrijedi $4ab = c^2\sqrt{3}$?

3.7. Riješi nejednadžbu $(x+1)^{-x^2-2x} > x+1$.

3.8. Duljina hipotenuze pravokutnog trokuta je 15 cm, a jedan njegov kut je 15°. Izračunaj duljinu odreska simetrale pravog kuta koji je unutar trokuta.

4. razred

4.1. Odredi umnožak kvadrata rješenja jednadžbe $z^3 - (1+i)^2 = 0$.

4.2. Dokaži da je za svaki prirodan broj $n \geq 2$ znamenka jedinica broja 2^{2^n} jednaka 6.

4.3. U raspisu izraza $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$ koeficijent trećeg člana je za 44 veći od koeficijenta drugog člana.

Odredi član koji ne sadrži x.

4.4. U trokutu ABC pravac vrhom A raspolavlja težišnicu iz vrha B. U kojem omjeru taj pravac dijeli stranicu $\overline{BC}$?

4.5. Odredi kut između tangenata parabole $y^2 = 4x$ u točkama njezinog presjeka s pravcem $2x + y - 12 = 0$.

4.6. Odredi sva rješenja jednadžbe

$$(x^2 - 5x + 5)^{2\cdot 4^x - 9\cdot 2^x + 4} = 1.$$

4.7. Prvi član niza (a_n) je $a_1 = 7$. Za članove niza vrijedi: $a_n - a_{n-1} = 2n + 5$, $n \geq 2$. Koliko je a_{100}?

4.8. Dana je hiperbola $x^2 - y^2 = a^2$. Odredi površinu paralelograma kojem dvije stranice leže na njezinim asimptotama, a jedan vrh mu je točka na hiperboli. Dokaži da površina ne ovisi o odabiru točke!

RJEŠENJA

Osnovna škola

4.1. Imamo redom

$$\begin{aligned} &287 \cdot 70 + 2009 - 10 \cdot (2205 - 2025 : 15 - 61) \\ &\quad = 287 \cdot 70 + 2009 - 10 \cdot (2205 - 135 - 61) \\ &\quad = 20090 + 2009 - 10 \cdot (2070 - 61) \\ &\quad = 2009 \cdot 10 + 2009 - 10 \cdot 2009 \\ &\quad = 2009. \end{aligned}$$

4.2. Nakon što je Frane prodao 8 kg, Ante 25 kg, Mate 36 kg i Jure 45 kg ribe, ostalo je $382 - (8 + 25 + 36 + 45) = 382 - 114 = 268$ kg ribe. Prema tome, svakom ribaru je tada ostalo po $268 : 4 = 67$ kg ribe.

Dakle, Frane je ulovio $67+8 = 75$, Ante $67+25 = 92$, Mate $67+36 = 103$ i Jure $67 + 45 = 112$ kilograma ribe.

4.3. Prebrojimo dužine na svakom od četiriju polupravaca: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AF}$, $\overline{FD}$, $\overline{AD}$, $\overline{EF}$, $\overline{FB}$, $\overline{EB}$, $\overline{ED}$, $\overline{DC}$, $\overline{EC}$.

Dakle, ukupno ima 12 dužina.

4.4. Ukupna vrijednost kovanica od 50 lipa iznosi $32 \cdot 50 = 1600$ lipa = 16 kuna. Preostalo je $62 - 32 = 30$ kovanica od 2 kune i 5 kuna čija je ukupna vrijednost $100 - 16 = 84$ kune. Očito je ukupna vrijednost kovanica od 2 kune paran broj. Nadalje, kako je ukupna vrijednost kovanica od 2 kune i 5 kuna paran broj (84), slijedi da je i ukupna vrijednost kovanica od 5 kuna paran broj. Zbog toga imamo paran broj kovanica od 5 kuna. Stoga imamo sljedeću tablicu:

5 kuna	2 kune	vrijednost
2	28	$2 \cdot 5 + 28 \cdot 2 = 66$
4	26	$4 \cdot 5 + 26 \cdot 2 = 72$
6	24	$6 \cdot 5 + 24 \cdot 2 = 78$
8	22	$8 \cdot 5 + 22 \cdot 2 = 84$
10	20	$10 \cdot 5 + 20 \cdot 2 = 90$
...	...	...

Iz tablice vidimo da je u kasici–prasici bilo 8 kovanica od 5 kuna i 22 kovanice po 2 kune.

4.5. Prema uvjetu zadatka, umnožak znamenki broja je 13, 14 ili 15. Kako se broj 13 ne može prikazati kao umnožak dvaju ili više jednoznamenkastih brojeva, zaključujemo da ne postoje četveroznamenkasti brojevi čiji je umnožak znamenki jednak 13. Nadalje, $14 = 2 \cdot 7 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 7$, pa četveroznamenkasti brojevi čiji je umnožak znamenki 14 imaju dvije znamenke 1 te po jednu znamenku 2 i 7. To su brojevi: 7211, 7121, 7112, 2711, 1721, 1712, 2171, 1271, 1172, 2117, 1217, 1127. Ima ih 12.

Slično, $15 = 3 \cdot 5 = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5$, pa četveroznamenkasti brojevi čiji je umnožak znamenki 15 imaju dvije znamenke 1 te po jednu znamenku 3 i 5. To su brojevi: 5311, 5131, 5113, 3511, 1531, 1513, 3151, 1351, 1153, 3115,1315, 1135. Ima ih 12.

Dakle, četveroznamenkastih brojeva koji zadovoljavaju uvjet zadatka ima 24.

* * *

5.1. Poštujući redoslijed računskih operacija, te primjenom pravila distributivnosti, dobivamo:

$$\begin{aligned} &48\,536 - 536 : 4 - (473 \cdot 117 - 117 \cdot 73) + 11 \cdot (37 - 0) \\ &\quad = 48\,536 - 134 - 117 \cdot (473 - 73) + 11 \cdot 37. \end{aligned}$$

Dalje, lagano računamo:

$$\begin{aligned} &48\,536 - 134 - 117 \cdot (473 - 73) + 11 \cdot 37 \\ &\quad = 48\,402 - 117 \cdot 400 + 407 \\ &\quad = 48\,402 - 46\,800 + 407 \\ &\quad = 2009. \end{aligned}$$

5.2. Kako je $999 : 7 = 142$ i ostatak 5, zaključujemo da ima 142 broja manja od 1000 koji su djeljivi sa 7. Kako je $999 : 11 = 90$ i ostatak 9, zaključujemo da ima 90 brojeva manjih od 1000 koji su djeljivi s 11. Dakle, trebamo od 999 oduzeti broj brojeva koji su djeljivi sa 7 i s 11. Međutim, među brojevima djeljivim sa 7 ima onih koji su djeljivi s 11 i obrnuto, među brojevima djeljivim s 11 ima onih koji su djeljivi sa 7. U oba slučaja to su brojevi koji su djeljivi sa $11 \cdot 7 = 77$. Kako je $999 : 77 = 12$ i ostatak 75, zaključujemo da ima 12 brojeva manjih od 1000 koji su djeljivi sa 77.

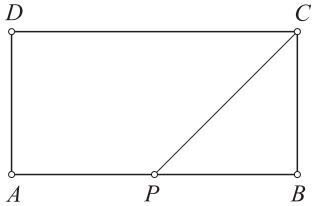
Dakle, broj traženih brojeva jednak je $999 - 142 - 90 + 12 = 779$, zato jer smo brojeve djeljive sa 77 dvaput oduzeli, pa smo ih jednom morali dodati.

5.3. Zadatak rješavamo grafički:

prvi broj	◯◯
drugi broj	◯ − 2
treći broj	◯
četvrti broj	◯ + 6

Označimo li ◯ sa x slijedi da je $5x + 4 = 2009$, odakle je $5x = 2005$, pa je $x = 2005 : 5 = 401$. Konačno, prvi broj je jednak $2 \cdot 401 = 802$, drugi $401 - 2 = 399$, treći 401, te četvrti $401 + 6 = 407$.

5.4.



Sl. 1.3.

Ako je $|BC| = b$, onda je $|AP| = |PB| = |AD| = b$ i $|DC| = 2b$. Zato je opseg četverokuta $APCD$ jednak $b + b + 2b + |PC|$, a opseg trokuta PBC je $b + b + |PC|$. Prema uvjetu zadatka, opsezi se razlikuju za 20 cm, pa je $2b = 20$, tj. $b = 10$ cm. Kako je duljina jednaka dvostrukoj širini, slijedi da je $a = 20$ cm, pa je površina $P = 10 \cdot 20 = 200\ \text{cm}^2$.

5.5. Izlučimo li redom brojeve 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009 u retcima, dobivamo:

$$\begin{aligned}
2004 \cdot (2006 + 2007 + 2008 + 2009) &= 2004 \cdot 8030\\
2005 \cdot (2006 + 2007 + 2008 + 2009) &= 2005 \cdot 8030\\
2006 \cdot (2006 + 2007 + 2008 + 2009) &= 2006 \cdot 8030\\
2007 \cdot (2006 + 2007 + 2008 + 2009) &= 2007 \cdot 8030\\
2008 \cdot (2006 + 2007 + 2008 + 2009) &= 2008 \cdot 8030\\
2009 \cdot (2006 + 2007 + 2008 + 2009) &= 2009 \cdot 8030.
\end{aligned}$$

Zbrojimo sada retke. Izlučimo li broj 8030, dobivamo da je traženi zbroj jednak

$$8030 \cdot (2004 + 2005 + 2006 + 2007 + 2008 + 2009) = 8030 \cdot 12\,039 = 96\,673\,170.$$

* * *

6.1. Izračunajmo prvo brojeve a i b. Imamo da je

$$\begin{aligned}
a &= \frac{7}{4} : 0.5 + \frac{10}{9} \cdot \left(3\frac{1}{4} + \frac{4}{5}\right) = \frac{7}{4} : \frac{1}{2} + \frac{10}{9} \cdot \left(\frac{13}{4} + \frac{4}{5}\right)\\
&= \frac{7}{4} \cdot 2 + \frac{10}{9} \cdot \frac{65 + 16}{20} = \frac{7}{2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{81}{2} = \frac{7}{2} + \frac{9}{2} = \frac{16}{2} = 8.
\end{aligned}$$

Slično je

$$\begin{aligned} b &= \frac{2}{5} : \left(1.1 - \frac{3}{4} - 0.5 : 2\right) = \frac{2}{5} : \left(\frac{11}{10} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} : 2\right) \\ &= \frac{2}{5} : \left(\frac{11}{10} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5} : \left(\frac{11}{10} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{2}{5} : \left(\frac{11}{10} - 1\right) = \frac{2}{5} : \frac{1}{10} = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4. \end{aligned}$$

Konačno, kako je $\frac{a}{b} = \frac{8}{4} = 2$, zaključujemo da je broj a dva puta veći od broja b.

6.2. Neka je najmlađi sin dobio x kuna. Tada su ostali sinovi dobili $x + 45$, $x + 90$, $x + 135$, $x + 180$ kuna, redom po starosti u rastućem poretku.

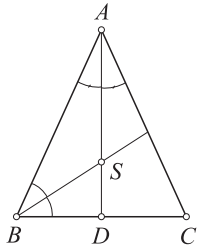
Prema uvjetu zadatka, najstariji sin će dobiti 13 puta više kuna od najmlađeg, pa vrijedi jednadžba $13x = x + 180$, tj. $12x = 180$, odakle je $x = 15$.

Prema tome, sin koji je treći po starosti dobio je $x + 90 = 15 + 90 = 105$ kuna.

6.3. Kako Marija oba smjera biciklom prijeđe za $\frac{1}{4}$ sata, jedan smjer prijeđe za $\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ sata. Nadalje, kako Marija prijeđe jedan smjer biciklom i jedan pješice za $\frac{3}{4}$ sata, slijedi da jedan smjer pješice prijeđe za $\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ sata.

Dakle, Marija oba smjera prijeđe pješice za $2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{4}$ sata, a to je $\frac{5}{4} \cdot 60 = 5 \cdot 15 = 75$ minuta.

6.4.



Sl. 1.4.

Neka je S sjecište simetrala kutova $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle CAB$. Kako je $\sphericalangle BSA = 125^\circ 30'$, slijedi da je $\sphericalangle BSD = 180^\circ - 125^\circ 30' = 54^\circ 30'$. Nadalje, iz pravokutnog trokuta BDS slijedi da je $\sphericalangle SBD = 90^\circ - \sphericalangle BSD = 90^\circ - 54^\circ 30' = 35^\circ 30'$. Kako je pravac BS simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ zaključujemo da je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = 2 \cdot 35^\circ 30' = 71^\circ$.

Preostaje još izračunati kut nasuprot osnovici: $\sphericalangle CAB = 180^\circ - 2 \cdot 71^\circ = 180^\circ - 142^\circ = 38^\circ$.