1.

Općinsko natjecanje

Općinska i gradska natjecanja održana su u gradovima i općinama Hrvatske 4. veljače 2010. Kao što je uobičajeno, zadatke je osmislilo Državno povjerenstvo za matematička natjecanja. Učenici osnovnih škola rješavali su svoje zadatke dva, a učenici srednjih tri sata.

Osnovna škola

4. razred

4.1. Izračunaj: $2010 + 2010 \cdot 2 + 2010 \cdot 3 + 2010 \cdot 4 + 2010 \cdot 5$.

4.2. U izrazu $196 - 28 : 4 + 10 \cdot 168 - 166$ stavi zagrade tako da vrijednost izraza bude 209.

4.3. Na polici su tri knjige. Prva ima 90, druga 110, a treća 150 stranica. Korice knjiga su jednake debljine i svaka od njih je debljine 2 mm. Koliko milimetara su debele knjige uzete zajedno ako se zna da je 10 stranica debljine 1 mm?

4.4. Koliko puta treba najvećem jednoznamenkastom broju dodati najveći dvoznamenkasti broj da bi se dobio najveći troznamenkasti broj?

4.5. U jednoj ulici ima točno 100 kuća. Prošle jeseni na svaku kuću postavljena je nova tablica s kućnim brojem. Koliko puta je pri tome napisana znamenka 7?

4.6. Na novogodišnjoj proslavi Ana, Beata, Cvijeta, Danijela i Ema razmjenjuju svoje darove. Na koliko načina to mogu učiniti ako darove razmjenjuju istodobno, tj. kada Ana daje dar Emi i Ema daje dar Ani?

4.7. Krešo je bojao ogradu na svome dvorištu od ponedjeljka do subote. Obojio je 246 letvica i to na način da svaki sljedeći dan oboji 4 letvice više nego dan prije. Koliko je letvica obojio u srijedu?

4.8. Nacrtaj dva usporedna pravca a i b. Na pravcu a odaberi točke A i B, a na pravcu b točke C, D i E. Napiši sve dužine kojima su krajnje točke u odabranim točkama.

5. razred

5.1. Koji od brojeva 18, 24 i 49 ima najviše djelitelja? Napiši te djelitelje.

5.2. Odredi još dva broja koji nastavljaju započeti niz brojeva 2, 7, 17, 37,... Postupak obrazloži.

5.3. Neki sat oglašava se s tik, tak, tok, bim, bam, a zatim ponavlja iste zvukove. Isti niz zvukova uzastopno se nastavlja i to s jednim zvukom u sekundi. Ako se sat oglasio tik jednu sekundu nakon podneva, koji će se zvuk čuti u 87. sekundi nakon podneva?

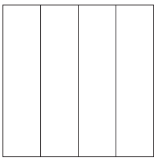
5.4. Broj 20 napiši kao zbroj različitih prostih brojeva. Napiši sve mogućnosti.

5.5. Zbroj triju brojeva, od kojih je svaki sljedeći tri puta veći od prethodnog, iznosi 481. Koji su to brojevi?

5.6. Odredi najmanji prirodni broj zapisan pomoću znamenaka 0 i 4 djeljiv s 15.

5.7. Koliko ima parnih peteroznamenkastih brojeva napisanih pomoću znamenaka 0, 1, 3, 5, 6, 7, 8 i 9 kojima je druga znamenka prost broj, treća znamenka složen broj, a prva i posljednja znamenka su im jednake?

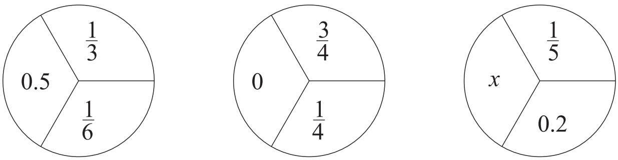
5.8. Kvadrat je podijeljen na četiri jednaka pravokutnika kao na slici. Ako je opseg jednog od tako dobivenih pravokutnika 20 cm, odredi površinu kvadrata.



Sl. 1.1.

6. razred

6.1. Odredi nepoznati broj x u trećem krugu:



Sl. 1.2.

6.2. U kutiji su crvene, zelene i plave kuglice. Trećina svih kuglica je crvene, a četvrtina plave boje. Deset preostalih kuglica su zelene boje. Koliko je kuglica u kutiji?

. Koji broj treba dodati brojniku i nazivniku razlomka $\frac{4}{9}$, da bi se njegova vrijednost udvostručila?

6.4. U jednakokračnom trokutu kut među krakovima za 20° je veći od kuta uz osnovicu. Koliko iznose unutarnji kutovi tog trokuta?

6.5. Dostavljač je na tržnicu dovezao krumpir i prvi dan je prodano $\frac{3}{7}$ dovezenih krumpira, a ostalo je 210 kg više nego što je prodano. Koliko kilograma krumpira je dostavljač dovezao na tržnicu?

6.6. Za punjenje soka pripremljene su boce od $\frac{3}{4}\,\ell$ i od $0.8\,\ell$. Koliko je kojih boca napunjeno sa $60\,\ell$ soka ako je ukupno napunjeno 78 boca?

6.7. U pravokutnom trokutu zadane su duljine kateta $a = 3$ m i $b = 4$ m. Koliko je duga hipotenuza tog pravokutnog trokuta ako je duljina visine na hipotenuzu $v_c = 2.4$ m?

6.8. Nad krakovima $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ jednakokračnog šiljastokutnog trokuta ABC konstruirani su prema van kvadrati $BCDE$ i $ACFG$. Dokaži da je $|AD| = |BF|$.

7. razred

7.1. Točke $B(-5, 2)$ i $C(1, -4)$ su susjedni vrhovi kvadrata $ABCD$. Odredi koordinate ostalih vrhova toga kvadrata ako su njegove dijagonale usporedne s koordinatnim osima i ako je sjecište dijagonala u I. kvadrantu.

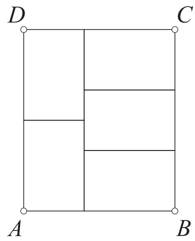
7.2. U kojem je mjerilu nacrtana karta, ako su dva grada na karti udaljena 0.4 dm što u prirodi odgovara udaljenosti od 180 km?

7.3. Prosjek godina skupine od 16 osoba jest 26. Hrvoje je napustio skupinu te prosjek godina skupine bez Hrvoja iznosi 25 godina. Koliko godina ima Hrvoje?

7.4. Za neki iznos novca domaćica može kupiti 20 kg krumpira. Koliko krumpira može kupiti za isti novac nakon što se cijena krumpira snizi 20% ?

7.5. Jedna osoba može obaviti neki posao za 12 dana, a neka druga osoba za 6 dana. Za koliko bi dana posao obavili radeći zajedno?

7.6. Pet pravokutnika jednakih dimenzija složeno je kao na slici u veliki pravokutnik $ABCD$. Ako je površina pravokutnika $ABCD$ jednaka $750\ \text{cm}^2$, koliki je opseg pravokutnika $ABCD$?



Sl. 1.3.

7.7. Udaljenosti triju tvornica A, B, C od luke odnose se kao $2 : 5\frac{1}{3} : 3.2$. Udaljenost tvornice C od luke je 8 km manja nego udaljenost luke i tvornice B. Izračunaj udaljenost pojedine tvornice od te luke.

7.8. Autobus je prešao put od mjesta A do mjesta B za 6 sati i 45 minuta. Na povratku u mjesto A utrošeno je jednako vremena, ali se autobus kretao po putu 26% kraćem od onog pri dolasku u mjesto B, pri čemu se na putu do mjesta B koristio jedan odmor od 30 minuta, a na povratku jedan odmor od 35 minuta. Odredi omjer prosječne brzine autobusa na putu do mjesta B i prosječne brzine autobusa na povratku.

8. razred

8.1. Odredi još dva broja koji nastavljaju započeti niz brojeva 3, 6, 24, 192,... Postupak obrazloži.

8.2. Koliko znamenaka u dekadskom zapisu ima broj $10\,000^{9999}$?

8.3. Duljine dijagonala romba iznose $\sqrt{2010}+\sqrt{2002}$ cm i $\sqrt{2010}-\sqrt{2002}$ cm. Izračunaj površinu tog romba.

8.4. Skrati razlomak: $\dfrac{4a^2-4ab}{a^3-ab^2}$.

8.5. Za koji realan broj a izraz $a^2-4a+2010$ ima najmanju vrijednost? Kolika je najmanja vrijednost?

8.6. Duljine kateta a i b pravokutnog trokuta ABC odnose se kao $8:15$, a njegov opseg iznosi 100 cm. Izračunaj duljine svih stranica tog trokuta.

8.7. Kvadrat nekog cijelog broja za 49 je veći od razlike trostrukog kvadrata njegova prethodnika i dvostrukog kvadrata njegova sljedbenika. Koji je to broj? Koji je broj njegov sljedbenik?

8.8. Duljine visina jednakokračnog trokuta ABC, s osnovicom $\overline{AB}$, su 20 cm i 24 cm. Koliki je opseg trokuta ABC ako je duljina kraka manja od duljine osnovice?

Srednja škola — A varijanta

1. razred

1.1. Neka je n prirodni broj i $a \neq 0$ realni broj. Potpuno skrati razlomak

$$\frac{a^{3n+1} - a^4}{a^{2n+3} + a^{n+4} + a^5}.$$

1.2. Odredi prirodni broj čiji je 9-erokratnik između 1100 i 1200, a 13-erokratnik između 1500 i 1600.

Za prirodni broj n, n-terokratnik nekog broja je broj koji je n puta veći od tog broja.

1.3. Tri kružnice polumjera $2\,\text{cm}$ nalaze se u ravnini tako da središte svake od njih leži na sjecištu drugih dviju kružnica. Odredi površinu presjeka svih triju krugova određenih tim kružnicama.

1.4. Ako nekom broju obrišemo znamenku jedinica, dobit ćemo broj koji je za 2010 manji od polaznog broja. Koji je polazni broj?

1.5. U vreći se nalazi dovoljno velik broj crvenih, bijelih i plavih kuglica. Svaki učenik uzima nasumce iz vreće po tri kuglice. Koliko najmanje mora biti učenika da bismo bili sigurni da neka dvojica od njih imaju istu kombinaciju kuglica, tj. jednak broj kuglica svake boje?

1.6. Ako je $a^2 + 2b^2 = 3c^2$, pokaži da je

$$\left(\frac{a+b}{b+c} + \frac{b-c}{b-a}\right) \cdot \frac{a+2b+3c}{a+c}$$

prirodni broj.

1.7. Pravokutni trokut ABC s katetama duljina $15\,\text{cm}$ i $20\,\text{cm}$ i pravim kutom u vrhu B sukladan je trokutu BDE s pravim kutom u vrhu D. Točka C leži unutar dužine $\overline{BD}$, a točke A i E nalaze se s iste strane pravca BD.

a) Odredi udaljenost točaka A i E.

b) Izračunaj površinu presjeka trokuta ABC i BDE.

1.8. Neka su p i q različiti neparni prosti brojevi. Dokaži da broj $(pq+1)^4-1$ ima barem četiri različita prosta djelitelja.

2. razred

2.1. Odredi zbroj svih pozitivnih djelitelja broja 2010.

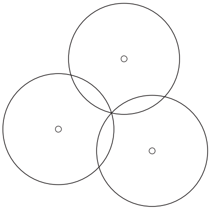
2.2. Dane su dvije kvadratne jednadžbe

$$x^2+ax+1=0, \qquad x^2+x+a=0.$$

Odredi sve vrijednosti parametra a za koje te jednadžbe imaju barem jedno zajedničko rješenje.

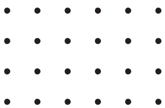
2.3. Žicom duljine $10\,\text{km}$ treba ograditi pravokutno zemljište koje s jedne strane ima ravni zid (žicu je potrebno koristiti za preostale tri stranice), tako da površina tog zemljišta bude najveća moguća. Kolika je površina tako ograđenog zemljišta?

2.4. Tri kruga polumjera $1\,\text{cm}$ imaju točno jednu zajedničku točku, a njihova središta vrhovi su jednakostraničnog trokuta. Odredi površinu skupa svih točaka koje pripadaju dvama od tih krugova.



Sl. 1.4.

2.5. Dvadeset i četiri točke raspoređene su u šest stupaca i četiri retka, kao na slici. Pokaži da se od danih točaka može odabrati njih točno dvanaest tako da nikoje četiri od njih nisu vrhovi pravokutnika sa stranicama paralelnim danim recima i stupcima.



Sl. 1.5.

2.6. Neka je $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Izračunaj

$$z+z^2+z^3+z^4+\ldots+z^k+\ldots+z^{2010}.$$

2.7. Dvije kružnice sijeku se u točkama P i Q. Ako dva pravca koja prolaze kroz točku Q sijeku prvu kružnicu u točkama A i B, a drugu kružnicu u točkama C i D, dokaži da su trokuti PAB i PCD slični.

2.8. Odredi sve cijele brojeve x za koje je $x^2+3x+24$ kvadrat nekoga cijeloga broja.

3. razred

3.1. Odredi sve $x\in[0,2\pi]$ za koje su $3\sin x$ i $\frac{4}{7}\cos(2x)+\frac{5}{3}\sin x$ cijeli brojevi.

3.2. *Legoplus* je tijelo koje se sastoji od sedam jednakih kocki spojenih tako da postoji kocka koja ima zajedničku stranu sa svakom od preostalih šest kocki.

Svaku stranu legoplusa treba obojati jednom bojom. Koliko je minimalno boja potrebno da bi se to moglo napraviti tako da nikoje dvije susjedne strane ne budu obojane istom bojom?

3.3. Riješi u skupu realnih brojeva jednadžbu

$$2^{\sin^2 x}=\sin x.$$

3.4. Dokaži da jednadžba $x^2+y^2-z^2+2xy=202$ nema cjelobrojno rješenje.

3.5. Dan je valjak visine $10\,\mathrm{cm}$. Na obodima njegovih osnovki označene su točke A i B takve da je $\overline{AB}$ paralelno s osi valjka. Spojimo li točke A i B najkraćom linijom koja jednom obilazi oko valjka (po plaštu), njena duljina će biti $15\,\mathrm{cm}$. Kolika je duljina najkraće linije koja dvaput obilazi oko valjka i spaja točke A i B?

3.6. Dokaži da suma kotangensa kutova trokuta ne može biti jednaka nuli.

3.7. Nađi sve dvoznamenkaste prirodne brojeve a za koje jednadžba

$$2^{x+y}=2^x+2^y+a$$

ima rješenje (x,y) u prirodnim brojevima.

3.8. Zadan je pravokutni trapez kome se može upisati kružnica. Ako udaljenosti središta upisane kružnice od krajeva duljeg kraka iznose $15\,\mathrm{cm}$ i $20\,\mathrm{cm}$, kolika je površina trapeza?

4. razred

4.1. Dokaži da za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

4.2. Dana je elipsa čija je jednadžba $x^2 + 4y^2 = 36$. Kružnica k ima središte u točki $(0,3)$ i prolazi žarištima dane elipse. Odredi sva sjecišta kružnice k s elipsom.

4.3. Koliki je ostatak pri dijeljenju broja $(\mathrm{ABCDE2010})_{15}$ brojem 7?

Brojevi se u bazi 15 *pišu pomoću znamenaka* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E *čije su vrijednosti redom* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.

4.4. Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) takvih da vrijedi $m^5 + n^2 = 1700$.

4.5. Stazu pravokutnog oblika širine $1.5\,\mathrm{m}$ i duljine $20\,\mathrm{m}$ treba popločati jednakim pločama oblika jednakokračnog pravokutnog trokuta s katetama duljine $50\,\mathrm{cm}$, tako da katete budu paralelne stranicama tog pravokutnika. Odredi broj načina na koji je to moguće napraviti.

4.6. Odredi sve vrijednosti koje može poprimiti izraz

$$\left| \frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{4z} \right|,$$

pri čemu je z kompleksan broj različit od nule.

4.7. U pravokutnom trokutu težišnica i simetrala pravog kuta dijele hipotenuzu na tri dijela čije duljine, u nekom poretku, čine aritmetički niz. Odredi sve moguće omjere duljina kateta tog trokuta.

Tri broja čine aritmetički niz ako je suma najmanjeg i najvećeg jednaka dvostrukom srednjem broju.

4.8. Unutar kvadrata stranice duljine 10 nalazi se šest različitih točaka raspoređenih tako da je udaljenost između svake dvije od njih cjelobrojna. Dokaži da među tim udaljenostima postoje dvije jednake.

Srednja škola — B varijanta

1. razred

1.1. Rastavite na faktore izraz $x^5 - 5x^3 + 4x$.

1.2. Izračunajte

$$\frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}} \cdot \frac{x+5}{x-1}.$$

1.3. Otac je od kćeri stariji 33 godine, a prije 11 godina kći je od njega bila 4 puta mlađa. Koliko otac ima godina?

1.4. Ortocentar jednakokračnog trokuta nalazi se u jednom od vrhova trokuta. Ako su duljine krakova $3\sqrt{2}$ cm, kolika je duljina polumjera tom trokutu opisane kružnice?

1.5. Neka su A, B, C točke na kružnici sa središtem u točki S takve da je $\sphericalangle SBC = 30^\circ$, a $\sphericalangle BCA = 50^\circ$. Koliko iznosi mjera kuta $\sphericalangle ABC$? (Točka S nalazi se unutar trokuta ABC.)

1.6. Autobus krene iz početne stanice sa stanovitim brojem putnika. Na prvoj stanici izađe 20% putnika, a uđe 24 putnika. Na idućoj stanici izađe $\frac{2}{3}$ putnika, a nitko ne uđe. Na posljednjoj se stanici iskrca preostalih 16 putnika. Koliko je putnika ušlo u autobus na početnoj stanici?

1.7. Ako su a, b realni brojevi takvi da vrijedi $a < -2$, $b < 2$, onda je $b - a > 2 - \frac{1}{2}ab$. Dokažite!

1.8. Suma dvoznamenkastog broja i broja koji ima iste znamenke, ali napisane obrnutim redoslijedom je potpuni kvadrat. Odredite sve takve brojeve!

2. razred

2.1. Riješite jednadžbu

$$\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-6\right) - 2\left(\sqrt{x}-2\right) = -11.$$

2.2. Izračunajte unutarnji kut pravilnog mnogokuta ako je ukupan broj svih stranica i dijagonala jednak 105.

2.3. Dana je jednadžba $x^2 - px + q = 0$, gdje su p i q pozitivni realni brojevi. Ako je razlika rješenja jednadžbe 1, a zbroj rješenja 2, izračunajte p i q.

2.4. Odredite sve prirodne brojeve x koji zadovoljavaju sustav nejednadžbi

$$x - \frac{6}{x} \geqslant 1, \qquad \frac{1}{x-6} \leqslant 0.$$

2.5. Kojom znamenkom završava zbroj svih pozitivnih djelitelja broja 105 ?

2.6. Izračunajte površinu lika kojeg u Gaussovoj ravnini određuje skup kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $|z-1-i| \leqslant \sqrt{2}$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$.

2.7. Poprečni presjek tunela ima oblik parabole. Najveća širina tunela je 6 m, a najveća visina 8 m. Može li kamion širine 4 m i visine 4.5 m proći kroz taj tunel? Obrazložite! Ako je visina kamiona 4 m, do koliko najviše metara može iznositi njegova širina tako da prođe kroz tunel?

2.8. Dvije kružnice dodiruju se iznutra u točki F. Promjer jedne kružnice je 8 cm, a promjer druge dvostruko je manji. Iz rubne točke T promjera $\overline{TF}$ veće kružnice konstruiramo tangentu na manju kružnicu. Ako je točka E sjecište ($E \neq T$) tangente i veće kružnice, a S_1 središte manje kružnice, odredite opseg trokuta TS_1E.

3. razred

3.1. Izračunajte

$$\frac{\operatorname{tg} 58^\circ - \operatorname{tg} 28^\circ}{1 + \operatorname{tg} 58^\circ \operatorname{ctg} 62^\circ}.$$

3.2. Riješite nejednadžbu

$$16^{\sin 3x} - 4 \geqslant 0.$$

3.3. Izračunajte

$$\frac{1}{\log_2 n^2} + \frac{1}{\log_{\frac{3}{2}} n^2} + \frac{1}{\log_{\frac{4}{3}} n^2} + \ldots + \frac{1}{\log_{\frac{n}{n-1}} n^2}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

3.4. Oko kružnice promjera 5 cm opisan je jednakokračni trapez površine 36 cm^2. Odredite opseg trapeza.

3.5. Za koje realne brojeve x funkcija $f(x) = \sin x - \cos^2 x - 1$ ima najmanju vrijednost?

3.6. U unutrašnjosti kvadrata $ABCD$ postoji točka M takva da je $|MA| = 7$ cm, $|MB| = 13$ cm i $|MC| = 17$ cm. Izračunajte površinu kvadrata $ABCD$.

3.7. Riješite jednadžbu

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(2010x).$$

3.8. Pravilnu četverostranu krnju piramidu čiji su osnovni bridovi $a = 12$ cm i $c = 8$ cm, a svi bočni bridovi $b = 20$ cm, presijeca ravnina koja prolazi kroz krajnju točku dijagonale manje osnovke okomito na tu dijagonalu. Koliko je oplošje manjeg dijela piramide koji je nastao tim presijecanjem?

4. razred

4.1. Riješite jednadžbu

$$\sin x - \cos x + \operatorname{tg} x = 1.$$

4.2. Odredite jednadžbu kružnice koja dira pravac $x - 3y + 4 = 0$, a središte joj se nalazi na pravcima $2x - 3y - 9 = 0$ i $y + 1 = 0$.

4.3. Odredite vrijednosti realnog parametra a, ako je koeficijent uz linearni član u razvoju binoma $\left(x + \dfrac{1}{ax^2}\right)^7$ jednak $\dfrac{7}{3}$?

4.4. Ako je z rješenje jednadžbe $z^2 - z + 1 = 0$, koliko je $z^{2010} - z^{1005} + 1$?

4.5. Elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ i parabola $y^2 = 2px$ sijeku se u točki $T(4\sqrt{3}, 2)$. Kolika je površina trokuta TF_EF_P, ako je F_E fokus elipse koji se nalazi na pozitivnom dijelu osi x, a F_P fokus parabole?

4.6. Jednadžbe pravaca na kojima leže dvije stranice trokuta su $AB : 3x + y - 3 = 0$, $AC : 3x + 4y = 0$. Ako je jednadžba simetrale kuta β jednaka $s_\beta : x - y + 5 = 0$, odredite koordinate vrhova trokuta ABC.

4.7. Riješite jednadžbu

$$\binom{x}{x-3} + 4 \cdot \binom{x+1}{x-2} + \binom{x+2}{3} = 125.$$

4.8. Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$\sin 1 + \sin 3 + \sin 5 + \ldots + \sin(2n-1) = \frac{\sin^2 n}{\sin 1}.$$

RJEŠENJA

Osnovna škola

4.1. $2010+2010\cdot2+2010\cdot3+2010\cdot4+2010\cdot5 = 2010\cdot(1+2+3+4+5) = 2010\cdot15 = 30\,150$.

4.2. $196-28:4+10\cdot(168-166) = 196-7+10\cdot2 = 189+20 = 209$.

4.3. Svaka knjiga ima po 2 korice pa je ukupan broj korica 6, a njihova ukupna debljina 12 mm. Ukupan broj stranica je $90+110+150$ odnosno 350. Zato je ukupna debljina svih stranica jednaka $350:10$ odnosno 35 mm. Na kraju, debljina svi knjiga zajedno je $12+35$ odnosno 47 mm.

4.4. Najveći jednoznamenkasti broj je 9, a najveći dvoznamenkasti broj je 99 pa je $999 = 9+990 = 9+99\cdot10$. Dakle, treba dodati 10 puta.

4.5. Znamenka 7 se pojavljuje u brojevima 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 87 i 97. Dakle, znamenka 7 je napisana 20 puta.

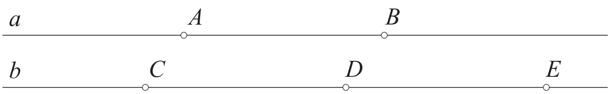
4.6. Ana $\Longleftrightarrow$ Beata, Ana $\Longleftrightarrow$ Cvijeta, Ana $\Longleftrightarrow$ Danijela, Ana $\Longleftrightarrow$ Ema, Beata $\Longleftrightarrow$ Cvijeta, Beata $\Longleftrightarrow$ Danijela, Beata $\Longleftrightarrow$ Ema, Cvijeta $\Longleftrightarrow$ Danijela, Cvijeta $\Longleftrightarrow$ Ema, Danijela $\Longleftrightarrow$ Ema.

Poklone mogu razmijeniti na 10 načina.

4.7. U utorak je obojio 4 letvice više nego u ponedjeljak, u srijedu 8 letvica više, u četvrtak 12 letvica više, u petak 16 letvica više i u subotu 20 letvica više nego u ponedjeljak. Kako je $4+8+12+16+20 = 60$, to znači da je obojio ukupno 60 letvica više nego da je svaki dan obojio kao u ponedjeljak.

S obzirom da je $246-60 = 186$ i $186:6 = 31$, onda je u ponedjeljak obojio 31 letvicu. U srijedu je obojio 8 letvica više nego u ponedjeljak odnosno 39 letvica.

4.8.



Sl. 1.6.

Dužine su: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CD}$, $\overline{CE}$ i $\overline{DE}$.

* * *

5.1. 18 ima 6 djelitelja: 1, 2, 3, 6, 9 i 18. 24 ima 8 djelitelja: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 i 24. 49 ima 3 djelitelja: 1, 7 i 49. Najviše djelitelja ima broj 24.

5.2. Kako su razlike uzastopnih članova te je $10:5=2$ i $20:10=2$, onda sljedeća razlika treba biti $20\cdot2=40$, a zatim $40\cdot2=80$. Zato u nizu slijedi broj $37+40=77$ odnosno $77+80=157$. Dva broja koji nastavljaju niz su 77 i 157.

5.3. U zadanom vremenskom razdoblju sat će se oglasiti $87-1=86$ puta. Dijeljenjem $86:5$, dobit ćemo 17 i ostatak 1. Sat je u tom vremenu napravio 17 ciklusa tik, tak, tok, bim, bam te proizveo još jedan zvuk. Sljedeći po redu nakon tik jest zvuk tak.

5.4. $20=3+17$, $20=7+13$, $20=2+5+13$, $20=2+7+11$.

5.5. Ako je x najmanji od tih brojeva, srednji po veličini je $3x$, a najveći $3\cdot 3x=9x$. Uvjete zadatka opisuje jednadžba $x+3x+9x=481$. Tada je $13x=481$, odakle je $x=481:13=37$. Traženi brojevi su 37, 111 i 333.

5.6. Prirodni broj je djeljiv s 15 ako je djeljiv i s 3 i s 5. Da bi bio djeljiv s 5, zadnja znamenka mu mora biti 0. Da bi bio djeljiv s 3, zbroj znamenaka mu mora biti djeljiv s 3. Najmanji zbroj četvorki djeljiv s 3 je $4+4+4$. Traženi broj je broj 4440.

5.7. Traženi su brojevi oblika $\overline{abcde}$, pri čemu znamenke zadovoljavaju uvjete: b je iz skupa $\{3,5,7\}$ pa je biramo na 3 načina, c je iz skupa $\{6,8,9\}$ te je biramo na 3 načina, d je bilo koja od zadanih znamenaka pa je biramo na 8 načina, e je iz skupa $\{0,6,8\}$, no zbog $a=e$ mora biti $e\neq 0$ što znači da je biramo na 2 načina i a je određena znamenkom e. Ukupan broj brojeva koji zadovoljavaju uvjet je $1\cdot 3\cdot 3\cdot 8\cdot 2=144$.

5.8. Neka je x duljina kraće stranice pravokutnika izražena u centimetrima. Tada je duljina dulje stranice $4x$. Opseg tog pravokutnika je $2(x+4x)=20$ pa je $5x=10$, $x=2$. Stranica kvadrata dugačka je $4\cdot 2=8$ cm pa je površina $64\ \text{cm}^2$.

* * *

6.1. Kako je $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+0.5=1$ i $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+0=1$, onda i $\frac{1}{5}+0.2+x=1$. Dalje je $\frac{2}{5}+x=1$ odnosno $x=\frac{3}{5}$.

6.2. Neka je x ukupan broj kuglica u kutiji. Kako je $\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x=\frac{7}{12}x$, crvene i plave kuglice čine $\frac{7}{12}$ ukupnog broja kuglica. Preostale kuglice su zelene pa ih ima $x-\frac{7}{12}x=\frac{5}{12}x$. S obzirom da zelenih kuglica ima 10, vrijedi $\frac{5}{12}x=10$. Dakle, $x=10:\frac{5}{12}=24$. U kutiji su ukupno 24 kuglice.

6.3. Neka je x traženi broj. Prema uvjetima zadatka možemo pisati

$$\begin{aligned}
\frac{4+x}{9+x}&=2\cdot\frac{4}{9}=\frac{8}{9}\\
9(4+x)&=8(9+x)\\
36+9x&=72+8x\\
9x-8x&=72-36\\
x&=36
\end{aligned}$$

Traženi broj je 36.

6.4. Neka je α veličina kuta uz osnovicu tog trokuta. Tada je $\alpha + 20^\circ$ veličina kuta među krakovima tog trokuta. Zato vrijedi $\alpha+\alpha+\alpha+20^\circ = 180^\circ$. Dalje je $3\alpha + 20^\circ = 180^\circ$ odnosno $3\alpha = 160^\circ$ pa je $\alpha = 53^\circ 20'$. Kutovi trokuta su veličine $53^\circ 20'$, $53^\circ 20'$ i $73^\circ 20'$.

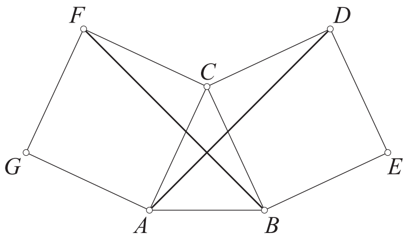
6.5. Neka je x količina dovezenog krumpira. Kako je $\frac{3}{7}x$ količina prodanog krumpira, onda je $x - \frac{3}{7}x = \frac{4}{7}x$ ostatak. Zato vrijedi $\frac{4}{7}x = \frac{3}{7}x + 210$. Dalje je $\frac{4}{7}x - \frac{3}{7}x = 210$ odnosno $\frac{1}{7}x = 210$. Na kraju je $x = 1470$. Dostavljač je na tržnicu dovezao 1470 kg krumpira.

6.6. Neka je x broj boca od $0.8\ \ell$. Tada je $78 - x$ broj boca od $\frac{3}{4}\ \ell$. Zato vrijedi $0.8 \cdot x + \frac{3}{4} \cdot (78 - x) = 60$. Rješavanjem jednadžbe slijedi $x = 30$. Napunjeno je 30 boca od $0.8\ \ell$ i 48 boca od $\frac{3}{4}\ \ell$.

6.7. Površinu pravokutnog trokuta računamo:

$$\frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$$
$$\frac{c \cdot 2.4}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2}$$
$$\frac{c \cdot 2.4}{2} = 6$$
$$c = 5 \text{ m.}$$

6.8.

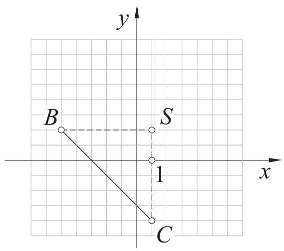


Sl. 1.7.

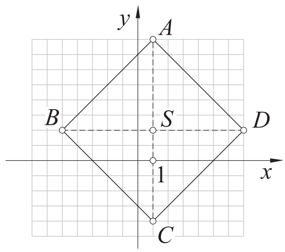
Prema uvjetima zadatka je $|AC| = |BC| = b$ (to su kraci jednakokračnog trokuta). Nadalje je $|CD| = |CF| = b$ (stranica kvadrata). Konačno, $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BCD| = \gamma + 90^\circ$ i $|\sphericalangle BCF| = |\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle ACF| = \gamma + 90^\circ$, pa vrijedi $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BCF|$. Prema poučku S-K-S o sukladnosti trokuta zaključujemo da je $\triangle ACD \cong \triangle BCF$. Iz dokazane sukladnosti slijedi $|AD| = |BF|$.

* * *

7.1.



Sl. 1.8.



Sl. 1.9.

Sjecište dijagonala kvadrata je u točki $S(1,2)$. Dijagonale kvadrata su okomite i jednakih duljina, a točka S je njihovo zajedničko polovište. Tada je $A(1,8)$ i $D(7,2)$.

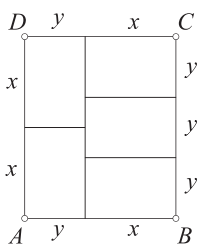
7.2. $1 : x = 4$ cm : 180 km = 4 cm : 18 000 000 cm, $x = \frac{18\,000\,000}{4} = 4\,500\,000$. Traženo mjerilo je $1 : 4\,500\,000$.

7.3. Iz uvjeta zadatka moguće je sastaviti jednakost $x_1 + x_2 + \ldots + x_{16} = 416$. Nakon što Hrvoje napusti skupinu jednakost glasi $x_1 + x_2 + \ldots + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 375$. Oduzimanjem druge jednakosti od prve dobivamo da je $x_{16} = 416 - 375$. Dakle, Hrvoje ima 41 godinu.

7.4. Neka je c početna cijena krumpira. To znači da domaćica raspolaže s $20 \cdot c$ kn. Nakon sniženja će nova cijena biti $c - 20\%c = 0.8c$. Ako je x količina krumpira kojeg može kupiti po novoj cijeni, onda vrijedi $x \cdot 0.8c = 20 \cdot c$. Rješavanjem jednadžbe slijedi $x = 25$. Po novoj cijeni se može kupiti 25 kg.

7.5. Prva osoba za jedan dan obavi $\frac{1}{12}$ posla, a druga osoba $\frac{1}{6}$ posla. Oni skupa za jedan dan mogu obaviti $\frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ posla. Dakle, za cijeli posao im treba 4 dana.

7.6.



Sl. 1.10.

Označimo dimenzije početnog pravokutnika s x i y. Vrijedi: $|BC| = 3y$, $|AB| = |DC| = x + y$, $|AD| = 2x$. Kako je $|BC| = |AD|$, onda je $3y = 2x$ odnosno $x = 1.5y$. Neka je P površina početnog pravokutnika. Tada je

$P = xy = 1.5y \cdot y$. Dalje je $P_{ABCD} = 5 \cdot P = 7.5y \cdot y = 750$ odnosno $y \cdot y = 100$ pa je $y = 10$ cm. Slijedi $x = 15$ cm; $|AB| = x + y = 25$ cm, $|BC| = 3y = 30$ cm. Na kraju, $O_{ABCD} = 2|AB| + 2|BC| = 110$ cm.

7.7. Produljeni razmjer $a : b : c = 2 : 5\frac{1}{3} : 3.2$ možemo pisati u obliku $a : b : c = 30 : 80 : 48$, odnosno $a : b : c = 15 : 40 : 24$. Tada vrijedi $a = 15x$, $b = 40x$ i $c = 24x$, $x \in \mathbf{Q}$. Prema uvjetu zadatka je $c = b - 8$ km, tj. $24x = 40x - 8$. Iz posljednje jednadžbe nalazimo $x = 0.5$. Udaljenosti tvornica A, B, C od luke su redom 7.5 km, 20 km, 12 km.

7.8. Neka je s_1 odnosno s_2 duljina puta od mjesta A do mjesta B odnosno duljina puta u povratku. Neka je t_1 odnosno t_2 vrijeme provedeno u vožnji od mjesta A do mjesta B odnosno u povratku. Neka je v_1 odnosno v_2 prosječna brzina na putu do mjesta B odnosno u povratku. Tada je $s_2 = s_1 - 0.26s_1$, $t_1 = 6\frac{45}{60} - \frac{30}{60} = 6\frac{15}{60} = 6\frac{1}{4}$ i $t_2 = 6\frac{45}{60} - \frac{35}{60} = 6\frac{10}{60} = 6\frac{1}{6}$. Dalje je $v_1 = \frac{s_1}{t_1}$ i $v_2 = \frac{s_2}{t_2}$. Zato vrijedi

$$v_1 : v_2 = \frac{s_1}{t_1} : \frac{s_2}{t_2} = \frac{s_1}{t_1} \cdot \frac{t_2}{s_2} = \frac{s_1 \cdot 6\frac{1}{6}}{6\frac{1}{4} \cdot 0.74s_1} = \frac{\frac{37}{6}}{\frac{25}{4} \cdot \frac{74}{100}} = \frac{37 \cdot 16}{6 \cdot 74} = \frac{4}{3}.$$

Dakle, $v_1 : v_2 = 4 : 3$.

* * *

8.1. Količnici uzastopnih članova su 2, 4, 8. Kako je $4 : 2 = 2$ i $8 : 4 = 2$, onda sljedeći količnik treba biti $8 \cdot 2 = 16$, a zatim $16 \cdot 2 = 32$. Zato u nizu slijedi broj $192 \cdot 16 = 3072$ odnosno $3072 \cdot 32 = 98\,304$.

8.2. Potrebno je uočiti da je $10\,000^{9999} = (10^4)^{9999}$. Iz toga slijedi jednakost $(10^4)^{9999} = 10^{39996}$. Dakle, iza znamenke 1 biti će 39 996 nula, pa će broj imati 39 997 znamenaka.

8.3. Površina romba je jednaka polovini umnoška duljina njegovih dijagonala.

$$p = \frac{(\sqrt{2010} + \sqrt{2002}) \cdot (\sqrt{2010} - \sqrt{2002})}{2}$$

$$p = \frac{(\sqrt{2010})^2 - (\sqrt{2002})^2}{2}$$

$$p = \frac{2010 - 2002}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Površina romba iznosi 4 cm^2.

8.4. $\dfrac{4a^2 - 4ab}{a^3 - ab^2} = \dfrac{4a \cdot (a - b)}{a \cdot (a^2 - b^2)} = \dfrac{4 \cdot a \cdot (a - b)}{a \cdot (a - b) \cdot (a + b)} = \dfrac{4}{a + b}$.

8.5. Vrijedi $a^2 - 4a + 2010 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + 2010 = (a - 2)^2 + 2006$. Za $a = 2$ najmanja vrijednost je 2006.

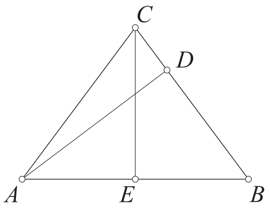
8.6. Iz $a : b = 8 : 15$ slijedi da je $a = 8x$ i $b = 15x$, $x \in \mathbf{Q}$. Primjenom Pitagorina poučka dobiva se $c^2 = (8x)^2 + (15x)^2$, tj. $c^2 = 289x^2$. Duljina hipotenuze je $c = 17x$. Opseg trokuta je 100 cm pa je $8x + 15x + 17x = 100$. Rješavanjem ove jednadžbe dobivamo $x = 2.5$. Duljine stranica trokuta su $a = 20$ cm, $b = 37.5$ cm i $c = 42.5$ cm.

8.7. Broju n prethodnik je broj $n - 1$, a sljedbenik $n + 1$. Iz uvjeta zadatka slijedi jednadžba:

$$\begin{aligned} n^2 - 49 &= 3(n-1)^2 - 2(n+1)^2 \\ n^2 - 49 &= 3(n^2 - 2n + 1) - 2(n^2 + 2n + 1) \\ n^2 - 49 &= 3n^2 - 6n + 3 - 2n^2 - 4n - 2 \\ 10n &= 50 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

Traženi broj je 5, a njegov sljedbenik 6.

8.8.



Sl. 1.11.

Neka su $\overline{AD}$ visina na krak $\overline{BC}$ i $\overline{CE}$ visina na osnovicu $\overline{AB}$. Kako je $|BC| < |AB|$, onda je $|AD| > |CE|$. To znači da je $|AD| = 24$ cm, a $|CE| = 20$ cm. Kako je $P = \dfrac{|AB| \cdot |CE|}{2} = \dfrac{|BC| \cdot |AD|}{2}$, onda vrijedi $20|AB| = 24|BC|$ odnosno $|AB| = \dfrac{6}{5}|BC|$. Primijenimo li Pitagorin poučak na $\triangle BCE$, slijedi $20^2 + \left(\dfrac{|AB|}{2}\right)^2 = |BC|^2$ odnosno nakon sređivanja $|BC| = 25$ cm i $|AB| = 30$ cm. Na kraju, $O = |AB| + 2 \cdot |BC| = 30 + 2 \cdot 25 = 80$ cm.