1.

Školsko (gradsko) natjecanje

Školsko natjecanje prva je razina natjecanja iz matematike za koju zadatke sastavlja Državno povjerenstvo za matematička natjecanja. Školska natjecanja održana su diljem Hrvatske u ponedjeljak 24. siječnja 2011.

U većim gradovima škole se udružuju i to natjecanje organiziraju zajednički, pa se tada naziva gradsko, općinsko ili međuškolsko natjecanje. U tom slučaju, ovoj razini natjecanja može prethoditi "pravo" školsko natjecanje, koje škole organiziraju samostalno (uključujući i sastavljanje testova).

Svi učenici rješavaju po osam zadataka. Prvih pet su lakši i boduju se s 4 boda svaki, a zadnja tri su teža i svaki vrijedi 10 bodova. Za učenike osnovnih škola natjecanje traje dva sata, a za učenike srednjih škola tri sata.

Prema prikupljenim podacima, na školskoj razini natjecanja sudjelovalo je preko 20000 učenika. Evo pregleda po razredima:

	OŠ	A	B
	4.r – 5985		
	5.r – 3613	1.r – 336	1.r – 699
	6.r – 2958	2.r – 232	2.r – 624
	7.r – 2388	3.r – 239	3.r – 474
	8.r – 2168	4.r – 193	4.r – 422
ukupno	17 114	1000	2219

ZADACI

Osnovna škola

4. razred

4.1. Broju 2754863 izbriši tri znamenke tako da novi broj bude:

a) najveći mogući; b) najmanji mogući.

4.2. U brojevni izraz $24 + 36 : 6 + 3 \cdot 4 - 2$ dodaj zagrade tako da njegova vrijednost bude:

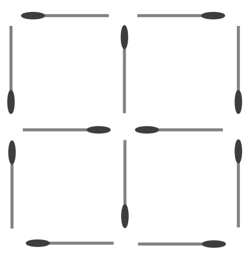
a) 16; b) 24.

4.3. U kvadratiće upiši odgovarajuće znamenke tako da naznačeno oduzimanje bude točno.

$$\begin{array}{ccccc} & \square & 0 & \square & \square \\ - & 3 & \square & 0 & 4 \\ \hline & 5 & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

4.4. Lik na slici napravljen je od 12 šibica. Ukloni dvije šibice tako da ostanu:

a) 3 kvadrata; b) 2 kvadrata.



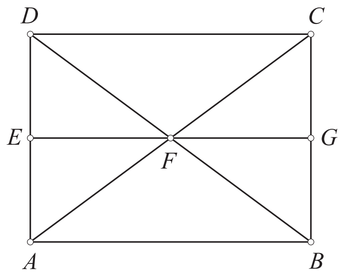
Sl. 1.1.

4.5. Ispiši sve troznamenkaste brojeve kojima je znamenka desetica 6, a zbroj svih znamenaka 10.

4.6. Marko u siječnju želi na zimovanje. Počeo je štedjeti u rujnu i uštedio je 387 kn. U listopadu je uštedio 269 kn više nego u rujnu, a u studenome 55 kuna manje nego u prva dva mjeseca zajedno. Prosinac je donio Marku trećinu ukupne uštede u prva tri mjeseca. Ima li Marko dovoljno za zimovanje, ako je cijena zimovanja 2950 kn?

4.7. Na pitanje koliko mu je godina jedan matematičar je odgovorio: "Ako od broja mojih godina oduzmeš 5, dobiveni broj podijeliš brojem 5 te od rezultata ponovo oduzmeš 5, dobit ćeš broj 5." Koliko mu je godina?

4.8. Koliko je trokuta nacrtano na slici? Ispiši ih.



Sl. 1.2.

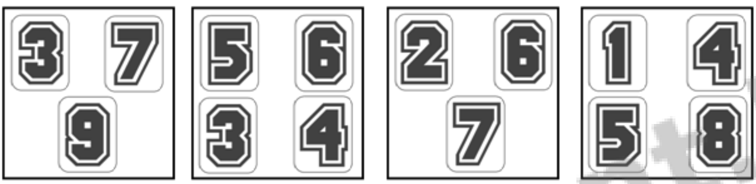
5. razred

5.1. U izrazu $2 : 2 : 2 : 2 : 2$ rasporedi zagrade tako da rezultat bude jednak 2. Nađi dva različita načina!

5.2. Nabroji sve troznamenkaste brojeve djeljive brojem 9 kojima su znamenke prosti brojevi.

5.3. Odredi najveći troznamenkasti broj koji pri dijeljenju brojem 18 ima ostatak 11.

5.4. U kutijama su kartice na kojima su napisani brojevi manji od 10. Izbaci kartice iz kutija tako da u svakoj kutiji ostane točno jedna kartica na kojoj je napisan prost broj, te da različite kutije sadrže kartice s različitim prostim brojevima. Koje kartice trebaju ostati u pojedinoj kutiji?



Sl. 1.3

5.5. Djed i unuk imaju zajedno 78 godina. Koliko godina ima unuk, a koliko djed ako se zna da unuk ima onoliko mjeseci koliko djed ima godina?

5.6. Ivan, Josip i Tomislav imaju zajedno 12 000 kuna. Ivan polovinu svog novca podijeli na dva jednaka dijela i da ih Josipu i Tomislavu, a drugu polovinu zadrži za sebe. Isto tako postupi Josip, a zatim i Tomislav, poslije čega sva tri prijatelja imaju jednak iznos novca. Koliko je novca imao svaki od dječaka na početku?

5.7. U broju $\overline{1x33y}$ odredi znamenke x i y tako da broj bude djeljiv brojem 15.

5.8. Zadana su dva usporedna pravca a i b. Na pravcu a istakni redom točke A, B, C i D, a na pravcu b redom točke E, F i G. Koliko je četverokuta određeno tim točkama?

6. razred

6.1. Dva se pravca sijeku i određuju četiri kuta tako da zbroj veličina triju kutova iznosi $322°$. Kolike su veličine svakog pojedinog kuta?

6.2. U prvom je satu biciklist prešao $25\frac{1}{2}$ km. U drugom je satu prešao $1\frac{3}{4}$ km više nego u prvom satu. U trećem je satu prešao $12\frac{1}{8}$ km manje nego u prva dva sata zajedno. Koliko mu još preostaje do cilja ako je duljina planiranog puta 100 km?

6.3. Duljine dviju stranica trokuta su 7 cm i 2.5 cm. Kolika može biti duljina treće stranice, ako je njezina duljina izražena u centimetrima prirodan broj?

6.4. Recipročna vrijednost razlike dvaju brojeva je $\frac{3}{4}$. Ako je umanjitelj jednak $\frac{5}{18}$, koliki je umanjenik?

6.5. Usporedi razlomke $\dfrac{58\,762\,010}{58\,762\,011}$ i $\dfrac{73\,452\,011}{73\,452\,012}$ i obrazloži dobiveni zaključak.

6.6. Točke E i F su redom polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ pravokutnika $ABCD$. Kolika je površina trokuta AEF ako je površina pravokutnika 44 cm^2?

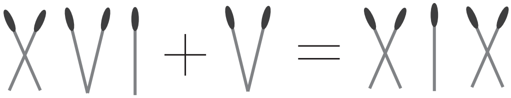
6.7. Izračunaj: $$\frac{6-\left(37.2:18-5:3\frac{4}{7}\right)\cdot 3}{6.3\cdot\left(\frac{29}{30}+\frac{14}{45}+\frac{47}{54}\right)-13}.$$

6.8. Prvi je dan obitelj zečeva pojela $\frac{1}{6}$ uroda kupusa na nekoj njivi. Drugi su dan pojeli $\frac{1}{5}$ preostalog kupusa, treći dan $\frac{1}{4}$ ostatka, četvrti su dan pojeli $\frac{1}{3}$ ostatka, a peti je dan pojedena $\frac{1}{2}$ ostatka kupusa. Koliki dio uroda kupusa na toj njivi nije pojeden?

7. razred

7.1. Riješi jednadžbu: $\frac{3x-1}{12}-\frac{2x+3}{4}-\frac{x-5}{3}=2$.

7.2. Premjesti samo jednu šibicu tako da dobiješ točnu jednakost te odredi sva rješenja.



Sl. 1.4.

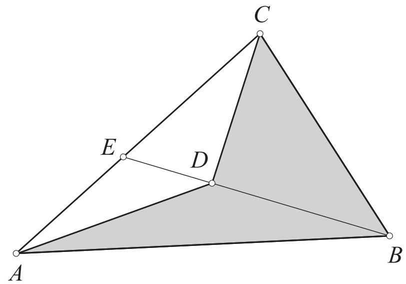
7.3. Dva se broja odnose kao $3:5$, a trećina je njihova zbroja $\frac{32}{3}$. Koji su to brojevi?

7.4. Prosjek starosti 5 igrača košarkaške ekipe koji su trenutno u igri je 24 godine i 6 mjeseci. Ako se u računanje prosjeka uključe i godine trenera, onda je prosjek starosti 27 godina. Koliko godina ima trener?

7.5. Odredi najmanji prirodan broj koji je djeljiv s 15, a znamenke su mu 0 ili 4.

7.6. Ubrano je 600 kg gljiva čija je vlažnost 98%. Nakon sušenja vlažnost je smanjena na 96%. Kolika je masa gljiva nakon sušenja?

7.7. Površina četverokuta $ABCD$ iznosi $48\ \text{cm}^2$ i točka D pripada dužini $\overline{BE}$ tako da je $|ED|:|DB|=1:2$. Kolika je površina trokuta $\triangle ABC$?



Sl. 1.5.

7.8. Iz pravokutnog trokuta ABC s katetama duljine $a=3$ cm i $b=4$ cm izrezan je kvadrat tako da mu dvije stranice pripadaju katetama, a četvrti vrh je na hipotenuzi. Za koliko je površina kvadrata manja od površine trokuta?

8. razred

8.1. Koji cijeli broj je najbliži broju b, ako je

$$b = (1 - \sqrt{2})^2 : 4 + \frac{1}{\sqrt{2}}?$$

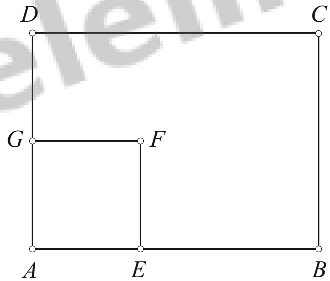
8.2. Nakon sniženja od 12.5% cijena igraće konzole je 2044 kn. Kolika je bila cijena igraće konzole prije sniženja?

8.3. Izračunaj vrijednost izraza $\dfrac{a^2 + b^2}{ab}$ ako je $\dfrac{a+b}{b} = 3$.

8.4. Pradjed ima četvero djece, svako njegovo dijete ima po četvero djece, i svako od te djece ima po četvero djece. Koliko ukupno potomaka ima pradjed?

8.5. Odredi površinu kvadrata istog opsega kao i pravilni šesterokut površine $96\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

8.6. Iz pravokutnika $ABCD$ izrezan je kvadrat $AEFG$, tako da je površina nastalog mnogokuta $216\ \text{cm}^2$. Ako je $|\overline{EB}| = 0.8\ \text{dm}$, $|\overline{GD}| = 6\ \text{cm}$, kolika je površina kvadrata $AEFG$?

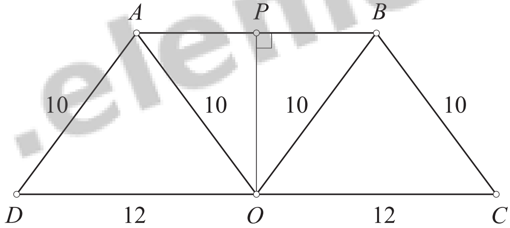


Sl. 1.6.

8.7. Za koje je sve cijele brojeve n vrijednost razlomka $\dfrac{n^2 + 2n - 8}{n^2 - 4}$ cijeli broj?

8.8. Za tri sukladna jednakokračna trokuta $\triangle DAO$, $\triangle AOB$ i $\triangle OBC$ vrijedi $|AD| = |AO| = |OB| = |BC| = 10\ \text{cm}$ i $|AB| = |DO| = |OC| = 12\ \text{cm}$. Ova tri trokuta tvore trapez $ABCD$ kao na slici. Točka P je na stranici $\overline{AB}$ tako da je dužina $\overline{OP}$ okomita na stranicu $\overline{AB}$.

Točka X je polovište stranice $\overline{AD}$, a točka Y je polovište stranice $\overline{BC}$. Dužina $\overline{XY}$ dijeli trapez na dva manja trapeza. Koliki je omjer površina trapeza $ABYX$ i trapeza $XYCD$?



Sl. 1.7.

Srednja škola — A varijanta

1. razred

1.1. Ako pola ekipe radnika za trećinu dana obavi četvrtinu posla, koliko će ekipa uz iste uvjete obaviti 15 poslova za pet dana?

1.2. U trokutu ABC vrijedi $\sphericalangle BAC = 120°$. Točka D nalazi se unutar trokuta tako da vrijedi $\sphericalangle DBC = 2\sphericalangle ABD$ i $\sphericalangle DCB = 2\sphericalangle ACD$. Izračunaj mjeru kuta $\sphericalangle BDC$.

1.3. Marko danas slavi rođendan. Njegov otac Joško i djed Luka razgovaraju:

– Sada su i Markov i tvoj i moj broj godina prosti brojevi!

– Da, a za pet godina sva tri će biti kvadrati prirodnih brojeva.

Koliko je godina imao Luka na dan Markovog rođenja?

1.4. Neka su a, b i c realni brojevi takvi da je

$$a+b+c=3 \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0.$$

Koliko je $a^2+b^2+c^2$?

1.5. Koliko najmanje elemenata treba izbaciti iz skupa

$$\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16\}$$

tako da umnožak preostalih elemenata bude kvadrat prirodnog broja?

1.6. Zbroj duljina krakova trapeza iznosi $4\sqrt{10}$, a duljina visine 6. Površina trapeza je 72. Ako je taj trapez upisan u kružnicu, odredi polumjer te kružnice.

1.7. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 2011 koji su djeljivi barem jednim od brojeva 2 i 7, a nisu djeljivi brojem 5?

1.8. Dokaži da ne postoje neparni cijeli brojevi x, y, z za koje vrijedi
$$(x-z)^2+(y-z)^2=(x+y)^2.$$

2. razred

2.1. Odredi sve prirodne brojeve n za koje je $\dfrac{n-1}{n-5}$ cijeli broj.

2.2. Neka je $ABCD$ kvadrat stranice 1. Kružnica k ima polumjer 1 i središte u točki C. Odredi polumjer kružnice k_1 koja dira kružnicu k i dužine $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$.

2.3. Odredi sve realne brojeve a takve da, za svaki realan broj x, vrijedi
$$\frac{x}{x^2+2x+3}>\frac{x+a}{1+x+x^2}.$$

2.4. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi
$$|z|=|z+1|=\left|\frac{1}{z}\right|.$$

2.5. Mario je napisao 30-znamenkasti prirodni broj čiji je zbroj znamenaka 123. Zatim je iza tog broja dopisao još jednom sve njegove znamenke u nekom drugom poretku. Dokaži da dobiveni 60-znamenkasti broj nije kvadrat prirodnog broja.

2.6. Neka su a, b i c tri različita realna broja od kojih niti jedan nije jednak nula. Promatramo kvadratne jednadžbe:
$$ax^2+bx+c=0,\quad bx^2+cx+a=0,\quad cx^2+ax+b=0.$$
Ako je $\dfrac{c}{a}$ rješenje prve jednadžbe, dokaži da sve tri jednadžbe imaju zajedničko rješenje. Odredi umnožak drugih triju rješenja tih jednadžbi (ne-zajedničkih).

2.7. U četverokutu $ABCD$ vrijedi
$$\sphericalangle ABC=\sphericalangle ADC=90^\circ,\quad |AB|=|BC|,\quad |CD|+|DA|=m.$$
Odredi površinu četverokuta $ABCD$ u ovisnosti o m.

2.8. Ivan, Stipe i Tonći izmjenjuju se u bacanju kockice. Prvi baca Ivan, onda Stipe pa Tonći, i nakon toga opet Ivan i tako dalje istim redom. Svaki od njih, kad je njegov red, baca kockicu jednom, sve dok ne dobije prvu "šesticu". Nakon što dobije svoju prvu šesticu, u svakom idućem bacanju Ivan baca kockicu četiri, Stipe šest, a Tonći osam puta.

Tonći je zadnji dobio prvu šesticu, u svom desetom bacanju, i tada je igra završila. Ako je kockica bačena 47 puta, odredi tko je od njih kockicu bacao najviše puta.