# 1.

# Školsko (gradsko) natjecanje

Školsko natjecanje prva je razina natjecanja iz matematike za koju zadatke sastavlja Državno povjerenstvo za matematička natjecanja. Školska natjecanja održana su diljem Hrvatske u utorak 14. veljače 2012.

U većim gradovima škole se udružuju i to natjecanje organiziraju zajednički, pa se tada naziva gradsko, općinsko ili međuškolsko natjecanje. U tom slučaju, ovoj razini natjecanja može prethoditi "pravo" školsko natjecanje, koje škole organiziraju samostalno (uključujući i sastavljanje testova).

Svi učenici rješavali su po osam zadataka. Prvih pet su lakši i bodovali su se s 4 boda svaki, a zadnja tri su teža i svaki je vrijedio 10 bodova. Za učenike osnovnih škola natjecanje je trajalo dva sata, a za učenike srednjih škola tri sata.

Prema prikupljenim podacima, na školskoj razini natjecanja sudjelovalo je nešto manje od 20 000 učenika. Evo pregleda po razredima:

| | OŠ | A | B |
|---|---|---|---|
| | 4.r – 5628 | | |
| | 5.r – 3624 | 1.r – 296 | 1.r – 735 |
| | 6.r – 2818 | 2.r – 255 | 2.r – 634 |
| | 7.r – 2282 | 3.r – 201 | 3.r – 468 |
| | 8.r – 2034 | 4.r – 187 | 4.r – 386 |
| ukupno | 16 386 | 939 | 2223 |

# ZADACI

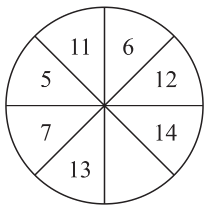
## Osnovna škola

### 4. razred

**4.1.** U brojevni izraz $36 + 144 : 9 - 3 \cdot 2$ dodaj zagrade tako da njegova vrijednost bude:

a) 84; b) 14.

**4.2.** Na crtežu su brojevi raspoređeni po određenom pravilu. Na osnovi istog pravila odredi broj koji nedostaje.




*Sl. 1.1.*

**4.3.** Koji broj različit od jedan zamjenjuje trokut, koji kvadrat, a koji krug ako je:

$$12 = \triangle \cdot \triangle \cdot \bigcirc,$$
$$24 = \triangle \cdot \bigcirc \cdot \square ?$$

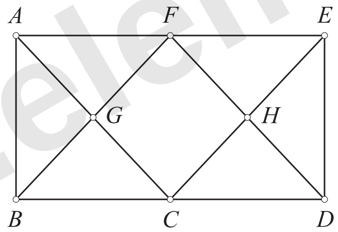
**4.4.** Karlo je gledao film koji je počeo u 17 sati i 50 minuta. Za vrijeme filma prikazane su dva puta reklame, jednom u trajanju od 4 minute, a drugi put u trajanju od 6 minuta. Prikazivanje filma završilo je u 19 sati i 45 minuta. Koliko bi trajalo prikazivanje samog filma bez reklama?

**4.5.** U ispitu iz matematike Josip je točno riješio 6 zadatka, Danijel je 5 zadatka riješio netočno, a Petar je imao isti broj točnih i netočnih rješenja. Koliko su zadataka riješila sva trojica zajedno ako je Josip točno riješio dvostruko više zadataka od Danijela?

**4.6.** Na šest hrastova bilo je 129 ptica. U jednom trenutku odletjelo je s prvog 6, s drugog 11, s trećeg 8, s četvrtog 10, s petog 7 i sa šestog 9 ptica. Tada je na svakom hrastu ostao jednak broj ptica. Koliko je ptica bilo na svakom hrastu na početku?

**4.7.** Danas, na Valentinovo, 11 učenika i 7 učenica četvrtoga razreda međusobno su izmijenili darove. Svaka je djevojčica svakom dječaku poklonila po jednu čokoladicu. Svaki je dječak djevojčicama uručio bombone na sljedeći način: jednoj djevojčici jedan bombon, drugoj dva, trećoj tri, i tako dalje, povećavajući broj bombona za jedan, sve do posljednje djevojčice. Koliko je danas ukupno poklonjeno slatkiša?

**4.8.** Koliko je trokuta na slici? Ispiši ih.




*Sl. 1.2.*

## 5. razred

**5.1.** Izračunaj $\{24 + [15 \cdot (312 - 12 \cdot 8) - 18] : 3\} - 68$.

**5.2.** Joško je zbrojio najveći troznamenkasti broj djeljiv brojem 9 i najmanji troznamenkasti broj koji nije djeljiv brojem 9, a Fran je zbrojio najveći troznamenkasti broj koji nije djeljiv brojem 9 i najmanji troznamenkasti broj djeljiv brojem 9. Koji je zbroj veći i za koliko?

**5.3.** Broj 100 000 napiši kao umnožak dvaju prirodnih brojeva u čijem zapisu nema niti jedne znamenke 0.

**5.4.** Koja je 2012. znamenka u nizu 01234321001234321001 2...?

**5.5.** Odredi nepoznati broj $x$ i obrazloži.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 22 | 13 | 16 |
| 144 | 176 | 143 | 192 |
| 16 | 8 | 11 | $x$ |

**5.6.** Duljine stranica pravokutnika izražene su prirodnim brojevima (u cm), a površina mu je $196 \text{ cm}^2$. Koliko ima takvih pravokutnika i koji od njih ima najveći opseg?

**5.7.** Koliko ima troznamenkastih prirodnih brojeva kojima je umnožak znamenaka jednak 28? Napiši ih!

**5.8.** Odredi sve troznamenkaste brojeve $\overline{abc}$ djeljive brojevima 4 i 13 kojima je zbroj znamenaka jednak 18.

## 6. razred

**6.1.** Izračunaj:

$$1\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5} - \frac{2}{5} : 2\frac{2}{7}.$$

**6.2.** Jedna cijev može napuniti bazen za 5 sati, a druga za 3 sata. Za koliko bi vremena (sati, minuta i sekundi) bazen napunile obje cijevi da bazen pune zajedno?

**6.3.** U trokutu $ABC$ veličina kuta $\alpha = 50^\circ$, a simetrala kuta $\alpha$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki $D$ te vrijedi $|AD| = |AC|$. Izračunaj veličine kutova $\beta$ i $\gamma$.

**6.4.** Tri brata su podijelila određenu svotu novca na način da je prvi dobio $\frac{1}{5}$ ukupne svote, drugi $\frac{5}{8}$ ukupne svote, a treći ostatak. Međutim, treći brat je prvom dao $\frac{3}{4}$ svog dijela, a drugom sve ostalo. Koliki dio ukupne svote novca je dobio prvi brat?

**6.5.** Dva pravca sijeku se u točki $S$. Zbroj veličina šiljastih kutova, koji pritom nastaju, jednak je polovini veličine tupoga kuta. Odredi veličine šiljastih i tupih kutova.

**6.6.** Koliko ima četveroznamenkastih brojeva napisanih znamenkama 0, 1, 2, 4 i 5 koji su djeljivi brojem 5, a koliko onih koji nisu djeljivi brojem 5? Kojih ima više i za koliko?

**6.7.** Zbroj brojnika i nazivnika nekog razlomka iznosi 2012, a njegova je vrijednost $\frac{1}{3}$. Koji je to razlomak?

**6.8.** Duljine susjednih stranica nekog pravokutnika razlikuju se za 4.2 cm, a njegov je opseg 23.2 cm. Nad njegovom duljom stranicom kao osnovicom nacrtan je s vanjske strane jednakokračan trokut kojemu je opseg jednak opsegu pravokutnika. Odredi duljine stranica tog trokuta.

## 7. razred

**7.1.** U jednoj stambenoj zgradi postoje četiri stana. U prvom živi tročlana, u drugom i trećem četveročlana, a u četvrtom peteročlana obitelj. Zajednički račun za održavanje zgrade dijeli se u omjeru broja članova obitelji. Koliko posto od iznosa na računu treba uplatiti pojedina obitelj?

**7.2.** Koje koordinate ima točka $A\left(\frac{1}{2} - 2t, 0.5 - \frac{2-t}{3}\right)$, ako pripada osi apscisa koordinatnog sustava u ravnini?

**7.3.** Na skladištu je bila 1 tona krastavaca koji su sadržavali 94% vode. Nakon nekog vremena količina vode smanjila se na 92%. Kolika je tada bila masa krastavaca?

**7.4.** Zadan je paralelogram $ABCD$ kome su duljine stranica 12 cm i 8 cm. Dulja stranica $\overline{AB}$ produžena je preko točke $B$ za 5 cm i dobivena je točka $E$. Pravci $EC$ i $AD$ sijeku se u točki $F$. Izračunaj $|DF|$.

**7.5.** Iz skupa brojeva $\{1, 2, 3, \ldots, 200\}$ slučajno se bira jedan broj. Izračunaj vjerojatnost da će se dogoditi sljedeći slučajni događaj

$$A = \{\text{Izabran je broj koji nije djeljiv sa } 6\}.$$

**7.6.** Janica i Jelica za prijevod određenog broja stranica teksta trebaju 30 sati, Janica i Jurica trebaju 42 sata, a Jelica i Jurica će prijevod završiti za 35 sati. Koliko bi im vremena (sati i minuta) trebalo za taj prijevod kada bi radili svi troje zajedno?

**7.7.** Odredi sve parove cijelih brojeva $(a, b)$, za koje vrijedi

$$a = \frac{4b-5}{b-2}.$$

**7.8.** Dva stupa su visine 20 m i 30 m. Vrh svakog stupa povezan je s dnom onog drugog s nategnutim užetom. Na kojoj visini od tla se ta dva užeta križaju ako je udaljenost stupova 40 m?

## 8. razred

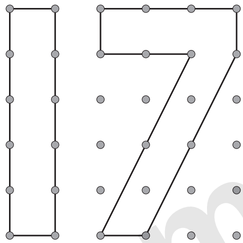
**8.1.** Izračunaj vrijednost izraza $I = 10 + 2 \cdot (x+1)^2 - x \cdot (4-3x)$, za $x = -20$.

**8.2.** Izračunaj vrijednost izraza $\sqrt{(\sqrt{3}-3)^2} - (\sqrt{3}-3)$.

**8.3.** Odredi koordinate točaka $A$ i $B$ pravca $p$ zadanog jednadžbom $y = -x + \sqrt{2}$ ako je apscisa točke $A$ broj $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, a ordinata točke $B$ broj $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

**8.4.** Ako je $x_1 : 7 = x_2 : 3 = x_3 : 2 = x_4 : 5$, pokaži da vrijedi jednakost $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \dfrac{(7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4)^2}{87}$.

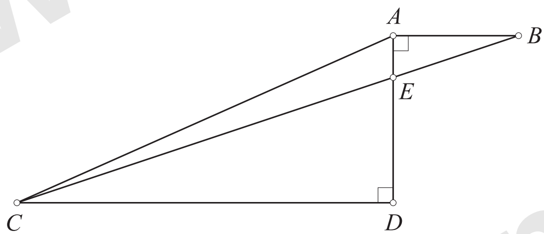
**8.5.** U kvadratnu mrežu točaka narisan je broj kao na slici 1.3, pri čemu je duljina stranice najmanjeg kvadrata mreže $a$ cm. Ako je površina brojki $2028 \text{ cm}^2$, odredi duljinu $a$.



*Sl. 1.3.*

**8.6.** Odredi sve prirodne brojeve $n$ za koje je $10^n + 5$ djeljiv s 15. Obrazloži rješenje.

**8.7.** Ako je $|AD| = 4$ cm, $|AB| = 3$ cm i $|CD| = 9$ cm, kolika je površina trokuta $AEC$ na slici 1.4?




*Sl. 1.4.*

**8.8.** Točka $D$ je polovište osnovice $\overline{AB}$ jednakokračnog trokuta $ABC$. Opseg trokuta $ABC$ je 50 cm, a opseg trokuta $ACD$ je 40 cm. Kolika je površina trokuta $ABC$?

## Srednja škola — A varijanta

### 1. razred

**1.1.** Koliko se kvadrata prirodnih brojeva nalazi između $4^9$ i $9^4$, ne uključujući ta dva broja?

**1.2.** Neka je $a$ realan broj. Odredi zbroj svih triju rješenja jednadžbe

$$x^3 - a^2x + ax - x + a^2 - a = 0.$$

**1.3.** Ako je $a + b = 4$ i $a^2 + b^2 = 14$, odredi $a^3 + b^3$.

**1.4.** Dan je pravilni peterokut $ABCDE$. Pravci $BC$ i $DE$ sijeku se u točki $F$. Odredi kutove trokuta $BEF$.

**1.5.** Eleonora ima mnogo kocki čije su sve strane bijele boje. Najprije odvoji jednu kocku i stavi ju u praznu kutiju. Zatim uzima jednu po jednu kocku i oboji neke njene strane zelenom bojom, ali tako da se ta kocka razlikuje od svih koje su već u kutiji, te i tu kocku stavlja u kutiju. Koliko najviše kocki može biti u kutiji?

**1.6.** Polumjer opisane kružnice jednakokračnog trokuta s osnovicom duljine $a$ i krakovima duljine $b$ iznosi $R$. Dokaži da vrijedi jednakost $a^2R^2 + b^4 = 4b^2R^2$, bez obzira je li trokut šiljastokutan, pravokutan ili tupokutan.

**1.7.** Ana ima četiri puta toliko godina koliko je imao Petar kada je Ana imala toliko godina koliko Petar ima sada. Kada Petar bude imao toliko godina koliko Ana ima sada, oboje zajedno će imati 95 godina. Koliko godina ima Ana, a koliko Petar?

**1.8.** Odredi sve parove prostih prirodnih brojeva $p$ i $q$ za koje postoji cijeli broj $a$ takav da vrijedi $a^4 = pa^3 + q$.

## 2. razred

**2.1.** Za koje vrijednosti realnog parametra $m$ jednadžba

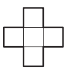
$$(m-1)x^2 - 2mx + 2 = 0$$

nema negativnih realnih rješenja?

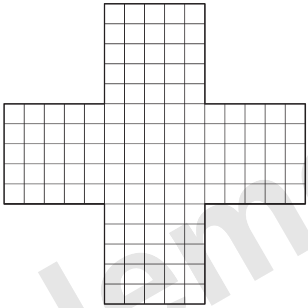
**2.2.** Ante je napisao redom sve prirodne brojeve od 1 do 40, jednog za drugim bez razmaka i tako dobio mnogoznamenkasti broj $12345\ldots383940$. Zatim je odlučio obrisati 60 znamenaka tog broja. Koji najveći broj Ante može dobiti na taj način?

**2.3.** Trokut površine $1.5\ \text{cm}^2$ upisan je u kružnicu polumjera $1.25$ cm i pritom je jedna stranica trokuta promjer te kružnice. Kolike su duljine stranica tog trokuta?

**2.4.** Za koje $x \in \mathbb{R}$ je broj $\sqrt[3]{4+4x}$ veći od broja $1 + \sqrt[3]{x}$?

**2.5.** Lik  koji se sastoji od pet jediničnih kvadratića zovemo "*plus*". Na koliko se načina *plus* može smjestiti na *ploču* istog oblika koja se sastoji od $5 \cdot 5^2$ jediničnih kvadratića, tako da prekriva točno pet jediničnih kvadratića?


www.element.hr



*Sl. 1.5.*

**2.6.** Odredi sve prirodne brojeve manje od 1000 koji su jednaki zbroju kvadrata svojih znamenaka.

**2.7.** Odredi i skiciraj u kompleksnoj ravnini skup svih brojeva $z$ koji zadovoljavaju uvjet

$$\mathrm{Re}\left[(4+3i)z^2\right] \geqslant 0.$$

**2.8.** U šiljastokutnom trokutu $ABC$ točka $M$ je nožište visine iz vrha $A$, a točka $N$ nožište visine iz vrha $B$. Ako je $|AN| = |NM|$, dokaži da središte upisane kružnice trokuta $ABC$ leži na visini $\overline{BN}$.

## 3. razred

**3.1.** Riješi jednadžbu

$$\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = 1.$$

**3.2.** Maja je napisala redom sve prirodne brojeve od 100 do 130, jednog za drugim bez razmaka i tako dobila mnogoznamenkasti broj $100101102\ldots129130$. Zatim je odlučila obrisati 80 znamenaka tog broja. Koji najveći broj Maja može dobiti na taj način?

**3.3.** Izračunaj

$$144^{\log_5 1000} : 10^{6\log_5 12}.$$

**3.4.** Zadana je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ brida duljine $a$. Njenim vrhovima $A$ i $C_1$ te polovištem brida $\overline{BB_1}$ položena je ravnina. Izračunaj površinu presjeka kocke tom ravninom.

**3.5.** Ako duljine stranica trokuta zadovoljavaju jednakost $\dfrac{a+b}{b+c} = \dfrac{c}{a-b}$, odredi mjeru najvećeg kuta tog trokuta.

**3.6.** Odredi sve vrijednosti realnog parametra $a$ za koje jednadžba

$$8^{a\sin^2 x} = 4\cdot 2^{\cos^2 x}$$

ima točno jedno rješenje u intervalu $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

**3.7.** U trokutu $ABC$, duljina stranice $\overline{BC}$ je 6, kosinus kuta pri vrhu $B$ jednak je $\frac{4}{5}$, a duljina polumjera upisane kružnice iznosi 1. Odredi duljine stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ tog trokuta.

**3.8.** Odredi najmanji prirodni broj $N$ veći od 1000 takav da točno polovina brojeva od 1 do $N$ ima u dekadskom zapisu barem jednu znamenku 1.

## 4. razred

**4.1.** Odredi sva rješenja jednadžbe $m! + 2 = n^2$, gdje su $m$ i $n$ prirodni brojevi.

**4.2.** U kompleksnoj ravnini skiciraj skup svih kompleksnih brojeva $z$ koji zadovoljavaju uvjet

$$|z-1| - |z+1| = \sqrt{3}.$$

**4.3.** Odredi realni broj $A$, ako se zna da je u razvoju polinoma

$$\left(1+x^4\right)^{12} + A\left(x(1-x^2)^2\right)^{12}$$

koeficijent uz $x^{12}$ jednak 100.

**4.4.** U jednoj kutiji nalaze se tri plave i jedna crvena kuglica, a u drugoj kutiji tri crvene i jedna plava kuglica. Najprije iz prve kutije prebacimo jednu (slučajno odabranu) kuglicu u drugu, a zatim iz druge kutije izvučemo jednu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da je ta kuglica crvena?

**4.5.** Za koje $n \in \mathbb{N}$ postoje kut $\alpha$ i konveksan $n$-terokut s kutovima $\alpha$, $2\alpha$, ..., $n\alpha$?

**4.6.** Odredi sve prirodne brojeve veće od 1 čiji svi djelitelji zapisani u rastućem poretku čine geometrijski niz.

**4.7.** Neka su $x$ i $y$ realni brojevi za koje vrijedi $x+y \geqslant 0$. Dokaži da je

$$2^{n-1}\left(x^n+y^n\right) \geqslant (x+y)^n \qquad \text{za svaki} \quad n \in \mathbb{N}.$$

**4.8.** Na stolu se nalaze 1234 kamenčića. Ratko i Rudi igraju sljedeću igru: najprije Ratko uzme neki paran broj kamenčića, najmanje dva, ali ne više od 100, a zatim Rudi uzme neki neparan broj kamenčića, najmanje jedan, ali ne više od 99. Potezi se dalje vuku naizmjenično, poštujući iste uvjete. Igrač pobjeđuje ako pokupi sve kamenčiće ili ako drugi igrač ne može odigrati svoj potez. Tko ima pobjedničku strategiju, tj. može pobijediti neovisno o igri drugog igrača?

## Srednja škola — B varijanta

### 1. razred

**1.1.** Izračunajte
$$\frac{1234321234321 \cdot 2468642468641 - 1234321234320}{1234321234320 \cdot 2468642468641 + 1234321234321}.$$

**1.2.** Napišite kao potenciju s bazom 5:
$$3(5^n - 5)(5^n + 5) + 2(25 + 5^{2n}) + 25^{n+1} : 5^{2n}.$$

**1.3.** Škola je raspisala natječaj za najbolje uređenu učionicu. Iznos novčane nagrade će raspodijeliti na četiri prvoplasirana odjeljenja tako da prvoplasirani dobije 40% ukupnog iznosa, drugoplasirani $\frac{1}{3}$ ukupnog iznosa, trećeplasirani $\frac{5}{8}$ od preostalog iznosa nagrade, a četvrti 1500 kn. Odredite ukupni novčani iznos nagrade te iznos nagrade za svako od prva tri mjesta.

**1.4.** Zadan je broj 123456789. Koliko najmanje znamenaka treba izbrisati da novi broj bude djeljiv s 36? Koje su to znamenke?

**1.5.** Jednakokračni trapez, koji nema pravih kutova, podijeljen je dijagonalom na dva jednakokračna trokuta. Odredite kutove trapeza.

**1.6.** U ovisnosti o realnom parametru $m$, odredite rješenje $x$ jednadžbe
$$(m + x)^2 - (x - 3)^2 = x(3 + m^2).$$

**1.7.** Odredite sve prirodne brojeve $n$ za koje je razlomak
$$\frac{6n^2 - 10n - 12}{3n - 5}$$
prirodan broj.

**1.8.** Na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$ dane su točke $P$ i $Q$ takve da je $\overline{BP} : \overline{PC} = \overline{CQ} : \overline{QD} = 1 : 3$. Ako je duljina stranice kvadrata $a$, odredite duljinu najveće i najmanje visine trokuta $APQ$.

### 2. razred

**2.1.** Izračunajte:
$$\left[\frac{(1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})i}{\sqrt{6} + \sqrt{2}i}\right]^{2012}.$$

**2.2.** U kružnici polumjera $r = 10$ cm povučene su dvije paralelne tetive duljina 16 cm i 12 cm. Ako se središte kružnice nalazi unutar trapeza kojemu su te tetive osnovice, izračunajte opseg trapeza.

**2.3.** Izračunajte površinu lika kojeg u kompleksnoj ravnini određuje skup svih kompleksnih brojeva $z$ za koje vrijedi $|\operatorname{Re} z| \leqslant 1$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1$.

**2.4.** Neka je $f(x) = x^2 + bx + c$, $b$, $c \in \mathbb{R}$. Ako je $f(0) + f(1) = \dfrac{1}{2}$, izračunajte $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

**2.5.** Odredite sve prirodne brojeve $m$ tako da jednadžba
$$|x^2 - 5x + 4| = m$$
ima točno četiri različita realna rješenja.

**2.6.** Odredite sve kvadratne jednadžbe oblika $x^2 + px + q = 0$ ako za koeficijente $p$, $q \in \mathbb{R}$ vrijedi $|p - q| = 2012$, a zbroj kvadrata njezinih rješenja iznosi $2012^2$.

**2.7.** Danas je Valentinovo i Valentino želi izaći sa svojom djevojkom Lornom. Za svoj džeparac od 120 kuna može kupiti nekoliko ruža i dvije limunade. Cijena jedne ruže jednaka je cijeni jedne limunade. Kako sutra pišu test iz matematike, izlazak će ipak odgoditi do subote. U subotu će se cijena jedne ruže smanjiti za 7 kuna. Valentino će moći kupiti isti broj ruža, ali ako umjesto limunade želi kupiti jumbo pizzu i coca colu, koje bi platio 78 kn, nedostajat će mu 6 kuna. Koliko će ruža Valentino kupiti Lorni? Po kojoj će cijeni kupovati ruže u subotu?

**2.8.** Jednakokračnom trokutu $ABC$ s osnovicom duljine 18 cm i krakom duljine 41 cm upišite jednakokračan trokut $DEF$ maksimalne površine, tako da su osnovice dvaju trokuta paralelne, a da je vrh upisanog trokuta u polovištu osnovice zadanog. Odredite duljine stranica trokuta $DEF$.

## 3. razred

**3.1.** Riješite nejednadžbu $2012^{2x} - 2012^x - 2011 \cdot 2012 \geqslant 0$.

**3.2.** Odredite sva rješenja jednadžbe
$$\frac{1}{2}\sin 2x - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0.$$

**3.3.** Odredite temeljni period funkcije
$$f(x) = 8\sin^2 x\cos^2 x - 2\cos^2 2x.$$

**3.4.** Koliko ima jednakokračnih trokuta kojima su duljine stranica cjelobrojne, a opseg jednak 30 cm?


www.element.hr

**3.5.** Bačva ima oblik uspravnog valjka kojemu je os u horizontalnom položaju, a duljina polumjera osnovke 2 dm, te duljina visine 6 dm. Bačva je uronjena u vodu do polovine polumjera osnovke. Izračunajte obujam uronjenog dijela bačve.

**3.6.** Površina pravokutnika iznosi $12\ \text{cm}^2$, a ako se šiljasti kut između njegovih dijagonala smanji na pola, površina iznosi $7.5\ \text{cm}^2$. Koliko iznosi duljina dijagonale pravokutnika?

**3.7.** Riješite sustav jednadžbi

$$x = 2^{\frac{4}{1+\log_2 z}},$$
$$y = 2^{\frac{4}{1+\log_2 x}},$$
$$z = 2^{\frac{9}{1+\log_2 y}}.$$

**3.8.** Dokažite da u pravokutnom trokutu s katetama $a$ i $b$, te redom nasuprotnim kutovima $\alpha$ i $\beta$, $a > b$, vrijedi

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}.$$

## 4. razred

**4.1.** Riješite jednadžbu

$$\frac{1}{(2n-4)!} = \frac{1}{(2n-3)!} + \frac{8}{(2n-2)!}.$$

**4.2.** Za koje vrijednosti realnog broja $x$ u razvoju binoma

$$\left(\sqrt{5^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{25^x}}\right)^6$$

treći član iznosi $75$?

**4.3.** Je li broj $\sqrt{6-4\sqrt{2}} - \sqrt{6+4\sqrt{2}}$ racionalan? Dokažite.

**4.4.** U kružni isječak upisan je krug. Izračunajte omjer površina kružnog isječka i upisanog kruga, ako je omjer njihovih polumjera $3:1$.

**4.5.** Neka je $z = -\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}$ kompleksan broj. Odredite najmanji prirodan broj $n$ tako da realni dio broja $z^n$ iznosi 0.

**4.6.** Odredite jednadžbe svih tangenti elipse $x^2 + 4y^2 = 20$ kojima dirališta raspolavljavaju odsječak koji na tim tangentama odsijecaju koordinatne osi. Izračunajte površinu četverokuta kojeg određuju te tangente.

**4.7.** Odredite sve cijele brojeve $a$, $b$ i $c$ tako da vrijedi

$$c = (a+bi)^3 - 7i.$$

**4.8.** Ako za duljine stranica trokuta vrijedi $a - b = b - c \geqslant 0$, dokažite da drugi po veličini kut nije veći od $60°$. Kada će taj kut biti jednak $60°$?

# RJEŠENJA

## Osnovna škola

**4.1.** a) $36 + 144 : (9 - 3 \cdot 2) = 36 + 144 : 3 = 36 + 48 = 84$.

b) $(36 + 144) : 9 - 3 \cdot 2 = 180 : 9 - 3 \cdot 2 = 20 - 6 = 14$.

**4.2.** Uočavamo zbrojeve: $13 + 6 = 19$, $7 + 12 = 19$, $5 + 14 = 19$. To znači da 11 pribrojen nepoznatom broju daje 19, odnosno traženi broj je 8.

**4.3.** Kako je $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$, trokut treba zamijeniti brojem 2, a krug brojem 3. Budući da je $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, kvadrat treba zamijeniti brojem 4.

**4.4.** *1. način.* Ako vrijeme utrošeno za prikazivanje reklama oduzmemo od ukupnog vremena prikazivanja filma, preostat će vrijeme koliko bi trajalo prikazivanja samog filma (bez reklama). Reklame ukupno traju 10 minuta. Ako bi prikazivanje filma bez reklama započelo za 10 minuta kasnije (u 18 sati), film bi završio u isto vrijeme tj. u 19 sati i 45 minuta.

Trajanje samog filma odgovara vremenu od 18 sati do 19 sati i 45 minuta, dakle prikazivanje filma trajalo bi 1 sat i 45 minuta odnosno 105 minuta.

*2. način.* Od 17 sati i 50 minuta do 19 sati i 45 minuta proteklo je 5 minuta manje od puna 2 sata. Kako 1 sat ima 60 minuta, proteklo je 1 sat i 55 minuta. Reklame ukupno traju 10 minuta, pa film bez reklama traje 10 minuta manje od ukupnog proteklog vremena, dakle prikazivanje samog filma trajalo bi 1 sat i 45 minuta.

**4.5.** Danijel je riješio dvostruko manje zadataka od Josipa, dakle $6 : 2 = 3$ točna zadataka. Budući da je Danijel imao 3 točna i 5 netočnih zadatka, u ispitu je bilo $3 + 5 = 8$ zadataka.

Petar je točno riješio pola, dakle imao je 4 točna rješenja. Dječaci su ukupno riješili $6\text{ (Josip)} + 3\text{ (Danijel)} + 4\text{ (Petar)} = 13$ zadataka.

**4.6.** $129 - (6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11) = 129 - 51 = 78$. Nakon što je odletjela 51 ptica, na 6 hrastova je ostalo 78 ptica.

$78 : 6 = 13$. Na svakom od njih ostalo je 13 ptica.

Na početku je na prvom hrastu bilo $13 + 6 = 19$, na drugom $13 + 11 = 24$, na trećem $13 + 8 = 21$, na četvrtom $13 + 10 = 23$, na petom $13 + 7 = 20$ i na šestom $13 + 9 = 22$ ptice.