1.

Školsko (gradsko) natjecanje

Školsko natjecanje prva je razina natjecanja iz matematike za koju zadatke sastavlja Državno povjerenstvo za matematička natjecanja. Školska natjecanja održana su diljem Hrvatske u četvrtak 29. siječnja 2015.

Svi učenici rješavali su po sedam zadataka. Prvih pet su lakši i bodovali su se sa 6 bodova svaki, a zadnja dva su teža i svaki je vrijedio 10 bodova. Za učenike osnovnih škola natjecanje je trajalo dva sata, a za učenike srednjih škola tri sata.

ZADACI

Osnovna škola

4. razred

4.1. Izračunaj $2015 - 5 \cdot (25 \cdot 13 + 13 + 3 \cdot 25 - 10)$.

4.2. Pisač Printko ispisuje znamenku 1 širine 2 mm, a preostale znamenke su širine 6 mm. Razmak između svake dvije susjedne znamenke iznosi 1 mm. Izračunaj kolika je širina umnoška brojeva 2367 i 357.

4.3. U sljedećim jednakostima umjesto nekih brojeva stavljeni su znakovi $\diamond$, $\star$, $\heartsuit$, $\square$ i $\blacksquare$. Ako je umjesto broja 7 stavljen znak $\blacksquare$, odredi brojeve umjesto kojih su stavljeni ostali znakovi.

$$\heartsuit + \star + \heartsuit + \blacksquare = \square$$

$$\star + \blacksquare + \star + \blacksquare = 20$$

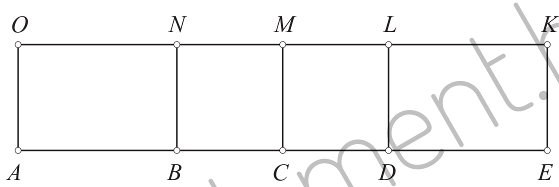
$$\heartsuit + \blacksquare + \blacksquare + \blacksquare = 30$$

$$\diamond + \star + \diamond + \heartsuit = 24$$

4.4. Godišnji komplet časopisa Modra lasta sastoji se od 6 brojeva. Svaki broj ne mora imati isti broj listova, ali se zna da svaki ima 40 ili 44 lista. Može li godišnji komplet imati ukupno 260 listova?

4.5. Zamislio sam jedan dvoznamenkasti broj. Zamijenio sam mu znamenke i dodao broj 15. Dobiveni broj sam prepolovio te onda zamijenio znamenke. Tako sam dobio broj 62. Koji sam broj zamislio?

4.6. Ispiši sve pravokutnike sa slike.



4.7. U školskom hodniku nalazi se aparat s toplom čokoladom koja košta 3 kune. Na kraju mjeseca iz njega je izvađeno 248 kovanica od 2 kune, 189 kovanica od 1 kune, 87 kovanica od 50 lipa, 45 kovanica od 20 lipa i 35 kovanica od 10 lipa. Koliko je u tom mjesecu prodano šalica tople čokolade?

5. razred

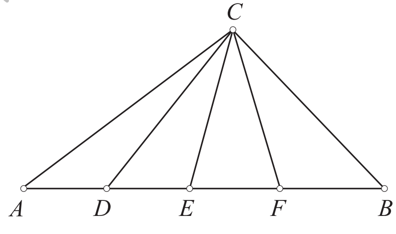
5.1. Izračunaj: $149 \cdot 76 - (55 - 5 \cdot 3) \cdot (100 - 6 \cdot 4) + 76 \cdot 291 =$

5.2. Odredi najmanji i najveći peteroznamenkasti neparni prirodni broj kojemu su 3 znamenke neparne, a 2 parne.

5.3. Umnožak triju prirodnih brojeva je 13 600. Izračunaj umnožak prvog i drugog broja ako je umnožak prvog i trećeg broja 544, a umnožak drugog i trećeg 425.

5.4. Odredi sve prirodne brojeve oblika $\overline{9a6b9}$ djeljive s 3 kojima su znamenke desetice i tisućice prosti brojevi.

5.5. Koliko ukupno ima svih dužina, a koliko ima svih trokuta na slici (točke D, E i F se nalaze na dužini $\overline{AB}$)?



5.6. Kvadrat, pravokutnik i trokut imaju jednake opsege. Duljine stranica trokuta u centimetrima su tri uzastopna prirodna broja, a duljine susjednih stranica pravokutnika se razlikuju za 2 cm. Odredi duljine stranica zadanih likova ako su duljine stranica svih likova izražene prirodnim brojevima u centimetrima i ako duljina niti jedne stranice niti jednog od likova nije veća od 15 cm. Ispitaj sve mogućnosti.

5.7. Ako se troznamenkastom broju m pribroji 13, zbroj je djeljiv s 13. Ako se od broja m oduzme 17, razlika je djeljiva sa 17. Ako se broj m podijeli s 2, količnik je djeljiv s 2. Odredi broj m.

6. razred

6.1. Popuni magični kvadrat. (U magičnom kvadratu je zbroj brojeva u svakom retku, stupcu i na obje dijagonale jednak.)

0.75		$\frac{1}{4}$
		$1\frac{1}{8}$
		0.5

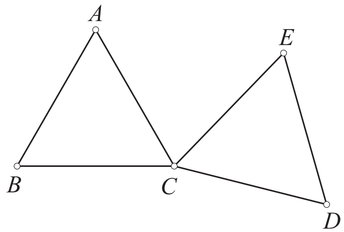
6.2. Četvorica prijatelja skupljali su plastične boce. Nikola je skupio 72 boce, Vlado za trećinu manje od Nikole, a Petar za trećinu više od Vlade. Marko je zaključio da je on zajedno s Vladom i Petrom skupio dvostruko više boca od Nikole. Koliko je boca skupio Marko?

6.3. Na svakih 7 dječaka u jednoj školi dolazi 8 djevojčica, a na 9 dječaka dolazi jedan učitelj. U toj je školi ukupno 675 učenika. Koliko je učitelja u toj školi?

6.4. Odredi sve osmeroznamenkaste prirodne brojeve oblika $\overline{aaaabbbb}$ djeljive s 15. Postupak obrazloži.

6.5. Posuda do vrha ispunjena vodom ima masu 17 kg, a ako je do polovine ispunjena vodom, ima masu 9.5 kg. Kolika je masa prazne posude?

6.6. Jednakostranični trokuti ABC i CDE su sukladni trokuti. Ako je $\sphericalangle ACE = 74°30'$, kolika je veličina $\sphericalangle ABE$?



6.7. Autobus je krenuo iz Zagreba prema Splitu sa zaustavljanjima u Zadru i Šibeniku. U Zadru je izišla $\frac{1}{4}$ ukupnog broja putnika koji su se nalazili u autobusu, a u Šibeniku su izišle $\frac{2}{5}$ broja putnika koji su u Šibenik stigli. Koliko je putnika stiglo u Split ako su se u Šibeniku iskrcala dva putnika više nego u Zadru?

7. razred

7.1. Biciklist je prešao neki put za 1 sat i 24 minute vozeći stalnom brzinom od 30 km/h. Kojom je brzinom vozio u povratku ako je putovao 12 minuta kraće?

7.2. Srednja vrijednost dvanaest brojeva je 4.7. Dodavanjem dvaju novih brojeva srednja vrijednost se mijenja i jednaka je 5.6. Koja je srednja vrijednost dvaju novih brojeva?

7.3. Susjeda Ana uzgaja kokoši. Prije 4 godina imala je 32 kokoši. Prve dvije godine se broj kokoši uvećavao za 25% u odnosu na prethodnu, a sljedeće dvije godine se broj kokoši smanjivao za 20% u odnosu na prethodnu. Koliko kokoši ima ove godine susjeda Ana?

7.4. U bubnju se nalaze kuglice na kojima su napisani svi troznamenkasti brojevi (svaki po jednom). Izvlači se jedna kuglica. Kolika je vjerojatnost da zbroj znamenaka izvučenog broja bude 2 ili 5?

7.5. Točke $A(-1,0)$ i $B(4,0)$ vrhovi su jednakokračnog trokuta ABC s osnovicom $\overline{AB}$. Odredi koordinate vrha C ako je površina trokuta ABC jednaka 15 kvadratnih jedinica?

7.6. Koliko kilograma trešanja čija je cijena 18 kn po kilogramu treba pomiješati s 2012 kg trešanja čija je cijena 25 kn po kilogramu da bi se dobivena mješavina trešanja mogla prodavati po cijeni 20 kn po kilogramu, bez razlike u zaradi?

7.7. Dan je kvadrat $ABCD$. Na stranici $\overline{AB}$ zadana je točka M koja tu stranicu dijeli u omjeru $1:3$ (počevši od vrha A). Na stranici $\overline{BC}$ zadana je točka N tako da se površina trokuta MBN odnosi prema površini danog kvadrata kao $1 : 4$. U kojem omjeru točka N dijeli stranicu $\overline{BC}$ (počevši od vrha B)?

8. razred

8.1. Koliko ima prirodnih brojeva x za koje vrijedi nejednakost $2014 < \sqrt{x} < 2015$?

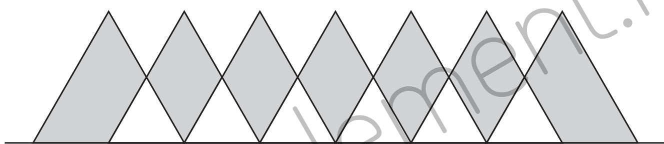
8.2. Izračunaj vrijednost izraza $\dfrac{a^2}{ab+b^2}$ ako omjer brojeva a i b iznosi $2 : 5$.

8.3. Velika kocka izgrađena je od 27 jediničnih kockica. Nakon što su jedinične kockice zalijepljene u veću kocku, ta je kocka uronjena u boju. Koliko je jediničnih kockica obojeno s jedne strane, koliko s dvije, koliko s tri, a koliko niti s jedne strane? Obrazloži svoje odgovore.

8.4. Neki mnogokut ima 5 stranica manje od drugog mnogokuta te 50 dijagonala manje od tog drugog mnogokuta. Koji je to mnogokut (ovaj s manjim brojem stranica)?

8.5. Točke A, B i C dijele kružnicu na tri kružna luka, $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ i $\overset{\frown}{AC}$ duljine kojih se odnose redom kao $3 : 4 : 5$. Kolike su veličine unutarnjih kutova tim točkama određenog trokuta ABC?

8.6. Na slici je 7 jednakostraničnih trokuta sa stranicom duljine $4\sqrt{3}$ cm.



Trokuti su složeni tako da je vrh drugog trokuta u polovištu stranice prvog trokuta, vrh trećeg trokuta u polovištu stranice drugog trokuta i tako redom vrh sedmog trokuta u polovištu stranice šestog trokuta. Kolika je površina sivog dijela?

8.7. Opseg paralelograma je 30 cm. Zbroj površina kvadrata konstruiranih nad dvjema susjednim stranicama je $113\ \text{cm}^2$. Kolike su duljine tih stranica?

Srednja škola — A varijanta

1. razred

1.1. Odredi prirodni broj n takav da mu je zbroj najmanja dva djelitelja 6, a zbroj najveća dva djelitelja 1122.

1.2. Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da je $a^3 + b^3 = 2ab(a+b)$. Odredi $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2}$.

1.3. Površina presjeka većeg i manjeg kvadrata iznosi dvije trećine površine manjeg kvadrata, a također i jednu petinu površine njihove unije. Odredi omjer duljina stranica većeg i manjeg kvadrata.

1.4. U ravnini je nacrtano sto kružnica s istim središtem polumjera $1, 2, \ldots, 100$. Najmanji krug obojan je crvenom bojom, a svaki od 99 kružnih vijenaca omeđenih dvjema kružnicama crvenom ili zelenom bojom tako da su susjedna područja različitih boja.

Odredi ukupnu površinu zeleno obojanih područja.

1.5. Neka je I središte upisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC i neka je $|AC| > |BC|$. Simetrala kuta i visina iz vrha C sijeku se pod kutom od 10°. Ako je $\sphericalangle AIB = 120^\circ$, odredi kutove trokuta ABC.

1.6. Postoji li prirodan broj n takav da je $n^2 + 2n + 2015$ kvadrat nekog prirodnog broja?

1.7. Na nogometnom turniru sudjeluje pet ekipa koje igraju svaka sa svakom točno jednom. Pobjeda donosi 3 boda, poraz 0 bodova, a neriješeno 1 bod. Može li se dogoditi da na kraju turnira, u ukupnom poretku, svaka ekipa osim posljednje ima točno dva boda više od sljedeće?

2. razred

2.1. Dokaži sljedeću tvrdnju: ako je z kompleksni broj za koji je $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right) = 0$, onda je $|z| = 1$.

2.2. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC, te neka je N nožište visine iz vrha A. Dokaži da je $\sphericalangle BAN = \sphericalangle CAO$.

2.3. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od $1\,000\,000$ koji su kvadrati prirodnih brojeva, a daju ostatak 4 pri dijeljenju sa 8?

2.4. Zbroj kvadrata svih rješenja jednadžbe $x^4 + ax^2 + b = 0$ jednak je 32, a umnožak svih rješenja te jednadžbe je 4. Odredi a i b.

2.5. U četverokutu $ABCD$ zadano je $|AB| = 6$, $|BC| = 9$, $|CD| = 18$ i $|AD| = 5$. Odredi duljinu dijagonale $\overline{AC}$ ako je poznato da je ta duljina prirodni broj.

2.6. Žicom duljine d treba ograditi zemljište u obliku kružnog isječka tako da površina tog zemljišta bude najveća moguća. Kolika je površina tako ogradenog zemljišta?

2.7. Na košarkaškom turniru svaka od ekipa igra točno dva puta sa svakom od ostalih ekipa. Pobjeda donosi 2 boda, poraz 0 bodova, a neriješenog rezultata nema. Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoji košarkaški turnir s n ekipa na kojem je jedna ekipa, pobjednik turnira, imala 26 bodova, a točno dvije ekipe najmanji broj bodova, i to 20 bodova.

3. razred

3.1. Dokaži da za sve pozitivne realne brojeve x i y vrijedi

$$\log^2(xy) \geqslant \log(x^2)\log(y^2).$$

3.2. Odredi sve vrijednosti koje može poprimiti izraz

$$\frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x},$$

pri čemu je x realni broj.

3.3. Odredi najveći prirodni broj n takav da

$$n+5 \mid n^4 + 1395.$$

3.4. Neka je $ABCD$ tetraedar u kojem je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAB = 90°$, $|AD| = 2\sqrt{2}$ te $|AB| = |AC| = 3$. Odredi polumjer sfere upisane tom tetraedru.

3.5. Odredi najmanji prirodni broj n takav da u svakom skupu koji se sastoji od n cijelih brojeva postoje tri medusobno različita elementa a, b i c takva da je $ab+bc+ca$ djeljivo sa 3.

3.6. Neka je ABC trokut u kojem je $\operatorname{tg}\sphericalangle BAC = 1$ i $\operatorname{tg}\sphericalangle ABC = 2$. Odredi omjer $|BC| : |AB|$.

3.7. Imamo deset bijelih, te po jednu crvenu, plavu, zelenu, žutu i ljubičastu karticu. Bijele kartice medusobno ne razlikujemo. Na točno jednoj strani svake kartice je znak X. Na koliko načina možemo složiti te kartice jednu na drugu tako da nikoje dvije kartice nisu okrenute jedna prema drugoj stranom na kojoj je X?

4. razred

4.1. Neka su a, b i c realni brojevi i $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funkcija zadana formulom
$$f(x)=ax^5+bx^3+c\sin x-1.$$
Ako je $f(-2015)=2015$, odredi $f(2015)$.

4.2. Koliki je koeficijent uz x^9 u polinomu $\left(1+x^3+x^6\right)^{10}$?

4.3. Neka je n prirodni broj i neka je $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k!(k^2+k+1)$. Izračunaj $\dfrac{S_n+1}{(n+1)!}$.

4.4. U kutiji se nalazi jedna crvena i pet bijelih kuglica označenih brojevima 1, 2, 3, 4, 5. Ne gledajući, Domagoj izvlači jednu po jednu kuglicu sve dok ne izvuče crvenu kuglicu, nakon čega prekida izvlačenje. Izvučene kuglice se ne vraćaju u kutiju. Kolika je vjerojatnost da je zbroj brojeva na izvučenim bijelim kuglicama barem 10?

4.5. Za prirodni broj n označimo s R_n broj čiji se dekadski zapis sastoji od n znamenki 1. Dokaži tvrdnju: ako je R_n prost broj, onda je i n prost broj.

4.6. Neka su M i N redom nožišta visina iz vrhova A i B šiljastokutnog trokuta ABC. Neka je Q polovište dužine $\overline{MN}$, a P polovište stranice $\overline{AB}$. Ako je $|MN|=10$ i $|AB|=26$, odredi duljinu $|PQ|$.

4.7. Neka je n prirodni broj. Svaki od brojeva $n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1$ ima najveći neparni djelitelj. Odredi zbroj tih najvećih neparnih djelitelja.

Srednja škola — B varijanta

1. razred

1.1. Koji je razlomak veći,
$$\frac{22\,222\,221}{22\,222\,223} \quad \text{ili} \quad \frac{33\,333\,331}{33\,333\,334}?$$
Dokažite.

1.2. Rastavite na linearne faktore
$$(x-1)(x-2)(x-3)+(x-1)(x-2)+1-x.$$

1.3. Svaki od 28 učenika posjetio je barem jednu od tri države. Broj učenika koji je posjetio samo Italiju i Španjolsku jednak je broju učenika koji su posjetili samo Italiju. Niti jedan učenik nije posjetio samo Španjolsku i niti jedan samo Grčku. Šest je učenika posjetilo Grčku i Italiju, ali ne i Španjolsku. Broj učenika koji je posjetio samo Grčku i Španjolsku je pet puta veći od onih koji su posjetili sve tri zemlje. Ako je broj učenika koji su posjetili sve tri zemlje paran i različit od nule, koliko je učenika posjetilo samo Italiju?

1.4. Točke F, G i H pripadaju stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC. Točka F je između točaka A i G, a točka H između točaka G i B. Mjera kuta CAB iznosi 5°, a $|BH| = |BC|$, $|HG| = |HC|$, $|GF| = |GC|$, $|FA| = |FC|$. Kolika je mjera kuta $\sphericalangle ABC$?

1.5. Ivo i Ana oboje su pili limunadu u kinu i gledali film. Ivo je uzeo srednju veličinu, a Ana veliku koja je za 50% veća od srednje. Nakon što su oboje popili $\frac{3}{4}$ svoje limunade, Ana je dala Ivi jednu trećinu od onog što je njoj ostalo i još 0.5 dl. Nakon što je film završio i svu su limunadu popili, ustanovili su da su oboje popili istu količinu limunade. Koliko su decilitara limunade zajedno popili?

1.6. Zbroj znamenaka troznamenkastog broja je 17. Znamenka desetica je 9. Ako znamenke stotica i jedinica zamijene mjesta, novi je broj za 100 veći od dvostrukog prvog broja. Koji je prvi broj?

1.7. Dokažite da je izraz $n^4+7(7+2n^2)$ djeljiv sa 64 za svaki neparni broj n.

2. razred

2.1. Odredite za koju vrijednost varijable x izraz $(3ax+2015)^2+(2ax+2015)^2$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ima najmanju vrijednost i koliko iznosi ta najmanja vrijednost?

2.2. Svima je poznato da Pinokiu raste nos kada laže. Što dulje i brže Pinokio laže, to mu nos više raste. Jednog dana Pinokio Piko je toliko dugo lagao da mu je nos narastao 54 mm. Pinokio Niko je lagao toliko dugo da mu je nos narastao 6 mm. Piko je lagao 4 minute dulje nego Niko. Da je Piko lagao koliko Niko, a Niko koliko i Piko nosovi bi im jednako narasli. Odredite koliko bi dugo svaki od njih trebao lagati da im jednako narastu nosovi te koliko bi im u tom slučaju narasli nosovi.

2.3. Neka je

$$x = \frac{2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt[4]{3}+1)(\sqrt[8]{3}+1)(\sqrt[16]{3}+1)}.$$

Odredite $(x+1)^{64}$.

2.4. Dokažite da jednadžba $5x^2 - 4y^2 = 2015$ nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

2.5. U trokutu ABC na stranici $\overline{AB}$ nalazi se točka D tako da je $|AD| : |DB| = 3 : 4$. Na dužini $\overline{CD}$ nalazi se točka E tako da je $|CE| : |ED| = 3 : 4$. Paralela s pravcem AE prolazi točkom D i siječe $\overline{BC}$ u točki G. Odredite omjer $|CG| : |GB|$.

2.6. Jednadžbe $|z-2a| = |z-a|$ i $|z-3ai| = |z-ai|$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, određuju skupove točaka u Gaussovoj ravnini koji s koordinatnim osima zatvaraju lik površine 75 kvadratnih jedinica. Izračunajte opseg tog lika.

2.7. Odredite vrijednost realnog parametra m tako da rješenja jednadžbe

$$(mx-1) \cdot x = mx - 2$$

predstavljaju duljine kateta pravokutnog trokuta s hipotenuzom duljine $\frac{5}{6}$.

3. razred

3.1. Odredite vrijednost izraza $A = 1 + \operatorname{tg} 35^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ$.

3.2. Prva znamenka nekog četveroznamenkastog broja za jedan je veća od njegove treće znamenke, a druga znamenka jednaka je zbroju preostalih znamenaka. Zadnja znamenka tog broja je za pet manja od prve znamenke. Odredite taj četveroznamenkasti broj.

3.3. Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije

$$f(x) = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}.$$

3.4. Riješite jednadžbu

$$\frac{\sin\left(x - \frac{2015\pi}{2}\right) - \cos^3 x}{\sin(2x + 2015\pi)} = \frac{1}{2}.$$

3.5. Koji od pravokutnih trokuta s cjelobrojnim stranicama i jednom katetom duljine 1000 cm ima najveći mogući opseg?

3.6. Odredite sve vrijednosti parametra $m \in \mathbb{R}$ tako da jednadžba

$$\log_{x+m}(x^3 - 9x + 8) \cdot \log_{x-1}(x+m) = 3$$

ima jedinstveno rješenje.

3.7. Osnovka uspravne piramide je trokut sa stranicama duljine 25 cm, 29 cm, 36 cm. Sve pobočke piramide zatvaraju s ravninom osnovke kut od 75°. Obujam piramide iznosi $k + l\sqrt{m}$ cm^3. Odredite prirodne brojeve k, l i m.

4. razred

4.1. Riješite jednadžbu

$$\binom{n}{n-2}+2\binom{n-1}{n-3}=\binom{n+1}{n-1}+\binom{n-2}{n-3}.$$

4.2. Odredite prirodan broj n, tako da omjer sedmog člana brojeći od početka, prema sedmom članu brojeći od kraja, u razvoju binoma $\left(\sqrt[3]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$ bude jednak $\dfrac{1}{6}$.

4.3. Odredite sve troznamenkaste brojeve koji u sustavu s bazom 9 imaju prikaz $\overline{xyz}_9$, a u sustavu s bazom 11 prikaz $\overline{zyx}_{11}$.

4.4. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n-1)2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}=2^n.$$

4.5. U trokutu ABC visina iz vrha A dijeli nasuprotnu stranicu na dijelove duljina 2 cm i 10 cm, a $\operatorname{tg}\sphericalangle CAB=\dfrac{9}{2}$. Izračunajte površinu trokuta ABC.

4.6. Elipsi $x^2+4y^2=4$ upisan je romb kojemu je jedan vrh u točki $A(\sqrt{2}, y>0)$. Odredite koordinate preostalih vrhova te izračunajte površinu romba.

4.7. Odredite sve kompleksne brojeve $z=x+yi$, $x,\ y\in\mathbb{R}$ takve da je točka (x,y) u četvrtom kvadrantu i da vrijedi

$$|z+iz|=2,\qquad \operatorname{Re}(z^4)=-2.$$